文章编号: 1000-5641(2013)02-0154-06

与例外函数列相关的正规族

杨 刘, 陈巧玉

(华东师范大学 数学系, 上海 200241)

摘要: 设 $\{f_n\}$ 是区域 D 内的亚纯函数列, 其零点的重级均 $\geqslant 3$, 且均仅有一个重级极点. $\{h_n\}$ 是 D 内的亚纯函数列, 且 $h_n \Rightarrow h$ 于 D, $h \not\equiv \infty, h \neq 0$. 若 $f'_n \neq h_n$, 则 $\{f_n\}$ 在 D 内正规.

关键词: 亚纯函数; 正规族; 例外函数列

中图分类号: O174.5 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2013.02.019

Normal families on sequence of omitted functions

YANG Liu, CHEN Qiao-yu

(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200241, *China*)

Abstract: Let $\{f_n\}$ be a sequence of meromorphic functions on a domain D, all of whose zeros have multiplicity at least 3,and each of which has a multiple pole. Let $\{h_n\}$ be a sequence of meromorphic functions on D, such that $\{h_n\}$ converges spherically locally uniformly to a function h which is meromorphic and zero-free on D. If $f'_n \neq h_n$, then $\{f_n\}$ is normal on D.

Key words: meromorphic function; normal family; sequence of omitted functions

0. 引 言

1959 年, Hayman 证明了: 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, k 是正整数. 若 $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq 1$, 则 f 必恒为常数[1]. 根据 Bloch 法则[2], 相应于这个 Picard 型定理的正规定则应该成立. 1979 年顾永兴证明了 Hayman 关于正规族的这个著名猜想, 具体如下.

定理 A[3] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, k 是正整数, a 为非零复数. 若对于每个函数 $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq a$. 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

1986 年,杨乐改进了上述结果:

定理 B[4] 设 $\mathcal{F}$ 是 区域 D 内的一族亚纯函数, k 是正整数, $h(z)(\not\equiv 0)$ 是 D 上的全纯函数. 若对于每个 $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq h$. 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

1997 年, W. Schwick 将例外函数推广至亚纯函数,得到:

定理 C [5] 设 $\mathcal{F}$ 是 区域 D 内的一族亚纯函数, k 是正整数, $h(z)(\not\equiv 0)$ 是 D 上的亚纯函数. 若对于每个 $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq h$. 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2005年, 庞学诚和Zalcman等人进一步研究了有零点函数族的正规性,获得如下结果:

收稿日期: 2012-04

作者简介: 杨刘, 男, 硕士研究生, 研究方向为复分析. E-mail: yangliu20062006@126.com.cn.

定理 D[6] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族,其所有零点和极点均为重级的. $h(z)$ 是 D 内的亚纯函数,且$h(z)\not\equiv\infty$, $h(z)\neq 0$. 若对于每个 $f\in\mathcal{F}$, $f'\neq h$. 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

本文在已有结果的基础上, 考虑将例外函数推广至函数列, 得到下面的结果. 证明过程中用到了数学归纳法. 并构造例1说明例外函数列与例外函数有着本质的不同.

定理 1 设 $\{f_n\}$ 是区域 D 内的亚纯函数列, 其零点的重级均 $\geqslant 3$, 且仅有一个重级极点. $\{h_n\}$ 是 D 内的亚纯函数列, 且 $h_n\Rightarrow h$ 于 D, $h\not\equiv\infty, h\neq 0$. 若 $f_n'\neq h_n$, 则 $\{f_n\}$ 在 D 内正规.

例 1 设 $\{f_n\},\{h_n\}$是单位圆盘 Δ 内两列亚纯函数, 其中

$$f_n(z)=\frac{n(z-1/n)^2}{2z^2},\quad h_n(z)=\frac{1}{(z-e^{i2\pi/3}/n)(z-e^{i4\pi/3}/n)}.$$

故 $h_n(z)\Rightarrow h(z)=1/z^2\neq 0$. 由于 f_n 与 h_n 无公共极点且

$$f_n'(z)-h_n(z)=\frac{-\frac{1}{n^3}}{z^3(z-e^{i2\pi/3}/n)(z-e^{i4\pi/3}/n)}\neq 0,$$

则 $f_n'\neq h_n$. 但 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处不正规.

上面的例子也说明, 定理1中对 $\{f_n\}$ 零点重级的要求不能降低.

1. 引理

文中所涉及的符号均为值分布理论中常见的符号, 如: $f_n\Rightarrow f$ 于 D, 表示亚纯函数列 $\{f_n\}$ 在区域 D 内按球距内闭一致收敛于 f; $\Delta_r:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\},\Delta_r':=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<r\}$, $r=1$时分别记 Δ_1,Δ_1' 为 Δ,Δ'; $n(r,\frac{1}{f})$与$n(r,f)$, 分别表示亚纯函数 f 在 Δ_r 内零点总数(计重级)和极点总数 (计重级). 此外, 我们还需要下面几个引理:

引理 1.1[7] 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上一个超越亚纯函数, 其零点和极点除有限个外均为重级, $Q(\not\equiv 0)$ 是一个有理函数. 则 $f'-Q$ 有无穷多个零点.

引理 1.2[6] 设 $\{f_n\}$ 是区域内的亚纯函数列, 其零点和极点均为重级. $\{b_n\}$ 是 D 内的全纯函数列, 且 $b_n(z)\Rightarrow b(z)$ 于 $D, b(z)\neq 0$. 若 $f_n'\neq b_n$. 则 $\{f_n\}$ 在 D 内正规.

引理 1.3[8] 设 $\{f_n\},\{h_n\}$ 均是区域 D 内的亚纯函数列, $f(z)$, $h(z)$ 均是区域 D 内的亚纯函数. 若 $f_n\Rightarrow f$, $h_n\Rightarrow h$ 于 D, 且 $f_n'\neq h_n$. 则在 D 内, 或者 $f'\equiv h$, 或者 $f'\neq h$.

证 明 假设在 D 内, $f'\not\equiv h$. 则集合 $E=\{z:f(z)=\infty,或h(z)=\infty\}$,及$F=E\cup\{z:f'(z)-h(z)=0\}$均在 D 内无聚点. 由条件, 有

$$0\neq f_n'(z)-h_n(z)\Rightarrow f'(z)-h(z),于D-E.$$

因此, $\frac{1}{f_n'(z)-h_n(z)}\Rightarrow\frac{1}{f'(z)-h(z)}$,于$D-F$. 注意到 $\frac{1}{f_n'(z)-h_n(z)}$ 是 D 内全纯函数及 F 在 D 内无聚点, 由最大模原理有,

$$\frac{1}{f_n'(z)-h_n(z)}\Rightarrow\frac{1}{f'(z)-h(z)},于D.$$

所以 D 内 $f'(z)-h(z)\neq 0$. 下面说明 f,h 没有公共极点. 否则, 存在 $z_0\in D$ 分别是 f,h 的 s 级极点和 t 级极点. 那么存在 z_0 的邻域, 在该邻域内 $\frac{1}{f'(z)-h(z)}$ 仅有零点 z_0 重级为 $\max\{s+1,t\}$. 另一方面, 在 z_0 的任何小邻域内 n 充分大以后, $\frac{1}{f_n'(z)-h_n(z)}$ 有 $(s+1+t)$ 个零点(计重级). 这与$\frac{1}{f_n'(z)-h_n(z)}\Rightarrow\frac{1}{f'(z)-h(z)}$ 矛盾. 所以, 在 D 内 $f'\neq h$.

用定理 D 的证明方法可以得到下面的引理1.4.

引理 1.4 设 $\{f_n\}$ 是区域 D 内的亚纯函数列, 其所有零点和极点均为重级. $\{b_n\}$ 是 D 内的全纯函数列, 且$b_n(z)\Rightarrow b(z)$于 D,$b(z)\neq 0,\infty$. k 是一个正整数. 若 $f_n'\neq \frac{b_n(z)}{z^k}$. 则 $\{f_n\}$ 在 D 内正规.

引理 1.5 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 Δ 内的亚纯函数族, a 是一个有限复数或∞. 且每个 $f\in\mathcal{F}$, $f\neq a$. 若 $\mathcal{F}$ 在 Δ' 内正规, 在 $z=0$ 处不正规. 则存在 $\mathcal{F}$ 的子列 $\{f_n\}$, 使得 $f_n\Rightarrow a$ 于 Δ'.

证 明 首先考虑 $a=0$ 的情形. 令

$$\mathcal{G}=\{g:g=\frac{1}{f},f\in\mathcal{F}\}.$$

则 $\mathcal{G}$是 Δ 内的全纯函数族. 注意到 $(\frac{1}{f})^{\#}=f^{\#}$, 据 Marty 定则, $\mathcal{G}$在 Δ' 内正规, 在 $z=0$ 处不正规. 故存在 $\mathcal{G}$ 的子列 $\{g_n:g_n=\frac{1}{f_n}\}$ 使得 $\{g_n\}$ 的任何子列在 $\Delta_{\frac{1}{2}}$ 不内闭一致收敛. 且存在 $\{g_n\}$的子列 $\{g_{n_k}\}$, $g_{n_k}\Rightarrow g$,于 Δ'. 其中 g 或者是全纯函数, 或者恒为 ∞. 若 g 是全纯函数, 设其在 $|z|=\frac{1}{2}$ 上的最大模是 $M<\infty$. 故 n 充分大以后, 在 $\Delta_{\frac{1}{2}}$ 内有 $|g_{n_k}|<2M$, 由 Montel 定理, 存在 $\{g_{n_k}\}$ 的子列在 $\Delta_{\frac{1}{2}}$ 内闭一致收敛. 矛盾. 所以 g恒为 ∞. 从而 $f_{n_k}\Rightarrow 0$, 于 Δ'.

若 a 是非零有限复数. 由上面的证明, 存在 $\mathcal{F}$ 的子列 $\{f_n\}$, 使得 $f_n-a\Rightarrow 0$ 于 Δ'. 从而 $f_n\Rightarrow a$, 于 Δ'. 若 $a=\infty$. 则存在 $\mathcal{F}$ 的子列 $\{f_n\}$, 使得 $\frac{1}{f_n}\Rightarrow 0$ 于 Δ'. 从而 $f_n\Rightarrow\infty$, 于 Δ'.

引理 1.6 设 $\{f_n\}$ 是区域 D 内的亚纯函数列, 其极点均为重级. $\{h_n\}$ 是 D 内的亚纯函数列,且 $h_n\Rightarrow h$, 且 $h\not\equiv\infty, h\not\equiv 0$. 若 $f_n\neq 0$, $f_n'\neq h_n$. 则 $\{f_n\}$ 在 D 内正规.

证 明 根据引理1.2, 只需说明 $\{f_n\}$ 在 h 的零点和极点处正规. 不妨设区域 D 为单位圆盘 Δ, $h(z)=z^kb(z)$, 其中 $b(z)\neq 0,\infty$, k 是一非零整数. 假设 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处不正规. 由于 $\{f_n\}$ 在 Δ' 内正规, 且 $f_n\neq 0$, 由引理1.5, 必存在子列 (仍记作 $\{f_n\}$) 使得 $f_n(z)\Rightarrow 0$ 于 Δ'. n 充分大以后, 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{f_n''-h_n'}{f_n'-h_n}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{h'}{h}\mathrm{d}z.$$

根据幅角原理, 有

$$n\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{f_n'-h_n}\Big)-n\Big(\frac{1}{2},f_n'-h_n\Big)=n\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{h}\Big)-n\Big(\frac{1}{2},h\Big)=k.$$

由于 $f_n'\neq h_n$, 故 $n(\frac{1}{2},f_n'-h_n)=-k$. 说明 $k<0$. 而 $n(\frac{1}{2},h_n)=-k$ 且 f_n与h_n没有公共极点, 故 $n(\frac{1}{2},f_n)=0$. 所以 $f_n(z)\neq\infty$, $z\in\Delta_{\frac{1}{2}}$. 由引理1.5 存在子列 (仍记作 $\{f_n\}$), $f_n\Rightarrow\infty$于 $\Delta'_{\frac{1}{2}}$, 矛盾. 从而 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处正规.

引理 1.7 设 $\{f_n\}$ 是单位圆盘 Δ 内的亚纯函数列,其零点的重级均 $\geqslant 3$, 且仅有一个重级极点.k 是一个正整数, $p(z)$是k 次多项式.$\{h_n\}$ 是 Δ 内的亚纯函数列, $f_n'\neq h_n$,且满足:

(i) 存在非零复数列$\{a_n\}$, $a_n\to 0$, 使得 $a_n^kh_n(a_nz)\Rightarrow\frac{1}{p(z)}$ 于 $\mathbb{C}$;

(ii) $\{F_n:F_n(z)=a_n^{k-1}f_n(a_nz)\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于 $F(z)$.

则在 $\mathbb{C}$上, 或者 $F\neq 0$, 或者 $F\equiv 0$.

证 明 假设结论不成立, 则 $F(z)$是有零点的亚纯函数, 且 $F\not\equiv 0$. 由于

$$F_n'(z)=a_n^kf_n'(a_nz)\neq a_n^kh_n(a_nz)\Rightarrow\frac{1}{P(z)}$$

由条件及引理1.3, 或者 $F' \equiv \frac{1}{P(z)}$, 或者 $F' \neq \frac{1}{P(z)}$. 前者与 $F(z)$ 有重级零点矛盾.故 $F'(z) \neq \frac{1}{P(z)}$. 由引理1.1, $F' - \frac{1}{P(z)}$ 是有理函数.

若 $F' - \frac{1}{P(z)}$ 是多项式, 则 $F' = \frac{1}{P(z)} + c$ (c 为非零常数). 这和 $F(z)$与 $\frac{1}{P(z)}$ 无公共极点矛盾. 若 $F' - \frac{1}{P(z)}$ 是非多项式的有理函数. 可设

$$F'(z) = \frac{1}{P(z)} + \frac{c}{Q(z)},$$

其中 $Q(z)$是首1多项式, c 为非零常数. 由条件 $F(z)$ 仅有一个重级极点, 进一步可设

$$F' = \frac{(z-b)^m + c}{P(z)(z-b)^m}.$$

由于 $F(z)$有重级 $\geqslant 3$的零点, 则 $(z-b)^m + c$ 有重级零点, 矛盾. 从而引理成立.

2. 定理的证明

证 明 由引理1.2, 只需说明 $\{f_n\}$ 在 h 的极点处正规即可. 不妨设 $D = \Delta$ 为单位圆盘, $h(z) = \frac{b(z)}{z^k}$, 其中 $b(z)$ 在 Δ 内全纯, $b(z) \neq 0, b(0) = 1$. 且

$$h_n(z) = \frac{b_n(z)}{(z - z_{n,0})^{\alpha_0}(z - z_{n,1})^{\alpha_1} \cdots (z - z_{n,s})^{\alpha_s}}.$$

其中 α_j 是正整数, $\Sigma_{j=0}^s \alpha_j = k, z_{n,i} \neq z_{n,j} (i \neq j), z_{n,j} \to 0\ (n \to \infty). i, j = 0, 1, \cdots, s$. 由于 $\{f_n(z)\}$ 和 $\{f_n(z + z_{n,0})\}$ 的正规性相同. 进一步, 可设

$$h_n(z) = \frac{b_n(z)}{z^{\alpha_0}(z - z_{n,1})^{\alpha_1} \cdots (z - z_{n,s})^{\alpha_s}}.$$

下面对 h 的极点重级进行数学归纳证明 $\{f_n\}$ 在 $z = 0$ 处正规.

$k = 1$ 时, $h_n(z) = \frac{b_n(z)}{z}$. 由引理1.4,有 $\{f_n\}$ 在 $z = 0$ 处正规. 假设例外函数列的极限函数极点重级小于 k 时, 函数列在 $z = 0$ 处正规. 设 a_n 是 $z_{n,j}$($j = 1, 2, \cdots, s$) 中模最大者. 由引理1.4仅需考虑 $a_n \neq 0$ 的情形. 通过选取子列, 不妨设 $a_n = z_{n,s}$. 则 $a_n \to 0$. 令

$$F_n(z) = a_n^{k-1} f_n(a_n z), \quad z \in \Delta_{R_n}, R_n \to \infty.$$

则

$$F_n'(z) = a_n^k f_n'(a_n z) \neq a_n^k h_n(a_n z) = \frac{b_n(a_n z)}{z^{\alpha_0}(z - \frac{z_{n,1}}{a_n})^{\alpha_1} \cdots (z - \frac{z_{n,s}}{a_n})^{\alpha_s}} \Rightarrow h^*(z) \text{ 于 } \mathbb{C}.$$

可见 0为$h^*(z)$ 的重级 $\geqslant \alpha_0$ 的极点, 1为$h^*(z)$ 的重级 $\geqslant \alpha_s$ 的极点. 而 $\Sigma_{j=0}^s \alpha_j = k$, 所以 h^*的的极点重级均小于 k. 由归纳假设, $\{F_n\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上正规. 不妨设 $F_n(z) \Rightarrow F(z)$ 于 $\mathbb{C}$. 由引理1.7, 在 $\mathbb{C}$上, 或者 $F \neq 0$, 或者 $F \equiv 0$. 下面证明 $\{f_n\}$ 在 $z = 0$ 处正规.

假设 $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 不正规. 若存在 $\delta>0, n$ 充分大以后有 $f_n(z)\neq 0, z\in\Delta_\delta$. 由引理1.6, $\{f_n\}$ 在 Δ_δ 内正规, 矛盾. 所以存在 $\{f_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{f_n\}$), $c_n\to 0$, 使得 $f_n(c_n)=0$, 且 c_n 是 $\{f_n\}$ 的模最小的零点. 下面分两种情形考虑.

情形 1 $F\neq 0$. 因为 $F_n(\frac{c_n}{a_n})=0$, 故 $\frac{c_n}{a_n}\to\infty, c_n\neq 0$. 令

$$G_n(z)=c_n^{k-1}f_n(c_nz),\quad z\in\Delta_{R_n},\quad R_n\to\infty.$$

则

$$G_n'(z)\neq\frac{b_n(c_nz)}{z^{\alpha_0}(z-\frac{z_{n,1}}{c_n})^{\alpha_1}\cdots(z-\frac{z_{n,s}}{c_n})^{\alpha_s}}\Rightarrow\frac{1}{z^k}\text{ 于 }\mathbb{C}.$$

由引理1.2, $\{G_n(z)\}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正规. 由 $\{c_n\}$ 的构造可知$G_n(z)\neq 0, z\in\Delta, G_n(1)=0$. 由引理1.6, 知 $\{G_n(z)\}$ 在 Δ 上正规. 从而$\{G_n(z)\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上正规. 不妨设 $G_n(z)\Rightarrow G(z)$ 于 $\mathbb{C}$. 由引理1.7, 在 $\mathbb{C}$上, 或者 $G\neq 0$, 或者 $G\equiv 0$. 前者与 $G(1)=0$ 矛盾,后者与 $G_n(0)=(\frac{c_n}{a_n})^{k-1}F_n(0)\to\infty$ 矛盾.

情形 2 $F\equiv 0$. 令

$$g_n(z)=z^{k-1}f_n(z),\quad z\in\Delta.$$

如果 $\{g_n(z)\}$ 在 $z=0$ 处正规. 由于 $f_n(0)\neq\infty$, 故 $g_n(0)=0$, 从而存在 $\{g_n\}$ 的子列 (仍记作 $\{g_n\}$), 存在原点的邻域 $\Delta_{2\delta}$, 使得 $|g_n(z)|\leqslant 1, z\in\Delta_{2\delta}$. 因此 $\{f_n\}$ 在 $\Delta_{2\delta}$ 内全纯.

在 $|z|=\delta$ 上有$|f_n(z)|=\left|\frac{g_n(z)}{z^{k-1}}\right|\leqslant\frac{1}{\delta^{k-1}}$. 由最大模原理, 上式在 Δ_δ 内成立. 由 Montel 定理, $\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处正规, 矛盾. 因此, $\{z^{k-1}f_n(z)\}$ 在 $z=0$ 处不正规.

再由 Montel 定理, 任意 $\delta>0$, $\{z^{k-1}f_n(z)\}$ 在 Δ_δ 非内闭一致有界. 故存在 $\{z^{k-1}f_n(z)\}$ 的子列 (仍记为 $\{z^{k-1}f_n(z)\}$), $d_n\to 0$, 使得 $d_n^{k-1}f_n(d_n)\to\infty$. 而 $F_n(1)=a_n^{k-1}f_n(a_n)\to 0$. 由函数 $|z^{k-1}f_n(z)|$ 的连续性, 存在 $e_n\to 0$, 使得 $|e_n^{k-1}f_n(e_n)|=1$. 不妨设 e_n 是使得 $|z^{k-1}f_n(z)|=1$ 成立的模最小者. 令

$$H_n(z)=e_n^{k-1}f_n(e_nz),\quad z\in\Delta_{R_n},\quad R_n\to\infty.$$

由于 $F_n(z)=a_n^{k-1}f_n(a_nz)\Rightarrow 0$,于 $\mathbb{C}$. $F_n(\frac{e_n}{a_n})=(\frac{a_n}{e_n})^{k-1}e_n^{k-1}f_n(e_n)\to 0$.

因为 $|e_n^{k-1}f_n(e_n)|=1$, 所以 $\frac{a_n}{e_n}\to 0$. 则

$$H_n'(z)\neq\frac{b_n(e_nz)}{z^{\alpha_0}(z-\frac{z_{n,1}}{e_n})^{\alpha_1}\cdots(z-\frac{z_{n,s}}{e_n})^{\alpha_s}}\Rightarrow\frac{1}{z^k}\text{ 于 }\mathbb{C}.$$

由引理1.2, $\{H_n(z)\}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正规. 由 $\{e_n\}$ 的构造知 $\{H_n(z)\}$ 在 Δ 内全纯. 如果 $\{H_n(z)\}$ 在 $z=0$ 处不正规, 由引理1.5 可知, $H_n(z)\Rightarrow\infty$ 于 Δ'. 另一方面, 设 $H_n\Rightarrow H$ 于 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. 由 $|H_n(1)|=1, |H(1)|=1$, 矛盾. 故$\{H_n(z)\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上正规. 设 $H_n\Rightarrow H$ 于 $\mathbb{C}$. 由引理1.7 , 在 $\mathbb{C}$上, 或者 $H\neq 0$, 或者 $H\equiv 0$. 后者与 $|H(1)|=1$, 矛盾. 所以 $H\neq 0$.

因为 $H_n(\frac{c_n}{e_n})=0$, 故 $\frac{c_n}{e_n}\to\infty, c_n\neq 0$. 那么同情形1一样有

$$G_n(z)=c_n^{k-1}f_n(c_nz)\Rightarrow G(z), z\in\mathbb{C}.$$

或者 $G \neq 0$, 或者 $G \equiv 0$. 前者与 $G(1)=0$ 矛盾, 后者与 $G_n(0)=(\frac{c_n}{e_n})^{k-1}H_n(0)\to\infty$ 矛盾.

至此说明假设不成立, 故 $\{f_n(z)\}$ 在 $z=0$ 处正规. 完成归纳证明, 则定理1结论 成立.

致谢 作者衷心感谢导师庞学诚教授对本文的悉心指导!

[参 考 文 献]

[1] HAYMAN W K. Picard values of meromorphic fuctions and their derivatives[J]. Ann Math, 1959, 70: 9-42.

[2] PANG X C. Bloch's principle and normal criterion[J]. Sci Sinica, 1989, 32: 782-791.

[3] GU Y X. On normal families of meromorphic fuctions[J]. Sci Sinica, 1797, Special Issue 1 on Math: 267-274.

[4] YANG L. Normal families of meromorphic fuctions[J]. Sci Sinica, 1986, A(9): 898-908.

[5] SCHWICK W. On Hayman's alternative for families of meromorphic functions[J]. Complex Variables Theory Appl, 1997, 32: 51-57.

[6] PANG X C, YANG D G, ZALCMAN L. Normal families and omitted fuctions[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2005, 54: 223-235.

[7] BERGWEILER W, PANG X C. On the derivative of meromorphic functions with multiple zeros[J]. J Math Anal Appl, 2003, 278: 285-292.

[8] YANG P, PANG X C. Derivatives of meromorphic functions with multiple zeros and elliptic functions[J]. (to be published)

(上接第 153 页)

[10] ZANG Q P. A limit theorem for the moment of self-normalized sums[J]. J Inequal Appl, 2009, Art ID 957056, 10pp.

[11] ZHANG Y, YANG X Y, DONG Z S. A general law of precise asymptotics for the complete moment convergence[J]. Chinese Annals of Mathematics Series B, 2009, 30(1): 77-90.

[12] ZANG Q P. A general law of complete moment convergence for self-normalized sums[J]. J Inequal Appl, 2010, Art. ID 760735, 11 pp.

[13] ZANG Q P. A kind of complete moment convergence for self-normalized sums[J]. Comput Math Appl, 2010, 60(6): 1803-1809.

[14] GRIFFIN P S, KUELBS J. Some extensions of the LIL via self-normalized sums[J]. Ann Probab, 1991, 19: 380-395.

[15] HALL P, HEYDE C C. Martingale Limit Theory and Its Applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[16] TAN X L, YANG X Y. A general result on precise asymptotics for linear processes of positively associated sequences[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2008, 23(2): 190-196.