文章编号: 1000-5641(2012)02-0061-10

涉及微分多项式及例外函数的正规定则

王　雪[1], 刘晓俊[2], 陈巧玉[3]

(1. 阜阳师范学院 数学系, 安徽 阜阳 236041; 2. 上海理工大学 数学系, 上海 200093;
3. 华东师范大学 数学系, 上海 200241)

摘要: 证明了如下的结论: 设 $k \geqslant 2$ 是一个正整数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 上的一族全纯函数, 其中每个函数的零点重级至少是 k, $h(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$ $\cdots$, $a_k(z)$ 是 D 上的不恒为零的全纯函数. 假设下面的两个条件也成立: $\forall f \in \mathcal{F}$, (a) 在 $f(z)$ 的零点处, $f(z)$ 的微分多项式的模小于 $h(z)$ 的模; (b) $f(z)$ 的微分多项式不取 $h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

关键词: 全纯函数; 微分多项式; 正规

中图分类号: O174.5 **文献标识码**: A **DOI**: 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.03.010

Normal criterion concerning differential polynomials and omitted functions

WANG Xue[1], LIU Xiao-jun [2], CHEN Qiao-yu[3]

(1. *Department of Mathematics, Fuyang Normal College, Fuyang Anhui* 236041, *China*;
2. *Department of Mathematics, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai* 200093, *China*;
3. *Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200241, *China*)

Abstract: In this paper, we proved: Let $k \geqslant 2$ be a positive integer, $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic functions, all of whose zeros have multiplicities at least k, and let $h(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$, $\cdots$, $a_k(z)$ are all nonequivalent to 0 on D. If for any $f \in \mathcal{F}$, the following two conditions are satisfied: (a) $f(z) = 0 \Rightarrow |f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)| < |h(z)|$; (b) $f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z) \neq h(z)$, where $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_k(z)$ and f have no common zeros, then $\mathcal{F}$ is normal on D.

Key words: holomorphic function; differential polynomial; normal

0 引　　言

首先引进一些记号. 本文中的区域 $D \subset \mathbb{C}$. 对于 $z_0 \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$, $\Delta(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ 和 $\Delta'(z_0, r) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$. 单位圆记为 Δ. 记在 D 上有 $f_n(z) \overset{\chi}{\Rightarrow} f(z)$ 表示函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 的任意紧子集上按球面距离一致收敛于 $f(z)$. 而 $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ 表示函数

收稿日期: 2011-06-10

基金项目: 上海市优秀青年基金(slg10015); 国家自然科学基金(11071074)

第一作者: 王雪, 女, 硕士研究生. E-mail: fywxue@163.com

列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 的任意紧子集上按欧氏距离一致收敛于 $f(z)$. 用 $\mathcal{H}(D)$ 表示 D 上的所有全纯函数, $\mathcal{M}(D)$ 表示 D 上的所有亚纯函数. $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_k(z)(\not\equiv 0)$ 全纯且与 f 无公共零点, $L_f(z) = f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)$, 称为 f 的微分多项式. $\rho(f)$ 表示 f 的级.

在文献 [1] 中, 庞学诚等证明了如下两条定理.

定理 PYZ1 设 $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{M}(D) |$ 零点重级 $\geqslant k+3,\ k \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}\}, D \subset \mathbb{C}, h(z)(\not\equiv 0) \in \mathcal{H}(D)$. 若对任意 $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)}(z) \neq h(z)$, $z \in D$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

定理 PYZ2 设 $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{M}(D) |$ 零点重级 $\geqslant k+2,\ k \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $D \subset \mathbb{C}, h(z)(\not\equiv 0) \in \mathcal{H}(D)$,所有零点重级 $\geqslant 2$. 若对任意 $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)}(z) \neq h(z)$, $z \in D$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

本文继续研究上述问题, 将零点重级降低到了至少为 k, 并且将 $f^{(k)}(z)$ 改为了关于 $f(z)$ 的一个微分多项式, 得到了如下的结果.

定理 1 设 $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(D) |$ 零点重级 $\geqslant k,\ k \geqslant 2,\ k \in \mathbb{Z}\}, D \subset \mathbb{C}$, $h(z)(\not\equiv 0) \in \mathcal{H}(D)$, 若对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 下面的两个条件成立:

(a) $f(z) = 0 \Rightarrow |f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)| < |h(z)|$,

(b) $f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z) \neq h(z)$,

这里 $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_k(z)(\not\equiv 0) \in \mathcal{H}(D)$ 且与 f 无公共零点, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

下面的反例说明: 当定理 1 中的函数 $a_j(z)$, $j = 1, 2, \cdots, k$ 是亚纯函数时, 结论不成立.

例 1 令 $D = \Delta$ 是单位圆盘, 且 $f_n(z) = nz^k$, $h(z) = \exp z$, 易知 f_n 在 Δ 上全纯且零点的重级为 k, 通过简单计算可得

$$f_n'(z) = knz^{k-1},\ f_n''(z) = k(k-1)nz^{k-2}, \cdots,\ f_n^{(k)}(z) = k!n.$$

取 $a_1(z) = \frac{1}{z}$, $a_2(z) = \frac{1}{z^2}$, $\cdots$, $a_{k-1}(z) = \frac{1}{z^{k-1}}$, $a_k(z) = \frac{c}{z^k}$, 这里 $c = -(k + k(k-1) + \cdots + 2k!)$. 简单计算得,

$$\begin{aligned} L_{f_n}(z) &= f_n^{(k)}(z) + a_1(z)f_n^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f_n(z) \\ &= k!n + k!nz \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{k!}{2!}nz^2 + \cdots + \frac{c}{z^k} \cdot nz^k = 0. \end{aligned}$$

因此, $f_n(z) = 0 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow |L_{f_n}(0)| < |\exp 0|$, 并且 $L_{f_n}(z) \neq \exp z$, 故 $f_n(z)$ 满足定理 1 中的条件 (a) 和(b), 但是 $\mathcal{F} = \{f_n(z)\}$ 在 Δ 上不正规.

注: 目前还不清楚定理 1 中的函数 $h(z)$ 能否改为亚纯函数.

1. 引　　理

引理 1.1 (Pang-Zalcman 引理)[1-3] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘上的亚(全)纯函数族, k 是正整数. $\mathcal{F}$ 中每个函数的零点重级至少为 k, 且存在 $A \geqslant 1$, 使得对任意 $f \in \mathcal{F}$, 在 f 的零点处都有

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant A.$$

如果 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 则对任意 $0 \leqslant \alpha \leqslant k$, 必存在:

(1) 点列 z_n, $z_n \to z_0$; (2) 一列函数 $f_n \in \mathcal{F}$; (3) 一列正数 $\rho_n \to 0$; 使得

$$\frac{f_n(z_n + \rho_n\xi)}{\rho_n^{\alpha}} = g_n(\xi) \to g(\xi)$$

关于球面距离内闭一致收敛, 其中 g 为 $\mathbb{C}$ 上的非常数的亚(全)纯函数且满足

$$g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0) = kA + 1.$$

引理 1.2[4] 设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, 若 $f^{\#}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 则 $\rho(f) \leqslant 2$. 设 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, 若 $f^{\#}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 则 $\rho(f) \leqslant 1$.

引理 1.3 设 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \rho(f) < +\infty$, 零点重级 $\geqslant k$, $k \geqslant 2$, $k \in Z$, $a \neq 0$ 是一常数. 若 $\rho(f) \leqslant 1$ 且满足如下两个条件:

(a) $f(z) = 0 \Rightarrow |f^{(k)}(z)| < |a|$; (b) $f^{(k)}(z) \neq a$;

则 $f(z) = \frac{b(z-z_0)^k}{k!}$, 其中 $z_0 \in \mathbb{C}$, $|b| < |a|$ 是常数.

证 明 情形一: f 是 $\mathbb{C}$ 上的超越整函数. 由 $\rho(f^{(k)}) = \rho(f) \leqslant 1$ 且 $f^{(k)}(z) \neq a$. 则 $f^{(k)}(z) - a = B\exp(Az)$ 其中 $A, B \in \mathbb{C}^*$ 是两个非零常数. 经计算有

$$f(z) = \frac{az^k}{k!} + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_0 + BA^{-k}\exp(Az),$$

其中 $a_{k-1}, \cdots, a_0$ 是常数. 于是, 存在 z_m, $z_m \to \infty$, 使得 $f(z_m) = 0$, $m = 1, 2, \cdots$, 由 f 的零点重级 $\geqslant k(\geqslant 2)$ 的条件, 有 $f'(z_m) = 0$. 令 $P(z) = A^{-1}f'(z) - f(z)$, 知 P 是一多项式且 $P(z_m) = 0$, $m = 1, 2, \cdots$, 则 $P(z) \equiv 0$, 从而 $f(z) = C\exp(Az)$, 其中 $C \neq 0$ 是一个常数, 矛盾.

情形二: f 是 $\mathbb{C}$ 上的多项式. 由 $f^{(k)}(z) \neq a$, 有 $f^{(k)}(z) = b$, 其中 $b \neq a$ 是一个常数. 由 f 的零点重级 $\geqslant k\,(\geqslant 2)$, 则 $f(z) = \frac{b(z-z_0)^k}{k!}$, 其中 $z_0 \in \mathbb{C}$, $|b| < |a|$ 是常数.

引理 1.4 设 $\{f_n |\, f_n \in \mathcal{H}(D),\, D \subset \mathbb{C}$, 零点重级 $\geqslant k\}$, $h_n \in \mathcal{H}(D)$, $h_n(z) \Rightarrow h(z)$ 在 D 上, 其中 $h(z) \neq 0$, $z \in D$, $k \geqslant 2$, $k \in Z$. 若对每个 f_n 满足如下两个条件:

(a) $f_n(z) = 0 \Rightarrow |L_{f_n}(z)| < |h_n(z)|$; (b) $L_{f_n}(z) \neq h_n(z)$,

则 $\{f_n\}$ 在 D 上正规.

证 明 利用反证法, 假设存在 $z_0 \in D$, 使得 $\{f_n\}$ 在 z_0 不正规. 由 $h_n(z) \Rightarrow h(z)$, 则在 z_0 的某个邻域内, 当 n 充分大以后, 有 $f_n(z) = 0 \Rightarrow |L_{f_n}(z)| \leqslant |h(z_0)| + 1$, 因为 f_n 的零点重级 $\geqslant k$, 所以 $f_n^{(j)}(z) = 0, j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$.

利用引理 1.1, 取 $\alpha = k$, $A = |h(z_0)| + 1$. 因此取 $\{f_n\}$ 的适当子列 (重新编号后, 仍记为 $\{f_n\}$), $z_n \to z_0$, $\rho_n \to 0^+$, 使得

$$g_n(\zeta) = \frac{f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n^k} \overset{\chi}{\Rightarrow} g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上, 其中 $g(\zeta)$ 是非常数的整函数, 所有零点重级 $\geqslant k$ 且 $g^{\#}(\zeta) \leqslant g^{\#}(0) = k\,(|h(z_0)|+1)+1$.

断言: 1) $g = 0 \Rightarrow |g^{(k)}| \leqslant |h(z_0)|$; 2) $g^{(k)} \neq h(z_0)$. 分别说明如下.

1) 若存在 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $g(\zeta_0) = 0$. 因为 $g(\zeta) \not\equiv 0$, 从而存在 $\zeta_n \to \zeta_0$, 使得当 n 充分大以后,

$$g_n(\zeta_n) = \frac{f_n(z_n + \rho_n\zeta_n)}{\rho_n^k} = 0,$$

因此 $f_n(z_n + \rho_n\zeta_n) = 0$, 所以 $|L_{f_n}(z_n + \rho_n\zeta_n)| < |h_n(z_n + \rho_n\zeta_n)|$, 即 $|g_n^{(k)}(z_n + \rho_n\zeta_n)| < |h_n(z_n + \rho_n\zeta_n)|$. 因此

$$|g^{(k)}(\zeta_0)| = \lim_{n\to\infty} |g_n^{(k)}(\zeta_n)| \leqslant |h(z_0)|.$$

2) 假设存在 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $g^{(k)}(\zeta_0) = h(z_0)$. 若 $g^{(k)} \equiv h(z_0)$, 我们有 $g^{\#}(0) \leqslant k|h(z_0)|$ 与 $g^{\#}(0) = k(|h(z_0)|+1)+1$ 矛盾. 因此断言成立.

于是, $g^{(k)} \neq h(z_0)$. 存在 $\cup(\zeta_0)$, 使得 $g_n^{(j)}$ 在 $\cup(\zeta_0)$ 内有界. 即 $\exists M > 0$, 使得 $|g_n^{(j)}(\zeta)| \leqslant M$, $\zeta \in \cup(\zeta_0)$. 又 $L_{f_n}(z_n+\rho_n\zeta) = g_n^{(k)}(\zeta) + \rho_n a_1(z_n+\rho_n\zeta)g_n^{(k-1)}(\zeta) + \cdots + \rho_n^k a_k(z_n+\rho_n\zeta)g_n(\zeta)$ 且 $a_j(z_n+\rho_n\zeta) \Rightarrow a_j(z_0)$ 在 $\cup(\zeta_0)$ 内. 所以

$$L_{f_n}(z_n+\rho_n\zeta) - h_n(z_n+\rho_n\zeta) \Rightarrow g^{(k)}(\zeta) - h(z_0).$$

则由 Hurwitz 定理, 当 n 充分大以后, 存在 ζ_n, $\zeta_n \to \zeta_0$, 使得 $L_{f_n}(z_n+\rho_n\zeta_n) - h_n(z_n+\rho_n\zeta_n) = 0$, 矛盾, 断言得证.

由引理 1.3, $g(\zeta) = \frac{b(\zeta-\zeta_0)^k}{k!}$, 其中 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $|b| \leqslant |h(z_0)|$. 因为 $g(\zeta_0) = 0$, $|g^{(k)}(\zeta_0)| < |h(z_0)|$, 有 $g^{\#}(0) = k|b| \leqslant k|h(z_0)|$, 与 $g^{\#}(0) = k(|h(z_0)|+1)+1$, 矛盾.

引理 1.5 设 $h \in \mathcal{H}(D)$, z_0 是 $h(z)$ 的重级为 $l(\geqslant 1)$ 的零点, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个函数列, 使得 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 h 满足定理 1 的条件, 令 $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列非零数, 使得 $\rho_n \to 0, n \to \infty$. 则

(a) $\left\{\frac{f_n(z_0+\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+l}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上正规.

另外, 在 $\mathbb{C}^*$ 上 (或在 $\mathbb{C}$), 若 $\frac{f_n(z_0+\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+l}} \Rightarrow G(\zeta)$, 其中 $G(\zeta) \not\equiv 0$, 则

(b) (i) 对任意 $\zeta_0 \in \mathbb{C}^*$ (或任意 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$), $G(\zeta_0) = 0 \Rightarrow |G^{(k)}(\zeta_0)| \leqslant |\zeta_0^l|$;

(ii) 若 $G^{(k)}(\zeta) \not\equiv \zeta^l$, 则 $G^{(k)}(\zeta) \neq \zeta^l$.

证 明 不失一般性, 假设 $z_0 = 0$, 在 0 的邻域 $\Delta(0,\delta)$ 内 $h(z) = z^l b(z)$, 其中 $b(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $b(0) \neq 0$, 且 $b(z) \neq 0$, $z \in \Delta(0,\delta)$, 不失一般性假设 $b(0) = 1$. 定义 $r_n(\zeta) = \zeta^l b(\rho_n\zeta)$,

下面将证明 $\left\{G_n(\zeta) = \frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+l}}\right\}$ 和 $\{r_n(\zeta)\}$ 满足引理 1.4 的条件.

首先有 $r_n(\zeta) \Rightarrow \zeta^l$ 且 $\zeta^l \neq 0$ 在 $\mathbb{C}^*$. 假设 $G_n(\zeta) = 0$, 因此 $f_n(\rho_n\zeta) = 0$ 和 $|f_n^{(k)}(\rho_n\zeta)| < |(\rho_n\zeta)^l b(\rho_n\zeta)|$, 得 $|G_n^{(k)}(\zeta)| < |r_n(\zeta)|$. 由 $f_n^{(k-i)}(\rho_n\zeta) = \rho_n^l\rho_n^i G_n^{(k-i)}(\zeta)$, $i = 0,1,\cdots,k$, 则 $L_{f_n}(\rho_n\zeta) = \rho_n^l[G_n^{(k)}(\zeta) + \rho_n a_1(\rho_n\zeta)G_n^{(k-1)}(\zeta) + \cdots + \rho_n^k a_k(\rho_n\zeta)G_n(\zeta)] \neq h(\rho_n\zeta) = (\rho_n\zeta)^l b(\rho_n\zeta)$. 则 $L_{G_n}(\zeta) \neq \zeta^l b(\rho_n\zeta) = r_n(\zeta)$. 则 (a) 得到证明.

假设 $G(\zeta_0) = 0$, 又因为 $G(\zeta) \not\equiv 0$, 则存在 $\zeta_n \to \zeta_0$, 使得 $G_n(\zeta_n) = 0$, 即 $f_n(\rho_n\zeta_n) = 0$. 则 $|f_n^{(k)}(\rho_n\zeta_n)| < |(\rho_n\zeta_n)^l b(\rho_n\zeta_n)|$, 即 $|G_n^{(k)}(\zeta_n)| < |\zeta_n^l b(\rho_n\zeta_n)|$. 令 $n \to \infty$, $|G_n^{(k)}(\zeta_0)| \leqslant |\zeta_0^l|$, 则 (b) 的 (i) 得到证明.

下证 (ii), 首先注意到

$$\zeta^l \frac{L_{f_n}(\rho_n\zeta)}{h(\rho_n\zeta)} = \frac{L_{f_n}(\rho_n\zeta)}{\rho_n^l b(\rho_n\zeta)} = \frac{G_n^{(k)}(\zeta) + \rho_n a_1(\rho_n\zeta)G_n^{(k-1)}(\zeta) + \cdots + \rho_n^k a_k(\rho_n\zeta)G_n(\zeta)}{b(\rho_n\zeta)} \overset{\chi}{\Rightarrow} G^{(k)}(\zeta), \tag{1}$$

其中 $G_n(\zeta), \cdots, G_n^{(k-1)}$ 在 ζ_0 的邻域内有界. 又因为 $G^{(k)}(\zeta_0) = \zeta_0^l$, 而 $G^{(k)}(\zeta) \not\equiv \zeta^l$. 则由式 (1), 存在 $\zeta_n \to \zeta_0$, 使得 $L_{f_n}(\rho_n\zeta_n) = [\rho_n^l b(\rho_n\zeta_n)]\zeta_n^l = h(\rho_n\zeta_n)$, 矛盾.

2. 定理 1 的证明

根据引理 1.4, $\mathcal{F}$ 在 $\{z \in D : h(z) \neq 0\}$ 正规 (所以 $\mathcal{F}$ 在 D 内拟正规). 考虑 $z_0 \in D$, 使得 $h(z_0) = 0$. 不失一般性可以假设 $z_0 = 0$ 则

$$h(z) = z^l b(z), \tag{2}$$

其中 $(l \geqslant 1, l \in Z)$, $b(z) \neq 0$, $b(z) \in \mathcal{H}(\Delta(0,\delta))$. 我们可以假设 $b(0) = 1$. 取 $\{f_n\}_1^{\infty} \subset \mathcal{F}$, 下面证明 $\{f_n\}$ 在 $z = 0$ 处正规.

利用反证法, 假设 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处不正规. 因为 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(0,\delta)$ 内正规. 选子列重新编号后, 可以假设在 $\Delta'(0,\delta)$ 上, $f_n \Rightarrow F$. 若 $F \not\equiv \infty$, 则 $F(z)$ 是解析函数, 利用最大模原理, F 可以解析开拓到 $z=0$. 所以在 $\Delta(0,\delta)$ 上, $f_n \Rightarrow F$ 与假设矛盾. 因此假设在 $\Delta'(0,\delta)$ 上,

$$f_n \Rightarrow \infty. \tag{3}$$

定义 $\mathcal{F}_1=\left\{F_n=\frac{f_n}{h},\, n\in\mathbb{N}\right\}$, 证 $\mathcal{F}_1$ 在 $\Delta(0,\delta)$ 上正规即可.

事实上, (重新编号后) 若在 $\Delta(0,\delta)$ 上, $\frac{f_n(z)}{h(z)} \Rightarrow H(z)$. 因为在 $\Delta'(0,\delta)$ 上, $h(z)\neq 0$. 利用式 (3), 在 $\Delta'(0,\delta)$ 上有 $H(z)\equiv\infty$. 由唯一性, 在 $\Delta(0,\delta)$ 上, $H(z)\equiv\infty$. 特别是, 当 n 充分大以后, 有 $\frac{f_n}{h}\neq 0$. 因为在 $\Delta'(0,\delta)$ 上 $h\neq 0$, 从而在 $\Delta'(0,\delta)$ 上 $f_n\neq 0$. 又根据定理的假设, 对 $n\geqslant 1$, 有 $f_n(0)\neq 0$. 因此当 n 充分大以后, 在 $\Delta(0,\delta)$ 的每个紧子集上, 有 $f_n(z)\neq 0$. 利用最小模原理结合式 (3), 会得出在 $\Delta(0,\delta)$ 上, $f_n\Rightarrow\infty$. 从而得出 $\mathcal{F}$ 是正规.

假设 $\mathcal{F}_1$ 在 $z=0$ 处不正规. 由于对任意的 $F_n=\frac{f_n}{h}$, 显然 F_n 的零点重数至少为 k, 并且 $F_n=0 \Longrightarrow f_n=0 \Longrightarrow f_n^{(j)}=0$, $|f_n^{(k)}|<|h|$, $j=0,1,2\cdots,k-1 \Longrightarrow |F_n^{(k)}|=|f_n^{(k)}/h|<1$, 所以由引理 1.1 (重新编号后) 存在 $z_n\to 0, \rho_n\to 0^+$, 和 $\mathbb{C}$ 上的不恒为常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 使得在 $\mathbb{C}$ 上

$$g_n(\zeta)=\frac{F_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}=\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)\rho_n^k}\overset{\chi}{\Rightarrow} g(\zeta), \tag{4}$$

$g(\zeta)$ 的零点重级 $\geqslant k$, 并且

$$g^\sharp(\zeta)\leqslant g^\sharp(0)=k+1, \quad \zeta\in\mathbb{C}, \tag{5}$$

重新编号后我们可以假设 $\left\{\frac{z_n}{\rho_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 分为两种情况.

情况 A:

$$\frac{z_n}{\rho_n}\to\infty. \tag{6}$$

断言: 1) $g(\zeta)=0 \Longrightarrow |g^{(k)}(\zeta)|\leqslant 1$;　2) $g^{(k)}(\zeta)\neq 1$.

证明断言, 注意到式 (4) 和在 $\Delta'(0,\delta)$ 上 $h(z)\neq 0$. 则 g 是 $\mathbb{C}$ 上的整函数. 若 $g(\zeta_0)=0$, 因为 $g(\zeta)\not\equiv 0$, 则存在 ζ_n, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得 $g_n(\zeta_n)=0$. 因此 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$, 由假设条件有, $f_n^{(j)}(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$, $j=1,2,\cdots,k-1$, $|L_{f_n}(z_n+\rho_n\zeta_n)|<|h_n(z_n+\rho_n\zeta_n)|$, 即 $|f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta_n)|<|h(z_n+\rho_n\zeta_n)|$, 因此 $|g_n^{(k)}(\zeta_n)|<1$, 令 $n\to\infty$, 得 $|g^{(k)}(\zeta_0)|\leqslant 1$.

若存在 $\zeta_0\in\mathbb{C}$, 使得 $g^{(k)}(\zeta_0)=1$. 由于 $g^{(k)}\not\equiv 1$ (否则与 $g^{\#}(0)$ 矛盾), 则在 ζ_0 的一个邻域内 $U(\zeta_0)$, 当 n 充分大以后, 有 $g_n^{(j)}$ 在 U 内是解析的, $j=0,1,2,\cdots,k$. 注意到

$$\begin{aligned}
\rho_n^i g_n^{(k-i)}(\zeta)=F_n^{(k-i)}(z_n+\rho_n\zeta)&=\left.\left(\frac{f_n(z)}{h(z)}\right)^{(k-i)}\right|_{z=z_n+\rho_n\zeta}\\
&=\left.\left[\frac{f_n^{(k-i)}(z)}{h(z)}+\sum_{j=1}^{k-i}\binom{k-i}{j}f_n^{(k-i-j)}(z)\left(\frac{1}{h(z)}\right)^{(j)}\right]\right|_{z=z_n+\rho_n\zeta}, \ i=0,1,2,\cdots,k.
\end{aligned}$$

而

$$f_n^{(k-j)}(z)=[F_n(z)h(z)]^{(k-j)}=\sum_{s=0}^{k-j}\binom{k-j}{s}\rho_n^{j+s}g_n^{(k-j-s)}\left(\frac{z-z_n}{\rho_n}\right)h^{(s)}(z),$$

$$\left(\frac{1}{h(z)}\right)^{(j)}=[z^{-l}\widetilde{b}(z)]^{(j)}=z^{-l-j}[(-1)^j l(l+1)\cdots(l+j-1)\widetilde{b}(z)+P(z)],$$

其中 $\widetilde{b}(z)=\frac{1}{b(z)}$, $P(z)\in\mathcal{H}(\Delta(0,\delta)), P(0)=0$. 因为在 U 上,

$$\begin{aligned}\rho_n^{j+s}h(z)^{(s)}z^{-l-j}\Big|_{z=z_n+\rho_n\zeta} &= \rho_n^{j+s}z^{l-s}Q(z)z^{-l-j}\big|_{z=z_n+\rho_n\zeta}\\ &= \frac{\rho_n^{j+s}}{(z_n+\rho_n\zeta)^{j+s}}Q(z_n+\rho_n\zeta)\Rightarrow 0,\end{aligned}$$

其中 $Q(z)\in\mathcal{H}(\Delta(0,\delta)), Q(0)=l(l-1)\cdots(l-s+1)\neq 0$. 在 U 上有

$$\begin{aligned}f_n^{(k-j)}(z)\left(\frac{1}{h(z)}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=z_n+\rho_n\zeta} &= \sum_{s=0}^{k-j}\tbinom{k-j}{s}\rho_n^{j+s}g_n^{(k-j-s)}\left(\frac{z-z_n}{\rho_n}\right)h^{(s)}(z)\\ &\quad\cdot z^{-l-j}[(-1)^j l(l+1)\cdots(l+j-1)\widetilde{b}(z)+P(z)]\Big|_{z=z_n+\rho_n\zeta}\\ &\Rightarrow 0.\end{aligned}$$

在 U 有

$$\begin{aligned}&\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}\Rightarrow g^{(k)}(\zeta),\\ &\frac{f_n^{(k-i)}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}=\rho_n^i g_n^{(k-i)}(\zeta)-\sum_{j=1}^{k-i}\tbinom{k-i}{j}f_n^{(k-i-j)}(z)\left(\frac{1}{h(z)}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=z_n+\rho_n\zeta}\\ &\qquad\Rightarrow 0,\quad i=1,2,\cdots,k.\end{aligned}$$

所以 U 上有 $\frac{L_{f_n}(z_n+\rho_n\zeta)}{h(z_n+\rho_n\zeta)}\Rightarrow g^{(k)}(\zeta)$. 因此存在 ζ_n, $\zeta_n\to\zeta_0$, 使得 $\frac{L_{f_n}(z_n+\rho_n\zeta_n)}{h(z_n+\rho_n\zeta_n)}=1$, 即

$$L_{f_n}(z_n+\rho_n\zeta_n)=h(z_n+\rho_n\zeta_n), \tag{7}$$

与定理条件矛盾, 断言得证.

由引理 1.3, $g(\zeta)=\frac{b}{k!}(\zeta-\zeta_0)^k$, $\zeta_0\in\mathbb{C}, b\neq 1$ 是常数. 因为 $g(\zeta_0)=0$, $|g^{(k)}(\zeta_0)|=|b|\leqslant 1$, 有 $g^{\sharp}(0)\leqslant k|b|\leqslant 1$, 与 $g^{\sharp}(0)=k+1$ 矛盾.

情况 B:

$$\frac{z_n}{\rho_n}\to\alpha\in\mathbb{C}. \tag{8}$$

同前面有: 在 $\mathbb{C}$ 上, $g(\zeta)=0\Longrightarrow|g^{(k)}(\zeta)|\leqslant 1$. 令 $G_n(\zeta)=\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+l}}$, 由 (4) 式和 (8) 式, 在 $\mathbb{C}$ 上有 $G_n(\zeta)\Rightarrow G(\zeta)=g(\zeta-\alpha)\zeta^l$. 事实上,

$$\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{k+l}}=\frac{f_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n^k h(\rho_n\zeta)}\cdot\frac{h(\rho_n\zeta)}{\rho_n^l}=\frac{f_n(z_n+\rho_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n^k h(z_n+\rho_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n}))}\cdot\frac{(\rho_n\zeta)^l b(\rho_n\zeta)}{\rho_n^l},$$

$\zeta=-\alpha$ 是 g 的 l 重极点, 并且

$$G(0)\neq 0,\infty. \tag{9}$$

下面根据 G 的性质分情况讨论.

情况(B1) 如果 G 是一个多项式, 因为 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 点不正规, 则存在一非零点列 $z_n^*\to 0$, 使得

$$f_n(z_n^*)=0. \tag{10}$$

否则, 存在某个 $\delta', 0 < \delta' < \delta$ 使得在 $\Delta(0, \delta')$ 内 $f_n(z) \neq 0$, 那么因为在 $\Delta'(0, \delta)$ 内 $f_n(z) \Rightarrow \infty$, 根据最大模原理可得, 在 $\Delta(0, \delta')$ 内 $f_n(z) \Rightarrow \infty$, 与 $\{f_n\}$ 在 $z = 0$ 点不正规矛盾. 因 $G(\zeta)$ 是多项式, 根据引理 1.5 和式 (9) 可知, $G(\zeta)$ 的所有零点重级至少为 k. 下面分两种情况讨论.

情况(B1.1)　$G^{(k)}(\zeta) \equiv \zeta^l$. 由于 $k \geqslant 2$, 可得

$$G^{(k-1)}(\zeta) = \frac{\zeta^{l+1}}{l+1} + C, \quad G^{(k-2)}(\zeta) = \frac{\zeta^{l+2}}{(l+1)(l+2)} + C\zeta + D,$$

其中 C, D 是两个常数. 因为 G 的所有零点重级至少为 k, 所以对于 G 的任意零点 ζ_j, 可以得出 $G^{(k-1)}(\zeta_j) = G^{(k-2)}(\zeta_j) = 0$. 即

$$\frac{\zeta_j^{(l+1)}}{l+1} + C = 0, \qquad \frac{\zeta_j^{(l+2)}}{(l+1)(l+2)} + C\zeta_j + D = 0, \tag{11}$$

通过计算可得, $\frac{(l+1)C}{l+2}\zeta_j = D$. 若 $CD = 0$, 那么根据式 (11), $\zeta_j = 0$, 矛盾. 因此 $CD \neq 0$, 可得 $\zeta_j = -\frac{(l+2)D}{(l+1)C}$, 这说明 G 只有唯一一个零点 ζ_0. 因此

$$G(\zeta) = \frac{l!(\zeta - \zeta_0)^{k+l}}{(k+l)!}. \tag{12}$$

由于 $G^{(k)} \equiv \zeta^l$, $\zeta_0 = 0$, 矛盾.

情况(B1.2)　$G^{(k)}(\zeta) \not\equiv \zeta^l$. 根据引理 1.5 可得,

$$G(\zeta) = 0 \Rightarrow |G^{(k)}(\zeta)| \leqslant |\zeta^l|, \quad G^{(k)} \neq \zeta^l.$$

所以, G 是一个非常数的多项式, 且 $G^{(k)}(\zeta) = \zeta^l + B$, 其中 B 是一个非零常数. 由于 G 的所有零点重级至少为 k, 对于 G 的任意零点 ζ_j, $G^{(k-1)}(\zeta_j) = G^{(k-2)}(\zeta_j) = 0$. 因此

$$\frac{\zeta_j^{(l+1)}}{l+1} + B\zeta_j + C = 0, \qquad \frac{\zeta_j^{(l+2)}}{(l+1)(l+2)} + \frac{B\zeta_j^2}{2} + C\zeta_j + D = 0. \tag{13}$$

通过计算可得,

$$\frac{lB}{2(l+2)}\zeta_j^2 + \frac{C(l+1)}{l+2}\zeta_j + D = 0,$$

由此可知 G 的至多有两个零点 ζ_1, ζ_2.

下面再根据零点的情况分两种情况讨论.

情况(B1.2a)　G 只有一个零点 ζ_1. 令

$$G(\zeta) = \frac{l!}{(k+l)!}(\zeta - \zeta_1)^{k+l}, \tag{14}$$

由 $G^{(k)}(\zeta) = \zeta^l + B$, 可推出 $l = 1$, $\zeta_1 = -B$. 所以

$$G(\zeta) = \frac{(\zeta + B)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{15}$$

根据 Hurwitz 定理, 存在点列 $\zeta_{n,0} \to -B$, 使得 $G_n(\zeta_{n,0}) = 0$.

(a1) 存在$\delta', 0 < \delta' < \delta$, 使得对每个$n$, 在$\Delta(0,\delta')$内$f_n(z)$只有一个零点$z_{n,0} = \rho_n\zeta_{n,0}$. 令$H_n(z) = \frac{f_n(z)}{(z-z_{n,0})^{k+1}}$, 因为$H_n(z)$在$\Delta'(0,\delta')$内不为零且$H_n(z) \Rightarrow \infty$,根据最大模原理可以推出, 在$\Delta(0,\delta')$内$H_n(z) \Rightarrow \infty$. 但是

$$H_n(2z_{n,0}) = \frac{f_n(2z_{n,0})}{z_{n,0}^{k+1}} = \frac{G_n(2\zeta_{n,0})}{\zeta_{n,0}^{k+1}} \to \frac{1}{(k+1)!}, \tag{16}$$

矛盾.

(a2) 对每个$\delta' > 0$, n充分大时, f_n在$\Delta(0,\delta')$内至少有两个零点, 则存在另外一个点列$z_{n,1} = \rho_n\zeta_{n,1} \to 0$, 其中$z_{n,1}$也是$f_n(z)$的零点, 且$n \to \infty$时, $\zeta_{n,1} \to \infty$, 并设$z_{n,1}$是$f_n(z)$的零点中除$z_{n,0}$外距离原点最近的, $c_n = \frac{z_{n,0}}{z_{n,1}}$, 令$K_n(\zeta) = \frac{f_n(z_{n,1}\zeta)}{z_{n,1}^{k+1}}$, 根据引理1.5知, $\{K_n(\zeta)\}$在$\mathbb{C}^*$上正规.

若$\{K_n\}$在$\zeta=0$点正规, 假设从$\{K_n\}$中可取出收敛子列$\{K_n(\zeta)\}$, 在$\mathbb{C}$上有$\{K_n(\zeta)\} \Rightarrow K(\zeta)$. 因为$K_n(c_n) = 0$, $c_n \to 0$, 令$n \to \infty$, 可得$K(0) = 0$. 因为

$$\begin{aligned} L_{f_n}(z_{n,1}\zeta) &= z_{n,1}[K_n^{(k)}(\zeta) + z_{n,1}a_1(z_{n,1}\zeta)K_n^{(k-1)}(\zeta) + \cdots + z_{n,1}^k a_k(z_{n,1}\zeta)K_n(\zeta)] \\ &\neq h(z_{n,1}\zeta) = (z_{n,1}\zeta)b(z_{n,1}\zeta), \end{aligned}$$

所以$L_{K_n}(\zeta) \neq \zeta b(z_{n,1}\zeta) = r_n(\zeta)$, 从而有$K^{(k)}(\zeta) \equiv \zeta$, 或$K^{(k)}(\zeta) \neq \zeta$.

若$K^{(k)}(\zeta) \equiv \zeta$, 因为$K(0) = 0$, 可以得出 $K(\zeta) = \frac{\zeta^{k+1}}{(k+1)!}$, 这与$K(1) = 0$. 若$K^{(k)}(\zeta) \neq \zeta$. 根据引理1.5可得, $K(\zeta) = 0 \Rightarrow |K^{(k)}(\zeta)| \leqslant |\zeta|$, 那么有$K^{(k)}(0) = 0$, 矛盾.

因此我们可以推出$\{K_n\}$在$\zeta = 0$点不正规. 又由于在$\mathbb{C}^*$上$K_n(\zeta) \Rightarrow \infty$, 但是$K_n(1) = 0$, 矛盾.

情况(B1.2 b) G恰好有两个零点ζ_1, ζ_2. 由$G^{(k+1)} = l\zeta^{l-1}$可知, G的两个零点重级都不超过$k+2$. 若G的这两个零点重级都恰为$k+1$, 可以假设

$$G(\zeta) = \frac{l!}{(k+l)!}(\zeta-\zeta_1)^{k+1}(\zeta-\zeta_2)^{k+1}. \tag{17}$$

由于$G^{(k)}(\zeta) = \zeta^l + B$, 通过计算可得, $l = k+2$, $\zeta_1 + \zeta_2 = 0$, $\zeta_1\zeta_2 = 0$, 矛盾.

若G只有一个零点恰好为$k+1$重, 则可假设

$$G(\zeta) = \frac{l!}{(k+l)!}(\zeta-\zeta_1)^{k+1}(\zeta-\zeta_2)^{k}. \tag{18}$$

由式(18), $G(\zeta) = \frac{l!}{(k+l)!}(\zeta-\zeta_1)\left[\zeta^{2k} - k(\zeta_1+\zeta_2)\zeta^{2k-1} + (k\zeta_1\zeta_2 + \binom{k}{2}(\zeta_1+\zeta_2)^2)\zeta^{2k-2} + \cdots\right]$, $G^{(k)}(\zeta) = \zeta^l + B$, 通过计算可得,

$$l = k+1,\ k(\zeta_1+\zeta_2) + \zeta_1 = 0,\ k(\zeta_1+\zeta_2) + k\zeta_1\zeta_2 + \zeta + \binom{k}{2}(\zeta_1+\zeta_2)^2 = 0 \tag{19}$$

这说明$\zeta_1 = 0$, 矛盾.

若G的两个零点均恰好为k重, 则可假设

$$G(\zeta) = \frac{l!}{(k+l)!}(\zeta-\zeta_1)^{k}(\zeta-\zeta_2)^{k}. \tag{20}$$

由于$G^{(k)}(\zeta) = \zeta^l + B$, 通过计算可得$l = k$, $\zeta_1 + \zeta_2 = 0$.

当 $k \geqslant 3$ 时, 有 $\zeta_1\zeta_2 = 0$, 矛盾.

当 $k = 2$ 时, 有

$$G(\zeta) = \frac{1}{12}(\zeta - \zeta_1)^2(\zeta + \zeta_1)^2. \tag{21}$$

根据 Hurwitz 定理, 存在点列 $\zeta_{n,1} \to \zeta_1$, $\zeta_{n,2} \to -\zeta_1$, 使得 $G_n(\zeta_{n,j}) = 0$, $j = 1, 2$.

若存在 $\delta', 0 < \delta' < \delta$, 使得对每个 n, 在 $\Delta(0, \delta')$ 内 $f_n(z)$ 只有两个零点 $z_{n,j} = \rho_n\zeta_{n,j}$, $j = 1, 2$. 令

$$H_n(z) = \frac{f_n(z)}{(z - z_{n,1}^2)^2(z - z_{n,2}^2)^2},$$

因为 $H_n(z)$ 在 $\Delta(0, \delta')$ 内非零且解析, 在 $\Delta'(0, \delta')$ 内 $H_n(z) \Rightarrow \infty$, 根据最大模原理可以推出, 在 $\Delta(0, \delta')$ 内 $H_n(z) \Rightarrow \infty$. 但是,

$$H_n(2z_{n,1}) = \frac{f_n(2z_{n,1})}{z_{n,1}^2(2z_{n,1} - z_{n,2})^2} = \frac{G_n(2\zeta_{n,1})}{\zeta_{n,1}^2(2\zeta_{n,1} - \zeta_{n,2})^2} \to \frac{1}{12}, \tag{22}$$

矛盾.

因此我们可以假设对每个 $\delta' > 0$, n 充分大时, f_n 在 $\Delta(0, \delta')$ 内至少有三个零点, 则存在另外一个点列, $z_{n,3} = \rho_n\zeta_{n,3} \to 0$, 其中 $z_{n,3}$ 也是 $f_n(z)$ 的一个零点, 且 $n \to \infty$ 时, $\zeta_{n,3} \to \infty$, 并设 $z_{n,3}$ 是 $f_n(z)$ 的零点中除 $z_{n,j}, j = 1, 2$ 外距离原点最近的, $c_{n,j} = \frac{z_{n,j}}{z_{n,3}}, j = 1, 2$, 令

$$K_n(\zeta) = \frac{f_n(z_{n,3}\zeta)}{z_{n,3}^4},$$

根据引理 1.5 知, $\{K_n(\zeta)\}$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上正规. 若 $\{K_n\}$ 在 $\zeta = 0$ 点正规, 假设从 $\{K_n\}$ 中可取出收敛子列 $\{K_n(\zeta)\}$, 在 $\mathbb{C}$ 上有 $\{K_n(\zeta)\} \Rightarrow K(\zeta)$. 因为 $K_n(c_{n,j}) = 0, c_{n,j} \to 0$, 令 $n \to \infty$ 可得 $K(0) = 0$. 由于

$$\begin{aligned} L_{f_n}(z_{n,3}\zeta) &= z_{n,3}^2[K_n''(\zeta) + z_{n,3}a_1(z_{n,3}\zeta)K_n'(\zeta) + z_{n,3}^2a_2(z_{n,3}\zeta)K_n(\zeta)] \\ &\neq h(z_{n,3}\zeta) = (z_{n,3}\zeta)^2b(z_{n,3}\zeta), \end{aligned}$$

即 $L_{k_n}(\zeta) \neq \zeta^2b(z_{n,3}\zeta)$, 则 $K''(\zeta) \equiv \zeta^2$, 或 $K''(\zeta) \neq \zeta^2$.

若 $K''(\zeta) \equiv \zeta^2$, 因为 $K(0) = 0$, 可以得出, $K(\zeta) = \frac{\zeta^4}{12}$, 这与 $K(1) = 0$矛盾!

若 $K''(\zeta) \neq \zeta^2$, 根据引理 1.5 可得, $K(\zeta) = 0 \Rightarrow |K''(\zeta)| \leqslant |\zeta^2|$, 那么有 $K''(0) = 0$, 矛盾.

因此我们可以推出 $\{K_n\}$ 在 $\zeta = 0$ 点不正规. 由于 $\{K_n\}$ 在 Δ 上全纯, 在 $\mathbb{C}^*$ 上 $K_n(\zeta) \Rightarrow \infty$, 但是 $K_n(1) = 0$, 矛盾.

情况 (B2) 若 G 是一个超越整函数, 根据引理 1.5 可得,

$$G(\zeta) = 0 \Rightarrow |G^{(k)}(\zeta)| \leqslant |\zeta^l|, \quad G^{(k)} \neq \zeta^l, \tag{23}$$

由于 G 为级不超过 1 的超越整函数,

$$G^{(k)}(\zeta) = \zeta^l + B\exp(A\zeta), \tag{24}$$

其中 $A \neq 0, B \neq 0$ 为常数, 则

$$G(\zeta) = \frac{l!}{(k+l)!}\zeta^{k+l} + a_{k-1}\zeta^{k-1} + \cdots + a_0 + BA^{-k}\exp(A\zeta). \tag{25}$$

显然, G 在 $\mathbb{C}$ 上有无穷多零点 ζ_m. 当 $m\to\infty$ 时, $\zeta_m\to\infty$. 由式 (24) 知,

$$|G^{(k)}(\zeta_m)|=|\zeta_m+B\exp(A\zeta_m)|\leqslant|\zeta_m^l|,$$

故存在 $M>0$, 对每个 m, $\left|\frac{\exp(A\zeta_m)}{\zeta_m^l}\right|\leqslant M$. 但是, 当 $m\to\infty$ 时,

$$\left|\frac{G(\zeta_m)}{\zeta_m^l}\right|=\left|\frac{l!}{(k+l)!}\zeta_m^k+a_{k-1}\zeta_m^{k-1-l}+\cdots+a_0\zeta_m^{-l}+\frac{BA^{-k}\exp(A\zeta_m)}{\zeta_m^l}\right|\to\infty,$$

矛盾. 定理得证.

[参 考 文 献]

[1] PANG X C, YANG D G, ZALCMAN L. Normal families of meromorphic functions whose derivative omit a function [J]. Comput Methods Funct, 2002(2): 257-265.

[2] LIU X J, NEVO S. A criterion of normality based on a single holomorphic function [J]. Acta Math Sinica, 2011(27): 141-145.

[3] ZALCMAN. L. Normal families: new perspectives [J]. Bull Ameri Math Soc, 1998(35): 215-230.

[4] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

(上接第 48 页)

[11] BENSON D, WHEATCRAFT S, MEERSCHAERT M. Application of a fractional advection-dispersion equation[J]. Water Resources Research, 2000, 36(2): 1403-1412.

[12] CLARKE D D, MEERSCHAERT M M, WHEATCRAFT S W. Fractal travel time estimates for dispersive contaminants[J]. Ground Water, 2005, 43(3): 1-8.

[13] BAEUMER B, MEERSCHAERT M M, BENSON D A, et al. Subordinated advection-dispersion equation for contaminant transport[J]. Water Resources Research, 2001, 37(6): 1543-1550.

[14] BENSON D A, TADJERAN C, MEERSCHAERT M M, et al. Radial fractional-order dispersion through fractured rock[J]. Water Resources Research, 2004, 40(12): 1-9.

[15] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[M]. [S.L]: Academic Press, 1999.

[16] ZHANG Y. A finite difference method for fractional partial differential equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(2): 524-529.

[17] DING Z Q, XIAO A G, LI M. Weighted finite difference methods for a class of space fractional partial differential equations with variable coefficients[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 233(8): 1905-1914.