文章编号：1000-4750(2013)03-0046-07

一维有限单元法位移模式研究

唐义军，罗建辉
(湖南大学土木工程学院，湖南，长沙 410082)

摘　要：通过基于完整位移模式与基于常规位移模式伽辽金方程的比较，导出了伽辽金方程精确成立的条件。论证了位移模式与泡函数的相关性。提出了一次元与泡函数结合的单元方案。利用精确成立的条件，通过量级分析，保留泡函数主要的影响项，避免了求解泡函数的解析表达式。该文的结果达到了 h^4 阶的收敛精度，与收敛精度为 h^2 阶的常规一次元相比，计算量并没有本质上的增加。理论分析和数值计算表明，该文单元是一个比高次元性能优的单元。

关键词：有限元；位移模式；伽辽金方法；收敛精度；超收敛
中图分类号：TU318　**文献标志码：**A　doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.09.0629

ON DISPLACEMENT MODE OF ONE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT METHOD

TANG Yi-jun , LUO Jian-hui
(Institute of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: Based on the comparison of the full displacement mode and conventional displacement mode of Galerkin equations, the exact conditions for the establishment of Galerkin equations is derived. The association of a displacement mode and the bubble function is demonstrated. The combination program of a liner element and a bubble function is proposed. Using the condition of precise establishment, by the analysis order of magnitude, retaining the main impact item of a bubble function, the analytical expression solving for bubble functions is avoided. The derivative accuracy has reached the order of h^4, compared with the liner element that the convergence precision is the order of h^2. The calculation does not be essentially increased. Theoretical analyses and numerical calculations show that this unit is a superior performance than a high-dimensional element.

Key words: finite element method (FEM); displacement mode; Galerkin method; convergence precision; super-convergence

有限元是一种非常有效的微分方程数值求解方法，广泛应用于科学和工程计算各领域，已经取得了巨大的成功。使用常规有限元，求得的应力精度会比结点位移精度呈数量级的下降。这一现象引发了超收敛计算的研究[1−2]。袁驷等基于结构力学中的矩阵位移法[3]和有限元数学理论中的投影定理[2]，对一维问题提出了有限元后处理超收敛计算的单元能量投影法[4−8]。Hughes 等提出了变分多尺度方法[9−10]。Masud 和 Khurram 用多尺度有限元方法求解了对流扩散方程[11]和不可压流体力学 Navier-Stokes 方程[12]。

对于位移法有限元，采用伽辽金法、变分原理、虚位移原理等推导有限元公式，必须首先假设位移模式。常规有限元的位移模式是结点变量的齐次函数。显然常规位移模式并不完备。完备位移模式应包括 2 部分：第 1 部分为常规的位移模式；第 2 部分为高阶解的位移模式，即泡函数模式。本文通过基于完整位移模式的积分形式与基于常规位移模式伽辽金方程的比较，导出了伽辽金方程精确成立的条件。

收稿日期：2011-09-23；修改日期：2011-12-13
通讯作者：罗建辉(1957—)，男，湖南人，教授，博士，从事结构工程研究(E-mail: luojianhui@hnu.edu.cn).
作者简介：唐义军(1977—)，男，湖南人，博士生，从事结构工程研究(E-mail: yijuntang168@163.com).

基于完备位移模式，提出一种一次元与泡函数结合的单元方案。通过对泡函数的量级分析，保留其主要的影响项，避免了直接求解泡函数的解析表达式。新的单元刚度矩阵的精度比采用常规的位移模式提高了 h^2 量级，而计算量并没有本质上的增加。本文结点的位移、导数都达到了 h^4 阶的超收敛精度。

1　有限元的位移模式

以一维问题为例，阐述本文的基本思想。一维问题的基本方程为：

$$Lu - f = 0 \tag{1}$$

式中：$L = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(D\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + k$，$L$ 为自伴线性微分算子，$D(x)>0$，$k(x)>0$；u 作为基本未知量。不失一般性，为便于表达，考虑图 1 所示的二阶问题物理模型问题。f 为轴向分布荷载、k 为分布弹簧的刚度，杆件截面的拉压刚度为 D，u 表示轴向位移，按位移法该问题的基本方程为式(1)。

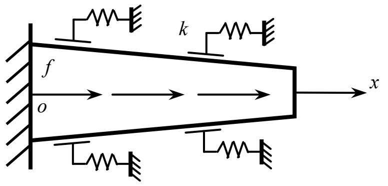

图 1　二阶问题物理模型

Fig.1　Physical model of 2nd order problem

以图 2 所示二结点单元为例，讨论有限元的位移模式。对于二结点单元，单元内的位移 u^h 用形函数对结点位移插值得：

$$u^h = \sum_{i=1}^{2} u_i^h N_i(x) \tag{2}$$

式中形函数 N_i 满足：

$$N_i(x_j)=\delta_{ij}, \quad i,j=1,2 \tag{3}$$

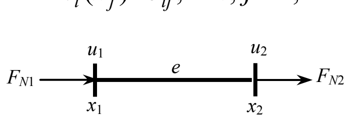

图 2　二结点单元

Fig.2　Element of two nodes

式(2)即为常规的有限元的位移模式，其为结点变量的一次齐次函数。若：

$$u^h = \sum_{i=1}^{2} u_i N_{Ei}(x) \tag{4}$$

式中形函数 N_{Ei} 满足：

$$\begin{aligned} &LN_{Ei}(x) = 0, \quad i = 1,2 \\ &N_{Ei}(x_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2 \end{aligned} \tag{5}$$

则 N_{Ei} 称为精确形函数，对应的位移模式式(4)为精确形函数位移模式。董平(Tong P)[13]和袁驷[4]证明了采用这种位移模式的单元可以给出精确的结点位移。显然，由式(4)表示的 u^h 在单元内只是式(1)的齐次解，一般并不是式(1)的精确解。直接对位移 u^h 求导，得不到单元内的精确导数值，即使在结点上也得不到精确导数值。

所以，常规位移模式和精确形函数位移模式并不完备。完备位移模式为：

$$u = u^h + u^{\#} \tag{6}$$

在 u^h 的基础上，增加了非齐次项的有限元高阶解 $u^{\#}$。$u^{\#}$ 要求满足如下的方程和边界条件：

$$Lu^{\#} = f - Lu^h, \quad x_1 < x < x_2 \tag{7a}$$

$$u^{\#}(x_1) = 0, u^{\#}(x_2) = 0 \tag{7b}$$

式(7b)即为泡函数要满足的边界条件。所以 $u^{\#}$ 亦称为泡函数。取泡函数等于零，完整的位移模式就退化到常规的位移模式。若 u^h 为精确形函数位移模式，则 $Lu^h = 0$，对应的式(7a)为：

$$Lu^{\#} = f, \quad x_1 < x < x_2$$

$u^{\#}$ 的物理意义为微分方程式(1)的特解。下面将讨论完备位移模式与原有位移模式的区别。

2　伽辽金方程精确成立的条件

对图 2 所示单元，利用积分形式，进行单元分析。在单元内应该满足：

$$Lu - f = 0, \quad x_1 < x < x_2 \tag{8}$$

在单元的两端满足内力边界条件：

$$D\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x_1) = -F_{N1}, \quad D\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x_2) = F_{N2} \tag{9}$$

以完备位移模式式(6)代入式(8)得：

$$Lu^h + Lu^{\#} - f = 0, \quad x_1 < x < x_2 \tag{10}$$

式(10)和式(9)构成了单元分析的微分形式。将式(10)和式(9)写成积分形式[14−15]为：

$$\int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h - Lu^{\#})u^* \mathrm{d}x + \left[F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1) + D\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}(x_1)\right]u^*(x_1) + \left[F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2) - D\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}(x_2)\right]u^*(x_2) = 0 \tag{11}$$

式中，u^*为任意的权函数。为了与常规的伽辽金方程区分，将积分形式式(11)称为广义伽辽金方程。

以原有位移模式 u^h 代入式(8)得：

$$R = f - Lu^h, \quad x_1 < x < x_2 \tag{12}$$

式中：

$$R = Lu^\#, \quad x_1 < x < x_2$$

一般残差 $R \neq 0$。按照残差加权平均为零的思想，得伽辽金方程为：

$$\int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h)u^* \mathrm{d}x + \left[F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1)\right]u^*(x_1) + \left[F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2)\right]u^*(x_2) = 0 \tag{13}$$

式(11)和式(13)的区别为：完备位移模式精确满足式(8)，而原有位移模式一般不满足式(8)。从微分形式到积分形式，广义伽辽金方程是精确的成立，而伽辽金方程是加权平均意义上的近似成立。

由于完备位移模式是精确的位移模式，比原有位移模式 u^h 多出 $u^\#$。一般情况下 $u^\# \neq 0$。下面将从广义伽辽金方程出发，导出伽辽金方程精确成立的条件。

利用分部积分易证下列恒等式成立。

$$\int_{x_1}^{x_2} Lu^\# u^* \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x + \left(D\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}u^\#\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \left(D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}u^*\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} \tag{14}$$

将式(14)代入广义伽辽金方程式(11)得：

$$\int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h)u^* \mathrm{d}x + \left[F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1) + D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_1)\right]u^*(x_1) + \left[F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2) - D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_2)\right]u^*(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x + \left(D\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}u^\#\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \left(D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}u^*\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

将 $u^\#$ 的边界条件式(7b)代入上式并整理得：

$$\int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h)u^* \mathrm{d}x + \left[F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1)\right]u^*(x_1) + \left[F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2)\right]u^*(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x \tag{15}$$

式(15)为广义伽辽金方程式(11)的恒等变换式。式(15)与伽辽金方程式(13)相比，多出了一项。若：

$$\int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x = 0 \tag{16}$$

则式(11)与式(13)完全相同。所以式(16)是伽辽金方程式(13)精确成立的条件。对于自伴系统，$u^* = u^h$，即权函数等于形函数。若取精确形函数为权函数：

$$u^* = N_{Ei}(x), \quad i = 1,2$$

则式(16)满足。

3 位移模式分析

3.1 位移模式与泡函数的相关性

有限元的位移一般采用多项式。对于有些问题，低次多项式形函数就是精确形函数。例如，轴向拉压问题(在 L 中，$k = 0$)，就属于这种情况。即：

$$N_{E1} = 1 - \frac{x - x_1}{h}, \quad N_{E2} = \frac{x - x_1}{h}, \quad h = x_2 - x_1 \tag{17}$$

采用精确形函数位移模式 u^h，则条件式(16)满足。其对应的伽辽金方程式(13)为：

$$\int_{x_1}^{x_2} f u^* \mathrm{d}x + \left[F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1)\right]u^*(x_1) + \left[F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2)\right]u^*(x_2) = 0 \tag{18}$$

由于满足了条件式(16)，从式(18)看，结点位移的求解与 $u^\#$ 形式上是无关的。但结点位移的求解真的与 $u^\#$ 无关吗？下面将对这一问题进行分析。

完备位移模式为 $u^h + u^\#$，采用与精确形函数位移模式 u^h 相同的形函数和权函数。将完备位移模式直接代入广义伽辽金方程式(11)，并利用式(7a)得：

$$\left[F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1) + D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_1)\right]u^*(x_1) + \left[F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2) - D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_2)\right]u^*(x_2) = 0 \tag{19}$$

在式(18)中分别取：

$$u^* = N_{E1}, \; u^* = N_{E2}$$

得精确形函数位移模式对应的刚度矩阵(附带荷载项)为：

$$F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f N_{E1} \mathrm{d}x = 0,$$

$$F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} f N_{E2} \mathrm{d}x = 0。 \tag{20}$$

同理，由式(19)得完备位移模式对应的刚度矩阵(附带荷载项)为：

$$F_{N1} + D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1) + D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_1) = 0,$$

$$F_{N2} - D\frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2) - D\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_2) = 0。 \tag{21}$$

由于已经满足了条件式(16)，两种模式对应的伽辽金方程相同，即式(20)和式(21)相同。比较以上两式得：

$$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}(x_1)=\frac{1}{D}\int_{x_1}^{x_2} fN_{E1}\mathrm{d}x\ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}(x_2)=-\frac{1}{D}\int_{x_1}^{x_2} fN_{E2}\mathrm{d}x\ 。\tag{22}$$

所以，在式(20)中，荷载项与泡函数在端点的导数对应。式(20)与$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}$相关，且$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}$以隐身的方式出现。至此，说明了位移模式与泡函数的相关性。

由于结点位移的求解与$u^{\#}$形式上是无关的假象，精确形函数位移模式求导时不考虑$u^{\#}$，导致了结点的导数精度显著下降。完备位移模式则为$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}$的存在提供了理论依据，而且端点的$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}$就是刚度矩阵的附带荷载项，不需要重新推导。关于端点导数回补的观点是由袁驷等明确提出，并进行了超收敛的计算[3−8]。本文从结点位移的求解与$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}$的相关性论证了回补的必要性。不计端点的$\frac{\mathrm{d}u^{\#}}{\mathrm{d}x}$显然是错误的，回补属于亡羊补牢之策。亡羊而补牢，未为迟也。回补也是举手之劳，何乐不为。

3.2　二次元模式

如果不考虑回补，以上精确形函数位移模式求得的结点的导数精度显著下降。单元内的位移恒为线性函数，显然也是不合理的。为了解决这些问题，人们提出了高次元的方案。下面，以二次元为例，基于完备位移模式，对高次元的方案进行分析和评价。

图3所示三结点二次单元。其位移模式为：

$$u^h=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3\tag{23}$$

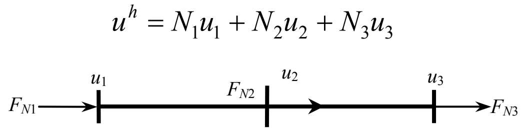

图3　三结点二次单元

Fig.3　Quadratic element of three nodes

二次插值的形函数为：

$$N_1=(2\xi-1)(\xi-1),\ N_2=4\xi(1-\xi)\ ,$$
$$N_3=\xi(2\xi-1)\ 。\tag{24}$$

式中：

$$\xi=\frac{x-x_1}{h}\ ,\ x_2=\frac{x_1+x_3}{2}\tag{25}$$

显然，二次单元的形函数不是精确形函数，当然也不满足伽辽金方程精确成立的条件式(16)。图4为二次单元形函数的函数图像。在二次元的3个形函数中，N_1和N_3相当于精确形函数N_{E1}和N_{E2}的近似。而N_2的功能相当是一个典型的泡函数，u_2是决定泡函数幅值大小的参数。由于有泡函数存在，其导数的精度将得到提高。这也就是人们认为高次元比线性元好的原因。但二次元的泡函数是近似的泡函数。泡函数$\tilde{u}^{\#}$的近似性在于，不管荷载f如何，其泡函数总是二次函数。只有当f为常数时，泡函数$\tilde{u}^{\#}$才是精确的泡函数。

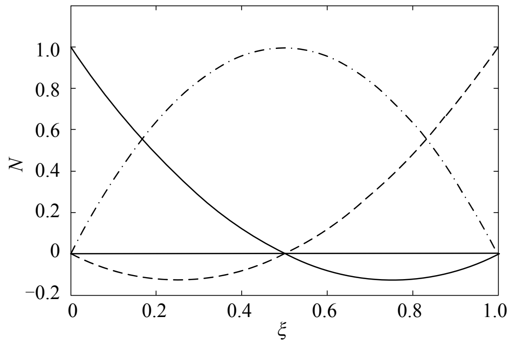

图4　二次单元形函数的函数图像

Fig.4　Shape function image of quadratic element

从以上分析可以看出，C^0问题二次元的方案本质上就是引入了泡函数$u^{\#}$的方案。对于更高次的高次元，应该可以得出相同的结论。高次元的多项式次数提高一次，相对于增加一个内结点。从网格加密的角度来看，与一次元增加一个单元的效果是相同的。而另一方面，高次元增加一个内结点，相当于增加了一个泡函数。

采用高次元，一方面确实能提高结点导数的精度，但另一方面又加大了相对于N_{E1}和N_{E2}的失真。为了解决这一问题，下面将基于完备位移模式，提出一种理性求解泡函数的方法。

4　基于完备位移模式的算法

4.1　泡函数的量级分析

在广义伽辽金方程式(15)中，只有等式右边的项$\int_{x_1}^{x_2} Lu^{*}u^{\#}\mathrm{d}x$与泡函数有关。如果能够求出泡函数，当然是最好的选择。但在大多数情况下，要求出泡函数的解析表达式是困难的。我们的思路不是追求直接求解泡函数的解析表达式，而是将与泡函

数有关的项展开，保留其主要的影响项，略去次要的影响项。

下面将以求解式(1)为例，说明分析泡函数主要影响项的方法。为此，对该右边的项进行如下分部积分的变换：

$$\int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x = u^\# \int Lu^* \mathrm{d}x \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x} \times \int (\int Lu^* \mathrm{d}x)\mathrm{d}x \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}^2 u^\#}{\mathrm{d}x^2} [\int (\int Lu^* \mathrm{d}x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}x \tag{26}$$

将式(7a)、式(7b)代入式(26)得：

$$\int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x} \int (\int Lu^* \mathrm{d}x)\mathrm{d}x \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{k}{D} u^\# - \frac{f - Lu^h}{D} \right) [\int (\int Lu^* \mathrm{d}x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}x \tag{27}$$

在式(27)的右端项中，仍然含有与泡函数有关的项 $\frac{k}{D}u^\#$。下面将对这一项进行量级分析。

引入 $\xi = \frac{x - x_1}{h}$ 对式(27)中的不定积分项 $\int (\int Lu^* \mathrm{d}x)\mathrm{d}x$ 进行变换得：

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[Lu^* - \frac{kh^2}{D} \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \right] u^\# \mathrm{d}x = -h^2 \frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_2} \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_1 + h^2 \frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_1} \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_0 - \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h)[\int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi]\mathrm{d}x \tag{28}$$

在式(28)的第一项中，$\frac{kh^2}{D} \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi$ 是 Lu^* 的 $\frac{kh^2}{D}$ 阶小量。所以，与 Lu^* 相比，$\frac{kh^2}{D} \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi$ 可以略去不计，则式(28)为：

$$\int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x = -h^2 \frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_2} \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_1 + h^2 \frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_1} \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_0 - \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h)[\int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi]\mathrm{d}x \tag{29}$$

按照求式(22)的方法，可以求出：

$$\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_1) = \frac{1}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h) N_1 \mathrm{d}x,$$

$$\frac{\mathrm{d}u^\#}{\mathrm{d}x}(x_2) = -\frac{1}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h) N_2 \mathrm{d}x。$$

将上式代入式(29)得：

$$\int_{x_1}^{x_2} Lu^* u^\# \mathrm{d}x = \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h) N_2 \mathrm{d}x \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_1 + \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h) N_1 \mathrm{d}x \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_0 - \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h)[\int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi]\mathrm{d}x \tag{30}$$

将式(30)代入广义伽辽金方程式(15)得：

$$\int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h) u^* \mathrm{d}x + \left[F_{N1} + D \frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1) \right] u^*(x_1) + \left[F_{N2} - D \frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2) \right] u^*(x_2) = \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h) N_2 \mathrm{d}x \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_1 + \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h) N_1 \mathrm{d}x \int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi \Big|_0 - \frac{h^2}{D} \int_{x_1}^{x_2} (f - Lu^h)[\int (\int Lu^* \mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\xi]\mathrm{d}x \tag{31}$$

与式(15)相比，式(31)的右端项中已经不直接含有与泡函数有关的项，但已经保留泡函数的主要影响项。

4.2 单元分析

对于式(31)，分别取 $u^* = N_1 = 1 - \xi$，$u^* = N_2 = \xi$ 得：

$$h \int_0^1 (f - Lu^h) N_1 \mathrm{d}\xi + F_{N1} + D \frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_1) - \frac{kh^3}{6D} \int_0^1 (f - Lu^h) \xi (1 - \xi)(2 - \xi) \mathrm{d}\xi = 0 \tag{32}$$

$$h \int_0^1 (f - Lu^h) N_2 \mathrm{d}\xi + F_{N2} - D \frac{\mathrm{d}u^h}{\mathrm{d}x}(x_2) - \frac{kh^3}{6D} \int_0^1 (f - Lu^h) \xi (1 - \xi)(1 + \xi) \mathrm{d}\xi = 0 \tag{33}$$

取 u^h 为线性位移模式，由式(32)和式(33)得到矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix} F_{N1} \\ F_{N2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}^e \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \boldsymbol{F}_0 \tag{34}$$

式中：

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{D}{h} \times$$
$$\begin{bmatrix} 1+\frac{k}{3D}h^2\left(\underline{1-\frac{k}{15D}h^2}\right) & -1+\frac{k}{6D}h^2\left(\underline{1-\frac{7k}{60D}h^2}\right) \\ -1+\frac{k}{6D}h^2\left(\underline{1-\frac{7k}{60D}h^2}\right) & 1+\frac{k}{3D}h^2\left(\underline{1-\frac{k}{15D}h^2}\right) \end{bmatrix} \tag{35a}$$

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} h\int_0^1 f(1-\xi)\left[\underline{1-\frac{k}{6D}h^2\xi(2-\xi)}\right]\mathrm{d}\xi \\ h\int_0^1 f\xi\left[\underline{1-\frac{k}{6D}h^2(1-\xi)(1+\xi)}\right]\mathrm{d}\xi \end{bmatrix} \tag{35b}$$

在式(35)中，带下划线的部分表示$u^{\#}$的影响，当h趋于零时，带下划线的部分将趋于零，由式(35a)和式(35b)可得到常规有限元的结果。对比式(35a)、式(35b)和常规有限元结果，可知采用完备位移模式，单元刚度矩阵的精度比采用常规的位移模式提高了 h^2 量级，而计算量并没有本质上的增加。与二次元相比，在线性元的基础上加了一个泡。

5　算例和分析

对于图 1 所示问题，令 D=1，k=1，f=1。该问题的基本方程为：

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+u-1=0,\quad 0<x<1$$

边界条件为：

$$u(0)=0,\ F(1)=0$$

表 1、表 2 分别给出了一次元、二次元和基于完备位移模式单元在 x=1、x=0.5 处的结点位移。表 3 给出了一次元、一次元超收敛计算和本文单元在 x=0.5 处的结点导数。表 4 给出了二次元、二次元超收敛计算和本文单元在 x=0.5 处的结点导数。为了在同一尺度下比较，以结点个数为基准，一个二次元单元相当于两个一次元或本文单元。表 3~表 4 中一次元、二次元及对应超收敛计算结果引自文[4]。本文单元的数值计算的精度为双倍精度，表 3~表 4 的数值结果只显示了 5 位有效数字。N_e为单元数，n 为节点数。

表 1　3 种单元端点的结点位移

Table 1　Endpoint displacement of three kinds of elements

$u(1)$ (精确解=0.35195)										
n	N_e	一次元	e/(%)	N_e	二次元	e/(%)	N_e	本文	e/(%)
3	2	0.35723	1.50×10^{0}	1	0.35159	11.0×10^{-2}	2	0.35181	3.79×10^{-2}
5	4	0.35324	3.68×10^{-1}	2	0.35192	6.30×10^{-3}	4	0.35194	2.30×10^{-3}
9	8	0.35227	9.15×10^{-2}	4	0.35194	3.82×10^{-4}	8	0.35195	1.43×10^{-4}
17	16	0.35203	2.28×10^{-2}	8	0.35195	2.38×10^{-5}	16	0.35195	0.89×10^{-5}

表 2　3 种单元中点的结点位移

Table 2　Mid-span displacement of three kinds of elements

$u(0.5)$ (精确解=0.26924)									
n	N_e	一次元	e/(%)	N_e	二次元	e/(%)	N_e	本文	e/(%)
5	4	0.270254	3.78×10^{-1}	2	0.26922	6.33×10^{-3}	4	0.26923	2.37×10^{-3}
9	8	0.269490	9.39×10^{-2}	4	0.26924	3.92×10^{-4}	8	0.26924	1.47×10^{-4}
17	16	0.269300	2.34×10^{-2}	8	0.26924	2.44×10^{-5}	16	0.26924	0.92×10^{-5}

表 3　一次元和本文单元在 x=0.5 处的结点导数

Table 3　Node derivatives of liner elements and this elements (x=0.5)

$u'(0.5)$ (精确解= 0.33769)								
N_e	一次元左侧	e/(%)	一次元右侧	e/(%)	一次元超收敛	e/(%)	本文	e/(%)
2	0.54678	6.19×10^{1}	0.16768	5.03×10^{1}	0.34235	1.3×10^{0}	0.33758	3.46×10^{-2}
4	0.43460	2.86×10^{1}	0.25024	2.59×10^{1}	0.33866	3.50×10^{-1}	0.33769	2.15×10^{-3}
8	0.38464	1.39×10^{1}	0.29309	1.32×10^{1}	0.33799	9.00×10^{-2}	0.33769	1.34×10^{-4}
16	0.36084	6.85×10^{0}	0.31514	6.68×10^{0}	0.33777	2.10×10^{-2}	0.33769	0.84×10^{-5}

表 4　二次元和本文单元在 x=0.5 处的结点导数

Table 4　Node derivatives of quadratic elements and this elements (x=0.5)

$u'(0.5)$ (精确解= 0.33769)										
n	N_e	二次元左侧	e/(%)	二次元右侧	e/(%)	二次元超收敛	e/(%)	N_e	本文	e/(%)
5	2	0.32737	3.06×10^{0}	0.33356	1.23×10^{0}	0.33771	2.83×10^{-3}	4	0.33769	2.15×10^{-3}
9	4	0.33554	6.40×10^{-1}	0.33631	4.10×10^{-1}	0.3377	1.82×10^{-4}	8	0.33769	1.34×10^{-4}
17	8	0.33721	1.40×10^{-1}	0.33731	1.20×10^{-1}	0.33770	1.15×10^{-5}	16	0.33769	0.84×10^{-5}

从以上计算结果可以看出：

1) 一次元的结点位移达到了h^2阶的收敛精度。二次元和本文单元的结点位移都达到了 h^4 阶的收敛精度，本文的精度比二次元略高。

2) 如果不考虑回补，一次元、二次元结点导数的计算精度与其对应的结点位移精度有明显的下降。考虑回补，即超收敛计算的结点导数精度，一次元达到了 h^2 阶的收敛精度、二次元达到了 h^4 阶的收敛精度。本文的方案已经考虑了回补，结点导数精度达到了 h^4 阶的收敛精度，而且比二次元超收敛精度略高。

本文的方案为一次元与理性泡函数的结合。与考虑回补后的一次元相比，本文的结果达到了 h^4 阶的收敛精度，但计算量并没有本质的增加。二次元和本文单元的结点位移都达到了 h^4 阶的收敛精度。如果不考虑回补，本文的结果显然好于二次元。本文结果与考虑回补后二次元，结点导数都达到了 h^4 阶的收敛精度。与二次元相比，本文单元的精度略高。而且本文的单元为一次元，从样条逼近的角度来看，比二次元的性能好。

6 结论

通过上述研究，可以得出下列几点结论：

(1) 与超收敛计算、变分多尺度方法不同，基于从微分形式到积分形式精确成立，即伽辽金方程残差为零，本文导出了伽辽金方程精确成立时权函数必须满足的条件。为位移模式的分析提供了理论依据。

(2) 在完整的位移模式中，形函数、泡函数身份明确，各负其责。一次元的方案不考虑泡函数的影响，导致了精度的下降。使得一次元通过 h-version 方法提高精度的技术路线受到了限制。二次元的精度高，对于 C^0 问题，相当于加了一个泡函数。对于 n 次的高次元，相当于加了 n–1 个泡函数。显然，过多的泡函数将导致数值振荡。使得高次元通过 p-version 方法提高精度的技术路线受到了限制。

(3) 一次元与泡函数结合的单元方案是 h-version 方法和 p-version 方法结合和平衡。一次元的部分可以通过 h-version 方法提高精度，泡函数的部分保证了相应的精度。基于伽辽金方程精确成立的条件，解决了考虑泡函数影响的问题。本文的结果达到了 h^4 阶的超收敛精度，计算量并没有本质上的增加。理论分析和数值计算表明，本文单元是一个比高次元性能优的单元。

从理论上讲，关于完备位移模式的分析对于二维和三维问题也是适用的。基于完备位移模式的思路已成功地应用于一维 C^0 问题，理论上可以推广到一维其他单元。对于二维问题，可以采用有限线法、有限条法的思路。通过一个方向的离散，将二维问题转化为一维问题求解。按照这一思路，本文的方法可以推广到二维和三维问题。

参考文献：

[1] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimator, part I: the superconvergence patch recovery [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33: 1331－1364.

[2] 陈传淼. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2002: 19－48.
Chen Chuanmiao. Structure theory of supercon- vergence of finite elements [M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2002: 19－48. (in Chinese)

[3] 袁驷. 从矩阵位移法看有限元应力精度的损失与恢复[J]. 力学与实践, 1998, 20(4): 1－6.
Yuan Si. The loss and recovery of stress accuracy in FEM as seen from matrix displacement method [J]. Mechanics and Practice, 1998, 20(4): 1－6. (in Chinese)

[4] 袁驷, 王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2004, 21(2): 1－9.
Yuan Si, Wang Mei. An element-energy-projection method for post-computation of super convergent solutions in one-dimensional FEM [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(2): 1－9. (in Chinese)

[5] 袁驷, 王枚, 和雪峰. 一维 C^1 有限元超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2006, 23(2): 1－9.
Yuan Si, Wang Mei, He Xuefeng. Computation of super convergent solutions in one-dimensional C^1 FEM by EEP method [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(2): 1－9. (in Chinese)

[6] 王玫, 袁驷. Timoshenko 梁单元超收敛结点应力的 EEP 法计算[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(11): 1224－1134.
Wang Mei, Yuan Si. Computation of super-convergent nodal stresses of Timoshenko beam elements by EEP method [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(11): 1224－1134. (in Chinese)

[7] 袁驷, 林永静. 二阶非自伴两点边值问题 Galerkin 有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 计算力学学报, 2007, 24(2): 142－147.
Yuan Si, Lin Yongjing. An EEP method for post-computation of super convergent solutions in one-dimensional Galerkin FEM for second order non-self-adjoint Boundary-Value Problem [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(2): 142－147. (in Chinese)

[8] 袁驷, 王枚, 王旭. 二维有限元线法超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2007, 24(1): 1－10.
Yuan Si, Wang Mei, Wang Xu. An element-energy-projection method for super-convergence solutions in two-dimensional finite element method of lines [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(1): 1－10. (in Chinese)

(参考文献[9]－[15]转第 57 页)

参考文献：

[1] Hopkins H G, Prager W. The load carrying capacities of circular plates [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1953, 2(1): 1－13.

[2] Hopkins H G, Wang A J. Load carrying capacities for circular plates of perfectly-plastic material with arbitrary yield condition [J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1954, 3(2): 117－129.

[3] Ma G W, Hao H, Lwasaki S. Unified plastic limit analyses of circular plates under arbitrary load [J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66(2): 568－570.

[4] Ma G W, Iwasaki S. Plastic analysis of circular plates with respect to unified yield criterion [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1998, 40(10): 963－976.

[5] Charropadhyay J, Dutta B K, Kushwaha H S, et al. Limit load analysis and safety assessment of an elbow with circumferential crack under a bending moment [J]. International Journal of Pressure Vessels & Piping, 1995, 62(2): 109－116.

[6] Save M A. Plastic analysis and design of plates, shells and disks [M]. Amsterdam: North-Holland, 1972: 78－93.

[7] 赵德文, 方琦, 刘相华, 王国栋. 一个与 Mises 轨迹覆盖面积相等的线性屈服条件[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2005, 26(3): 248－251.
Zhao Dewen, Fang Qi, Liu Xianghua, Wang Guodong. A linear yield criterion with equal covered area to Mises yield locus coverage in Haigh Westergard stress space [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2005, 26(3): 248－251. (in Chinese)

[8] 赵德文. 连续体成形力数学解法[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003: 441－465.
Zhao Dewen. Mathematical method of continuous body forming force [M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2003: 441－465. (in Chinese)

[9] Zhao Dewen, Fang Qi, Li Canming. Derivation of plastic specific work rate for equal area yield criterion and its application to rolling [J]. Journal of Iron and Steel Research, International, 2010, 17(4): 34－38.

[10] Yu Maohong. Twin shear stress yield criterion [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1983, 25(1): 71－74.

[11] 刘士光, 张涛. 弹塑性力学基础理论[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2008: 236－239.
Liu Shiguang, Zhang Tao. Basic theory of elasticity and plasticity [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2008: 236－239. (in Chinese)

[12] 卡恰诺夫 L M. 塑性理论基础[M]. 北京: 人民教育出版社, 1983: 132－135.
Kachanov L M. Basic theory of plasticity [M]. Beijing: People's Education Press, 1983: 132－135. (in Chinese)

[13] 徐秉业, 刘信声. 结构塑性极限分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985: 64－80.
Xu Bingye, Liu Xinsheng. Plastic limit analysis of structure [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1985: 64－80. (in Chinese)

(上接第 52 页)

[9] Hughes T J R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods, Comput [J]. Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 127: 387－401.

[10] Hughes T J R, Feijoo G R, Luca M, et al. The variational multiscale method--a paradigm for computational mechanics [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 166: 3－24.

[11] Masud A, Khurram R A. A multiscale/stabilized finite element method for the advection–diffusion equation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193: 1997－2018.

[12] Masud A, Khurram R A. A multiscale finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195: 1750－1777.

[13] Tong P. Exact solution of certain problems by finite-element method [J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1969(7): 178－180.

[14] Luo Jianhui, Liu Guangdong, Shang Shouping. Research on a systematic methodology for theory of elasticity [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(7): 853－862.

[15] Luo Jianhui, Long Yuqiu, Liu Guangdong. A new orthogonality relationship for orthotropic thin plate theory and its variational principle [J]. Science in China Series G-Physics and Astronomy, 2005, 38(3): 371－380.