文章编号: 1000-5641(2012)03-0001-05

图的最小Q-特征值

何常香, 周 敏

(上海理工大学 理学院, 上海 200093)

摘要: 证明了, 若连通图G不是二部图, 则其最小Q-特征值$q(G) \geqslant \frac{1}{n(D+1)}$, 其中$D$是$G$的直径. 另外, 还给出了图$G$的最小$Q$-特征值与其子图的最小$Q$-特征值之间的关系.

关键词: 非二部图; Q-特征值; 直径

中图分类号: O157.5 **文献标识码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2012.03.001

Least Q-eigenvalue of a graph

HE Chang-xiang, ZHOU Min

(*College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai* 200093, *China*)

Abstract: We showed that: If G is a non-bipartite connected graph, then $q(G) \geqslant \frac{1}{n(D+1)}$, where $g(G)$ is the least Q-eigenvalue of G, and D is the diameter of G. Some relations between the least Q-eigenvalue of G and that of its subgraph were given.

Key words: non-bipartite graph; Q-eigenvalue; diameter

0 引 言

设$G=(V,E)$是有n个顶点的简单连通图, 其中$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$是顶点集合. 图G的邻接矩阵定义为一个$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})$, 其中当$v_i$和$v_j$相邻时$a_{ij}=1$; 当$v_i$和$v_j$不相邻时$a_{ij}=0$. 若$G$是一个简单图, 则$\boldsymbol{A}(G)$是一个实对称的$(0,1)$-矩阵且它的主对角线上的元素全为零. 令$d(v_i)$表示$G$中顶点$v_i$的度, 图$G$的拉普拉斯矩阵定义为$\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$, 其中$\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n))$称为图$G$的度对角矩阵. 称$\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G)$为$G$的无符号拉普拉斯矩阵或$Q$-矩阵. 若$G$是连通图, 则$Q(G)$是一个半正定矩阵, 即$Q(G)$的特征值$q_1(G)\geqslant q_2(G)\geqslant\cdots\geqslant q_n(G)\geqslant 0$[1]. 为方便起见, 本文记$q(G)=q_n(G)$, 称为$G$的最小$Q$-特征值. 若$G$是二部图, 则$\boldsymbol{L}(G)$与$\boldsymbol{Q}(G)$酉相似, 从而有相同的特征值. 一般称$q_1(G)$为$G$的无符号拉普拉斯谱半径或$Q$-谱半径. 关于无符号拉普拉斯谱半径的研究可参见文献[2-5]等. 目前关于连通图的最小Q-特征值的研究还比较少. 文献[6]证明了在阶数为n的非二部图中, 图$E_{(3,n-3)}$(由C_3从圈上某点长出一条长为$n-3$的悬挂路得到的图)的最小Q-特征值最小, 从而也就给出了非二部图的最小Q-特征值的一个与阶数有关的可达下界. 受此启发, 我们也将研究非二部图的最小Q-特征值的下界.

收稿日期: 2011-05

基金项目: 国家自然科学基金(11026147); 上海市创新项目(10YZ99)

第一作者: 何常香, 女, 副教授. E-mail: changxianghe@hotmail.com.

本文的结构如下: 在第1节中, 证明$q(G) \geqslant \frac{1}{n(D+1)}$, 其中$n$是$G$的阶数, D是G的直径. 在第2节中, 分别研究G的最小Q-特征值与其去点子图和去边子图的最小Q-特征值之间的关系.

1 非二部图的最小Q-特征值与其直径的关系

图G中两点间的最大距离称为G的直径. 在本节中, 我们利用非二部图的结构特点, 给出了非二部图的最小Q-特征值$q(G)$的一个与图的直径有关的下界.

定理 1.1 设G是一个直径为D的n阶连通图, 若G不是二部图, 则$q(G) \geqslant \frac{1}{n(D+1)}$.

证 明 设$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{Q}(G) = \boldsymbol{D}(G) + A(G)$的对应于$q(G)$的单位特征向量. 往证$\boldsymbol{x}$中既有正分量也有负分量. 根据Perron-Frobenius定理, $Q(G)$的最大特征值$q_1(G)$存在一个分量全正的特征向量, 记为$\boldsymbol{y}$. 由于$\boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$是一个实对称矩阵, 它的对应于不同特征值的特征向量是正交的, 所以$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$正交. 由于$\boldsymbol{y}$的分量全为正, $\boldsymbol{x}$的非零分量不可能全为正, 或全为负, 故$\boldsymbol{x}$既有正分量也有负分量.

不妨设$x_1 > 0$, 且x_1是$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$中绝对值最大的分量. 由于$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, 而$x_1$的绝对值又最大, 所以$x_1^2 \geqslant \frac{1}{n}$. 记$\boldsymbol{x}$中所有正分量对应的点集合为$X$, 并记$Y$为其余点构成的集合, 即$Y = V \backslash X$. 由于$G$不是二部图, 所以$X$, Y都不是独立集, 即存在边$v_i v_j$, 其顶点v_i, v_j对应的$\boldsymbol{x}$中的分量x_i, x_j都是正的或都是非正的. 下面分两种情况来讨论.

情形 1 $x_i > 0, x_j > 0$

不妨设$v_1 v_2 \cdots v_i$是点v_1到集合$\{v_i,\ v_j\}$的最短路(显然$i \leqslant D+1$), 为方便起见, 令$j = i+1$, 很显然i, j之一为偶数. 设$v_1 v_2 \cdots v_k$是$v_1 v_2 \cdots v_i v_{i+1}$的子路, 点$v_k$对应的$\boldsymbol{x}$中的分量$x_k \geqslant 0$, 且$k$是偶数(这样的$k$总是存在的, 因为它至少可取$i$, $i+1$中的一个), $k \leqslant D+2$. 由Cauchy-Schwartz不等式, 可得

$$\begin{aligned}
q(G) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G))\boldsymbol{x} = \sum_{v_s v_t \in E(G)} (x_s + x_t)^2 \\
&\geqslant \sum_{\ell=1}^{k-1} (x_\ell + x_{\ell+1})^2 \geqslant \frac{1}{k-1}\Big(\sum_{\ell=1}^{k-1} \mid x_\ell + x_{\ell+1} \mid\Big)^2 \\
&\geqslant \frac{1}{k-1}[(x_1 + x_2) + (-x_2 - x_3) + (x_3 + x_4) + (-x_4 - x_5) + \cdots + (x_{k-1} + x_k)]^2 \\
&= \frac{1}{k-1}(x_1 + x_k)^2 > \frac{x_1^2}{D+1} \geqslant \frac{1}{n(D+1)}.
\end{aligned}$$

情形 2 $x_i \leqslant 0, x_j \leqslant 0$

与情形1类似, G中存在路$v_1 v_2 \cdots v_k$, 点v_k对应的$\boldsymbol{x}$中的分量$x_k \leqslant 0$, 且k是奇数,

$k \leqslant D+2$. 由Cauchy-Schwartz不等式, 有

$$
\begin{aligned}
q(G) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G))\boldsymbol{x} &= \sum_{v_s v_t \in E(G)} (x_s+x_t)^2 \\
&\geqslant \sum_{\ell=1}^{k-1}(x_\ell + x_{\ell+1})^2 \geqslant \frac{1}{k-1}\Big(\sum_{\ell=1}^{k-1} \mid x_\ell + x_{\ell+1} \mid \Big)^2 \\
&\geqslant \frac{1}{k-1}[(x_1+x_2)+(-x_2-x_3)+(x_3+x_4)+(-x_4-x_5)+\cdots+(-x_{k-1}-x_k)]^2 \\
&= \frac{1}{k-1}(x_1-x_k)^2 \geqslant \frac{x_1^2}{D+1} \geqslant \frac{1}{n(D+1)}.
\end{aligned}
$$

2　子图的最小Q-特征值

设$\boldsymbol{A}$是一个n阶实对称矩阵, 我们以$\lambda_1(\boldsymbol{A}) \geqslant \lambda_2(\boldsymbol{A}) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(\boldsymbol{A})$表示$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值. 以下引理是Courant-Fisher定理在对称阵和的谱方面的一个重要应用.

引理 2.1[1]　设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$均为n阶实对称矩阵, 若$\boldsymbol{C}$恰有t个正特征值, 则有$\lambda_k(\boldsymbol{B}) \geqslant \lambda_{k+t}(\boldsymbol{A})$ $(1 \leqslant k \leqslant n-t)$.

定理 2.1　设G一个n阶连通图, $1 \leqslant k \leqslant n+1$是一个自然数, H由G增加一个点u, 并将u与G中$1 \leqslant t < k$个点相连得到的图, 则$q_k(H) \leqslant q_{k-t}(G)$.

证　明　不妨设u是H的第$n+1$个顶点(H中其余点与G中点的编号相同), 不妨设H中与u点相邻接的点是$v_1, \cdots, v_t$, 则

$$
\boldsymbol{Q}(H) = \begin{pmatrix} Q(G) & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_t & O_{t\times(n-t)} & e_t \\ O_{(n-t)\times t} & O_{(n-t)\times(n-t)} & O_{(n-t)\times 1} \\ e_t^{\mathrm{T}} & O_{1\times(n-t)} & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(G) & O \\ O & O \end{pmatrix} + \boldsymbol{M}.
$$

其中I_t为t阶单位阵, O为0矩阵, $e_t=(1,1,\cdots 1)^{\mathrm{T}}$为$t$维全1向量. 经计算$\boldsymbol{M}$的$n+1$个特征值为

$$
\underbrace{0,\cdots,0,}_{n-t+1}\ \underbrace{1,\cdots,1}_{t-1},t+1,
$$

故M恰有t个正特征值. 由引理3.1, 知$q_k(H) \leqslant q_{k-t}(G)$.

在以上定理中, 特取$t=1$, $k=n+1$即可得如下推论.

推论 2.1　设G一个n阶连通图, H是由G增加一个点u, 并将u与G中一个点相连得到的图, 则$q(H) \leqslant q(G)$.

定义 2.1　若图G_1, G_2满足$V(G_1)=V(G_2)$, 定义图$G_1 \cup G_2$为$V(G_1 \cup G_2)=V(G_1)=V(G_2)$, $E(G_1 \cup G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)$.

定理 2.2　设图G_1, G_2具有相同的顶点集, 但边集互不相交, 则$q(G_1 \cup G_2) \geqslant q(G_1)+q(G_2)$.

证　明　设$\boldsymbol{x}$是$G_1 \cup G_2$对应于$q(G_1 \cup G_2)$的单位特征向量, 则有

$$
\begin{aligned}
q(G_1 \cup G_2) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(G_1 \cup G_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}(G_1)+\boldsymbol{Q}(G_2)]\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(G_1)x + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(G_2)\boldsymbol{x} \geqslant \min \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q(G_1)\boldsymbol{x} + \min \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q(G_2)\boldsymbol{x} \\
&= q(G_1)+q(G_2).
\end{aligned}
$$

由上面这个定理, 可以得到如下推论.

推论 2.2 设 G 一个顶点数大于等于 2 的图, $e\in E(G)$, 则 $q(G)\geqslant q(G-e)$.

证 明 设图 G 的阶数为 n, 在定理2.2中, 取 $G_1=G-e$, G_2 为由 P_2 和 $(n-2)$ 个孤立点构成的图, 则 $G_1\cup G_2=G$, 且 $q(G_2)=0$. 由定理2.2知, $q(G)\geqslant q(G_1)+q(G_2)=q(G-e)$.

当然这个推论, 也可以由Q-谱的插值定理得到.

在定理 2.2 中, G_1, G_2 都可以看成是 G 的去边子图. 这样, 定理 2.2 就可以归结为一句话: 生成子图的最小 Q-特征值不超过原图的最小 Q-特征值. 即: 若 $V(G_1)=V(G_2)$, $E(G_1)\subseteq E(G_2)$, 则 $q(G_1)\leqslant q(G_2)$. 接下来考虑去点子图的最小 Q-特征值与原图的最小 Q-特征值之间的关系. 设 $u\in V(G)$, 以 $G-u$ 表示由 G 去掉点 u 及与点 u 相关联的所有边而得到的图.

定 理 2.3 设 G 是 n 阶 连 通 图, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 相 应 于 $q(G)$ 的 单 位 特 征 向 量, u 是 G 中任意一点, 则 $q(G)\geqslant q(G-u)(1-x_u^2)$.

证 明 若 $x_u^2=1$, 结论显然成立. 故以下假设 $x_u^2<1$ 即 $\sum\limits_{v\in V(G-u)}x_v^2\neq 0$. 由于

$$
\begin{aligned}
q(G)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q(G)\boldsymbol{x}&=\sum_{vw\in E(G)}(x_v+x_w)^2\\
&=\sum_{vw\in E(G-u)}(x_v+x_w)^2+\sum_{v\in N_G(u)}(x_v+x_u)^2,
\end{aligned}
$$

又 $\dfrac{\sum\limits_{vw\in E(G-u)}(x_v+x_w)^2}{\sum\limits_{v\in V(G-u)}x_v^2}\geqslant q(G-u)$, 即

$$
\sum_{vw\in E(G-u)}(x_v+x_w)^2\geqslant q(G-u)\sum_{v\in V(G-u)}x_v^2=q(G-u)(1-x_u^2),
$$

从而有

$$
q(G)\geqslant q(G-u)(1-x_u^2)+\sum_{v\in N_G(u)}(x_v+x_u)^2\geqslant q(G-u)(1-x_u^2).
$$

以上定理中的不等式在什么情况下取得等号呢? 虽然很难找出等号成立的充要条件, 但还是能给出一些充分条件的, 如 G 是二部图, $x_u^2=1$ 等. 在有些时候(如在特殊图类中寻找具有最小 Q-特征值的极图) 结论中严格不等号成立的条件或许更有用处. 接下来, 我们就给出一个严格不等号成立的充分条件.

引理 2.2[2] 若 G 是连通图, 则 $q(G)=0$ 当且仅当 G 是二部图.

定理 2.4 设 G 是 n 阶连通图, 且 G 不是二部图, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是相应于 $q(G)$ 的单位特征向量. 若点 u 满足 $x_u=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则 $q(G)>q(G-u)(1-x_u^2)$.

证 明 由定理 2.3 的证明知, 我们只需证明 $\sum\limits_{v\in N_G(u)}(x_v+x_u)^2>0$. 若不然, 假设 $\sum\limits_{v\in N_G(u)}(x_v+x_u)^2=0$, 则有对任意 $v\in N_G(u)$ 都有 $x_v=-x_u$. 此时 $q(G)x_u=d_ux_u+\sum\limits_{v\in N_G(u)}x_v=\sum\limits_{v\in N_G(u)}(x_u+x_v)=0$，由于 G 不是二部图, $q(G)\neq 0$, 故 $x_u=0$. 另外由于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $q_1(G)$ 的特征向量正交, 故 $\boldsymbol{x}$ 中既有正分量也有负分量, 由 x_u 的取法知 $x_u<0$. 矛盾.

引理 2.3　设 G 是 n 阶连通图, 最小度为 δ, 若 $(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是相应于 $q(G)$ 的单位特征向量, 则

$$\min\{x_1^2,\cdots,x_n^2\}\leqslant\frac{2\delta^2}{q^2(G)+2(n-\delta-1)\delta^2}.$$

证　明　设 $\sigma^2=\min\{x_1^2,\cdots,x_n^2\}$. 若 $\sigma^2=0$, 结论显然成立. 故以下假设 $\sigma^2>0$, 设 $u\in V(G)$ 且 $d(u)=\delta$, 则有

$$\begin{aligned}q^2(G)\sigma^2\leqslant q^2(G)x_u^2&=\Big(\delta x_u+\sum_{i\in N(u)}x_i\Big)^2\\&\leqslant 2\delta\Big(\sum_{i\in N(u)}x_i^2+\delta x_u^2\Big)\leqslant 2\delta^2\Big(\sum_{i\in N(u)}x_i^2+x_u^2\Big)\\&=2\delta^2\Big(1-\sum_{j\in V(G)\setminus N[u]}x_j^2\Big)\\&\leqslant 2\delta^2[1-(n-1-\delta)\sigma^2]\\&=2\delta^2-2(n-1-\delta)\delta^2\sigma^2.\end{aligned}$$

故$\sigma^2\leqslant\frac{2\delta^2}{q^2(G)+2(n-\delta-1)\delta^2}$.

由定理 2.3 和以上引理, 可以得到

定理 2.5　设 n 阶连通图 G 的最小度为 δ, $q_n(G)=q(G)$, $(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是相应于 $q(G)$ 的单位特征向量. 若点 u 满足 $x_u^2=\min\{x_1^2,\cdots,x_n^2\}$, 则

$$q(G)\geqslant q(G-u)\Big[1-\frac{2\delta^2}{q^2(G)+2(n-\delta-1)\delta^2}\Big].$$

[参　考　文　献]

[1] GRONE R, MERRIS R, SUNDER V S. The Laplacian spectrum of a graph[J]. SIAM J Matrix Anal, 1990(2): 218-238.

[2] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SLOBODAN K S. Signless Laplacians of finite graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 423: 155-171.

[3] CVETKOVIĆ D, SLOBODAN K S. Towards a spectral theory of graphs based on signless Laplacian II[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(9): 2257-2272.

[4] DAS K C. On conjectures involving second largest signless Laplacian eigenvalue of graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(11): 3018-3029.

[5] FENG L, LI Q, ZHANG X D. Minimizing the Laplacian spectral radius of trees with given matching number[J]. Linear Multilinear Algebra, 2007, 55: 199-207.

[6] CARDOSO D M, CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, et al. A sharp lower bound for the least eigenvalue of the signless Laplacian of a non-bipartite graph[J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 429: 2770-2780.