

文章编号: 1000-4750(2013)04-0448-07

# 具有结构非线性的二元翼面颤振研究

刘百慧, 李 敏, 谭添才

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

**摘 要:** 该文分别研究了俯仰方向带中心间隙和初偏间隙的二元翼面, 并提出通过加入摩擦力矩来减弱间隙非线性影响的方案。基于简谐条件下求得的非定常空气动力矩阵, 采用 Roger 有理函数拟合, 将其转为时域下的气动力的近似表达式, 之后采用四阶 Runge-Kutta 法求解其时域内的气动弹性响应。结果显示: 中心和初偏间隙对机翼产生的影响类似, 都能使其在一定的速度范围内产生复杂的极限环振荡, 但两者对间隙大小的敏感度有所不同。加入的摩擦能有效抑制间隙非线性的影响, 使翼面的运动在低于线性颤振速度下能够衰减。且当加入的摩擦类型确定, 初始扭矩和摩擦刚度的值比较大的情况下, 其值和摩擦非线性在初偏间隙中加入位置的变化都对系统的颤振速度不会有明显的影响。

**关键词:** 气动弹性响应; 结构非线性; Roger 有理函数拟合; 颤振; 极限环振荡

**中图分类号:** O34    **文献标志码:** A    doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.12.0841

## FLUTTER STUDY OF A TWO-DIMENSIONAL AIRFOIL WITH STRUCTURAL NONLINEARITIES

LIU Bai-hui, LI Min, TAN Tian-cai

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** A two dimensional airfoil section with central freeplay and preload asymmetry freeplay is studied. A type of friction nonlinearity is adopted to weaken the effects of freeplay nonlinearities. The Roger rational function fitting method is adopted to deduce the approximate expressions of the time domain aerodynamic force, based on the coefficient matrices of unsteady aerodynamics in simple harmonic motion. The equations of motion are solved using the fourth-order Runge-Kutta numerical integration technique to provide the aeroelastic response. The result shows that the central freeplay and preload asymmetry freeplay produce similar effects on the system but with different sensitivities. The adopted friction nonlinearities can effectively stable the aeroelastic characteristics of the airfoil when the flow velocity is under the linear flutter speed. The present results also indicate that if the type of friction is confirmed, the value of initial torque, stiffness of the added friction and the added position of the friction can barely affect the rate of converge while its value is larger than a certain value.

**Key words:** aeroelastic response; structural nonlinearities; Roger rational function approximation; flutter; limit cycle oscillation

颤振是一种气动弹性不稳定现象, 这种气动不稳定现象可能对飞行器结构和性能带来灾难性的后果。针对这种气动弹性动稳定性问题, 目前工程界均采用线性模型进行设计与校核, 实际工程应用

中气动弹性问题都包含非线性环节, 线性模型只是为了方便分析而进行的理想化假设。尽管现有的线性分析方法已在工程实践中发挥了重要的指导作用, 但无论在风洞实验或是飞行试验中, 都出现了

收稿日期: 2011-12-09; 修改日期: 2012-04-05

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项基金项目(YWF-10-01-B05)

通讯作者: 李 敏(1968-), 男, 湖北人, 教授, 博士, 博导, 从事结构动力学和气动弹性研究(E-mail: limin@buaa.edu.cn).

作者简介: 刘百慧(1987-), 女, 湖南人, 硕士生, 从事结构动力学和气动弹性研究(E-mail: liubaihui1987@163.com);

谭添才(1985-), 男, 广西人, 硕士生, 从事结构动力学和气动弹性研究(E-mail: tan.tiancai@163.com).

用经典的线性理论预测不到的非线性现象, 比如极限环振荡和混沌现象。

造成非线性气动弹性稳定性问题的因素很多, 其中与结构相关的因素包括几何大变形、间隙和摩擦<sup>[1]</sup>, 而对于目前高性能的飞行器, 控制面连接与操纵系统内存在间隙而造成的非线性是主要问题。随着结构优化设计所带来的刚度降低, 系统内的间隙很难消除, 间隙造成的非线性气动弹性响应表现为极限环振荡、混沌和分叉等, 而且这些现象大多出现在线性模型预测的颤振速度以下, 与飞行状态和初始条件等密切相关。这些现象的出现一方面降低了飞行器的性能, 例如非发散的稳定极限环可能导致疲劳破坏, 强烈的振荡引发伺服控制系统误操作等; 另一方面, 由于无法准确预测飞行器的非线性现象, 只能缩小飞行包线, 降低飞行器的使用范围, 甚至导致整体设计方案的失败。

针对日益严重的非线性气动弹性稳定性问题, 之前已有过大量的理论和数值研究<sup>[2-4]</sup>。其中有些研究<sup>[5-6]</sup>利用中心流形理论和正规摄动法或谐波平衡法来求解结构立方非线性问题。在结构非线性方面关注间隙非线性的研究是主流, Conner 等<sup>[4]</sup>对经典的控制面带间隙的二元机翼<sup>[7-9]</sup>进行了数值和实验研究。李道春等<sup>[10-11]</sup>在俯仰方向上加入一个立方非线性, 使其在达到线性颤振速度后系统能够不发散。任爱娣等<sup>[12]</sup>对具有不对称间隙的二元机翼的自激振动在小于线性颤振速度时可能出现的多种周期运动(极限环、周期倍化, 混沌运动)进行了初步研究。同样, 也有少数研究者专门针对摩擦非线性展开研究<sup>[13-15]</sup>, Mignolet 等<sup>[14]</sup>的研究表明摩擦的确能是一个很好的稳定因子。

以上针对结构非线性引发的气动弹性问题的研究, 其重点在于如何利用非线性模型预测非线性气动弹性现象, 包括极限环振动的速度范围、稳定性条件和初始条件的依赖性等。从这些研究成果可以发现, 结构非线性引发的非线性气动弹性现象非常复杂, 与线性模型的设计效果相比, 在线性模型颤振速度以下, 可能存在与飞行状态和初始条件密切相关的多种非线性现象, 这给飞行器强度设计带来严重问题。换言之, 即使可以预测各种非线性气动弹性响应现象, 如何解决工程强度设计仍是有待讨论的问题。

在先前的研究中<sup>[16-22]</sup>, 已通过实验和数值方法研究了间隙对机翼的影响, 但所有的这些研究都没

有提供一种很好的方案来减弱这种间隙非线性的影响。本文基于二自由度翼面模型, 在准确预测各种非线性气动弹性现象的基础上, 提出了添加摩擦力矩来抑制非线性程度的思想, 该摩擦力矩可通过在控制面转轴或操纵舵机上实现。方案的重点在于: 首先观测翼面加入摩擦后与不加入摩擦的气动弹性响应的比较, 因为在其位移力矩图上, 两种非线性似乎是有其相反特性的。其次, 计算摩擦不同的物理参数下的气动弹性响应, 因为把该方案实施于工程设计时, 只有在一定速度范围内, 系统对加入的摩擦不敏感的设计才是工程上可实现的。

## 1 理论分析

### 1.1 结构模型

具有俯仰和沉浮两个自由度的二元翼面的简化模型如图 1 所示。

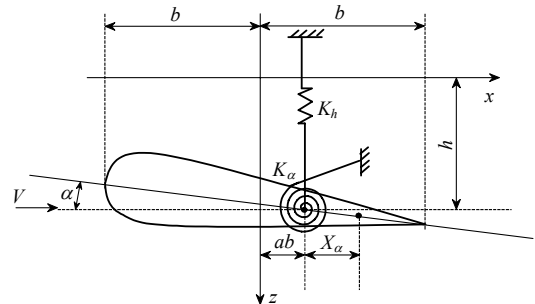


图 1 二自由度翼面模型

Fig.1 2 d.o.f. Airfoil section

两个自由度分别为: 沉浮自由度  $h$ , 向下为正; 俯仰自由度  $\alpha$ , 翼面前缘抬头为正; 如图 1 所示, 俯仰方向含有结构非线性。

### 1.2 气动弹性方程

带有结构非线性气动弹性方程可表示为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{Q} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x} = \{h \ \alpha\}^T$  表示位移向量;  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}(\alpha)$  分别表示质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, 可分别表示为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{K}(\alpha) = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中:  $m$  为单位长度机翼的质量;  $S_\alpha$  为单位展长机翼对弹性轴的质量静矩;  $I_\alpha$  为单位展长机翼对转轴

的质量惯矩； $c_h$  和  $c_\alpha$  为结构阻尼系数； $k_h$  和  $k_\alpha(\alpha)$  为结构刚度系数。

其在不可压缩流下的非定常空气动力矩阵  $Q=[L \ M_\alpha]^T$  可通过文献[23]求得, 本文在此不做表述。利用 Roger 有理函数拟合求解其时域内的气动力。其非定常气动力矩阵可表示为:

$$Q = q_d Q(k, M_\infty) x \tag{5}$$

其中,  $q_d$  表示动压, 通过 Roger 有理函数拟合后, 其时域内的气动力可表示为:

$$Q(k, M_\infty) = P_0 + P_1 \frac{b}{V} s + P_2 \left( \frac{b}{V} s \right)^2 + \sum_{m=1}^4 \frac{E_m s}{s + \frac{V}{b} \gamma_m} \tag{6}$$

其中:  $P_0, P_1, P_2, E_m (m=1, \dots, 4)$  都为实系数矩阵, 可通过求一系列减缩频率下的空气动力求得;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  为滞后根, 通常根据经验求得, 一般取正实数。  $s=ik=sb/V$ ,  $b$  为机翼半展长,  $V$  为自由流速度。引入如下空气动力状态变量:

$$X_{am} = \frac{s}{s + \frac{V}{b} \gamma_m} X, \quad m=1, 2, \dots, 4 \tag{7}$$

可得到系统状态空间内的气动弹性方程为:

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \ddot{X} \\ \dot{X}_{a1} \\ \vdots \\ \dot{X}_{a4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{M}^{-1} \bar{K} & -\bar{M}^{-1} \bar{B} & q_d \bar{M}^{-1} E_1 & \dots & q_d \bar{M}^{-1} E_4 \\ 0 & I & -\frac{V}{b} \gamma_1 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & 0 & \dots & -\frac{V}{b} \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \dot{X} \\ X_{a1} \\ \vdots \\ X_{a4} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

其中:

$$\bar{M} = M - q_d \left( \frac{b}{V} \right)^2 P_2, \quad \bar{B} = B - q_d \frac{b}{V} P_1, \quad \bar{K} = K - q_d P_0。$$

## 2 间隙非线性研究

本文研究的间隙非线性有以下两种, 中心间隙和初偏间隙, 此模型忽略接触面摩擦, 只考虑其间隙特性, 俯仰方向上位移扭矩关系如图 2 和图 3 所示。系统的参数值如表 1 所示。

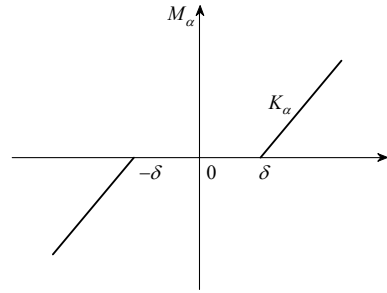


图 2 中心间隙

Fig.2 Central freeplay nonlinearity

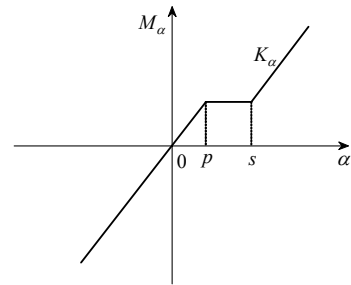


图 3 初偏间隙

Fig.3 Preload asymmetry freeplay nonlinearity

表 1 系统的参数值\*

Table 1 The value for the system parameters

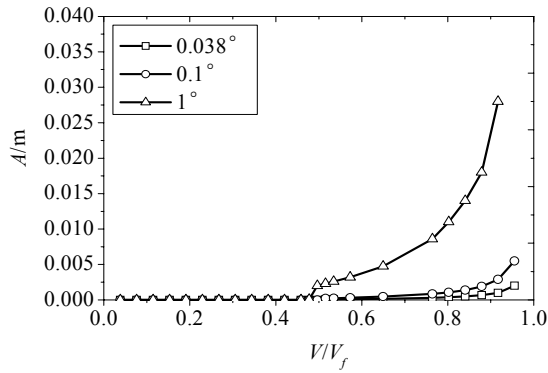
参数	参数值	参数	参数值
弹性轴, $a$	-0.25	弹簧的扭转刚度, $K_\alpha$	35.5
半弦长, $b$	0.1	截面重心到弹性轴的距离, $x_\alpha$	0.01
机翼升力系数, $c$	0.5	弹簧的拉伸刚度, $K_h$	2372
总质量, $m$	2.9	阻尼, $c_\alpha$	0.04
质量惯性矩, $I_\alpha$	0.024	阻尼, $c_\eta$	3.32
密度, $\rho$	1.225	半展长, $l$	0.4

\*: 其中有量纲的值均采用国际标准 kg, m, s 单位制。

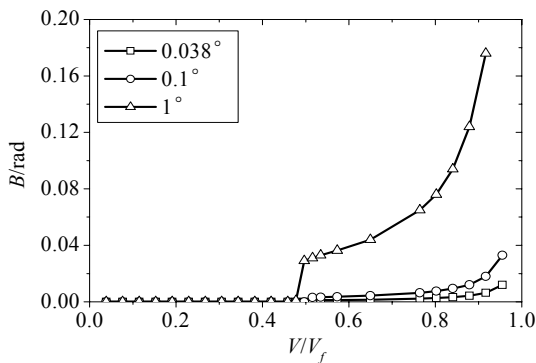
本文计算了 3 个间隙区间, 大小分别为  $0.038^\circ$ 、 $0.1^\circ$  和  $1^\circ$ , 通过 4 阶 Runge-Kutta 法求解式(8), 俯仰方向加一个幅值为  $0.1\text{rad}$  的初始扰动。

通过计算可知, 在带有间隙非线性的气弹响应中至少有 4 种运动形式, 可分别定义为: 阻尼衰减(当气流速度低于  $V/V_f=e_1$  时, 其中  $V_f=26.18\text{m/s}$  为系统线性颤振速度), 周期极限环运动 LCO(当气流速度达到  $V/V_f=e_2$ , 此时的运动对初始条件敏感, 即只有当初始扰动够大时, 系统才会产生周期的极限环运动, 反之系统则会收敛), 近似极限环振动(当气流速度大于  $V/V_f=e_2$ , 此时的运动对初始条件不敏感)和颤振(当气流速度  $V/V_f=1$ )

本文分别对以上 4 种运动形态进行了数值模拟, 其在很大速度范围内的非线性运动形态可通过其速度幅值图很好的说明。如图 4, 分别显示了当中心间隙  $2\delta=0.038^\circ$ 、 $0.1^\circ$  和  $1^\circ$  时的运动形态。



(a)



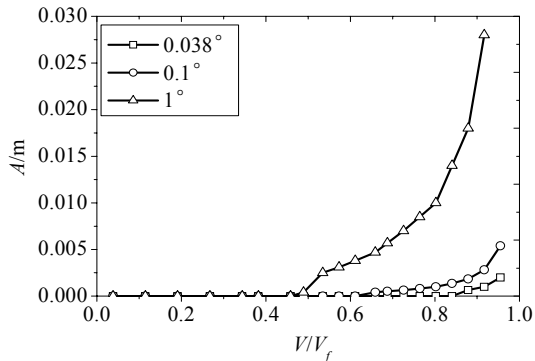
(b)

图4 不同中心间隙大小下的速度幅值图

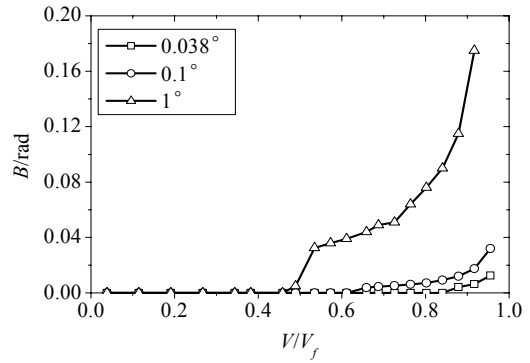
Fig.4 Amplitudes at Various Airspeeds in different central freeplay nonlinearities

在工程实践中,比较常见的还是如图3所示的初偏间隙,同样取初偏值  $p=0.1^\circ$  时,计算  $s=0.138^\circ$ 、 $0.2^\circ$  和  $1.1^\circ$ , 相对应间隙大小分别为  $2\delta=p-s=0.038^\circ$ 、 $0.1^\circ$  和  $1^\circ$  的气动弹性响应。通过计算可得其速度幅值图,如图5所示。

通过图4和图5可知,不论是中心间隙还是初偏间隙,随着中心间隙区间的增大,系统的振动幅值都会相应的增大。且间隙大小不同,相应的  $e_1$  和  $e_2$  的值也会不同,计算所得其参数间的关系归纳为表2。



(a)



(b)

图5 不同初偏间隙大小下的速度幅值图

Fig.5 Amplitudes at various airspeeds in different preload asymmetry freeplay nonlinearities

表2 系统参数间的关系

Table 2 The relationships in the system parameters

间隙大小		$e_1$	$e_2$
中心间隙	$0.038^\circ$	0.50	0.55
	$0.1^\circ$	0.48	0.50
	$1^\circ$	0.45	0.48
初偏间隙	$0.038^\circ$	0.85	0.86
	$0.1^\circ$	0.62	0.64
	$1^\circ$	0.48	0.50

通过表2可知,对于中心间隙,间隙大小对进入极限环振动的速度影响不大,基本都是在线性颤振速度的一半时开始极限环振荡。

但对于初偏间隙,情况则有所不同,其进入极限环振动的速度随着间隙的增大而减小,当间隙的值为  $0.038^\circ$  时,其进入极限环振动的速度为  $V/V_f=0.85$ ,其速度接近于线性颤振速度,产生的是弱非线性运动,这是工程单位非常期望看到的现象,美国军标也对间隙的要求限制在  $0.038$  以下,即对于工程中普遍存在的初偏间隙情况,如果间隙控制在  $0.038^\circ$  以下时,系统产生的弱非线性或是近似线性的运动。

### 3 间隙和摩擦非线性研究

国内由于制造工艺的限制,基本很难达到美国军标对间隙的严格要求,所以工程中的间隙非线性问题大量存在,且随着飞行器结构优化设计的进展,出现了很多工程中不希望出现的复杂的非线性现象,如上文所述,这些非线性现象不易预测且严重的降低了飞行器的飞行性能。本文中,以间隙大小  $0.1^\circ$  为例,为了避免产生工程中不希望出现的各种非线性现象,在其俯仰方向加入了摩擦力矩来减弱间隙非线性的影响,如图6所示,其非线性特

性为：在间隙较小时，其摩擦刚度较大，当外力矩大于一定值  $M_0$  时，刚度减小为零。将此种摩擦非线性分别加入中心间隙和初偏间隙中，并分别将两种非线性进行物理叠加，可分别得出其在俯仰方向上的位移扭矩的关系如图 7 和图 8 所示。

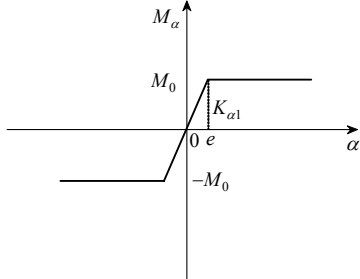


图 6 加入的摩擦非线性

Fig.6 The adapted friction nonlinearity

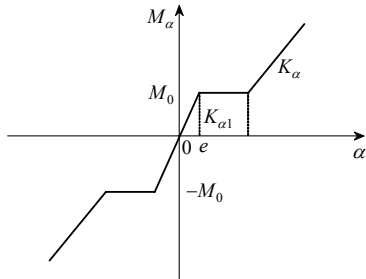


图 7 中心间隙加摩擦非线性

Fig.7 Central freeplay and friction nonlinearities

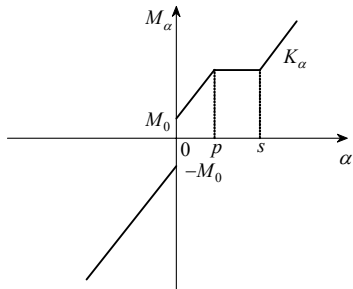
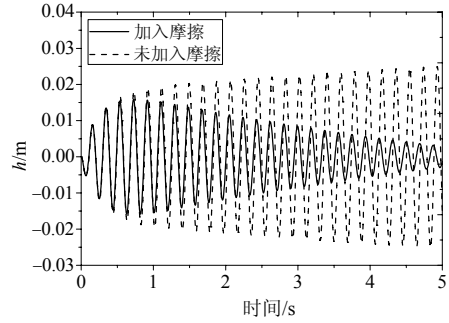


图 8 初偏间隙加摩擦非线性

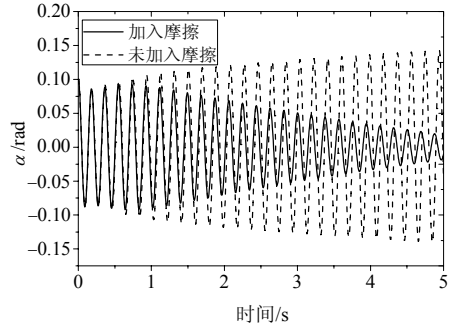
Fig.8 Preload asymmetry freeplay and friction nonlinearities

图 6~图 8 中  $M_0$  为初始扭矩,  $e$  为加入摩擦的偏转角,  $k_\alpha$  和  $k_{\alpha 1}$  分别为结构刚度和加入摩擦的刚度。

结果表明, 加入摩擦非线性之后, 当气流速度在未达到线性颤振速度时, 系统的运动是收敛为零的。如图 9 和图 10 给出了气流速度接近线性颤振速度  $V=26\text{m/s}$ , 初始扭矩  $M_0=0.05$ ,  $k_{\alpha 1}=3550$  时的响应图, 其结果表明摩擦非线性能够有效的减弱飞行器的运动, 使其从趋于发散的运动变为衰减。加入的适当的摩擦后, 中心间隙系统和初偏间隙系统都可产生弱非线性运动。



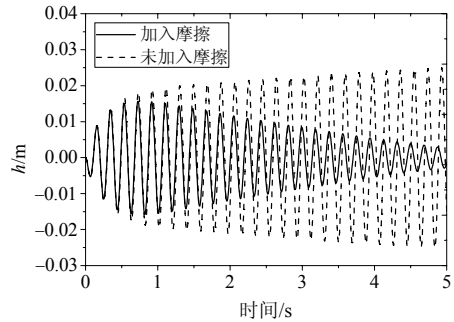
(a)



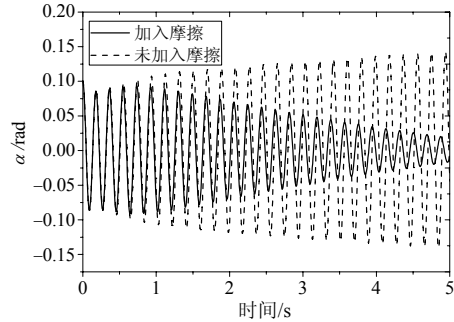
(b)

图 9 加入和未加入摩擦时中心间隙系统的气动弹性响应,  $V=26\text{m/s}$

Fig.9 Aeroelastic response with (solid) and without (dash) friction in central freeplay system at  $V=26\text{ m/s}$



(a)



(b)

图 10 加入和未加入摩擦时初偏间隙系统的气动弹性响应,  $V=26\text{m/s}$

Fig.10 Aeroelastic response with (solid) and without (dash) friction in preload asymmetry freeplay system at  $V=26\text{m/s}$

对于工程应用来讲,摩擦非线性中的一些物理参数可能会对方案实施效果产生很直接的影响,对这些物理参数对系统稳定性影响的讨论是非常必要的。因此本文在间隙系统中加入摩擦非线性后,计算了不同的摩擦非线性的参数,如初始扭矩  $M_0$ 、刚度  $k_{\alpha 1}$ 和初偏间隙中加入摩擦非线性的位置,对系统运动产生的影响。

对于中心间隙,图 11 列出了不同初始扭矩  $M_0$ 和加入摩擦非线性的刚度  $k_{\alpha 1}$ 的对系统颤振速度的影响。其结果表明当初始扭矩  $M_0 > 0.02$  时,系统的颤振速度将不会明显改变,且只要加入摩擦非线性的刚度  $k_{\alpha 1}$ 的值比较大,其值对系统的颤振速度也不会有明显的影响,这对工程设计是非常有益的。

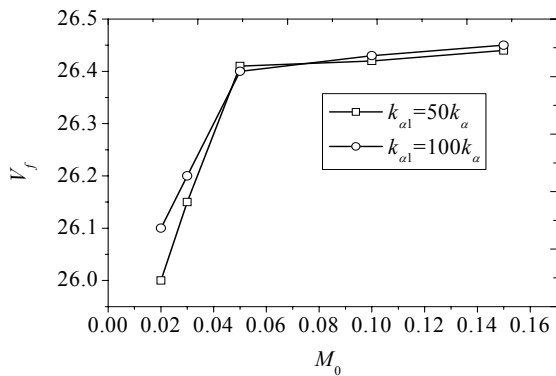
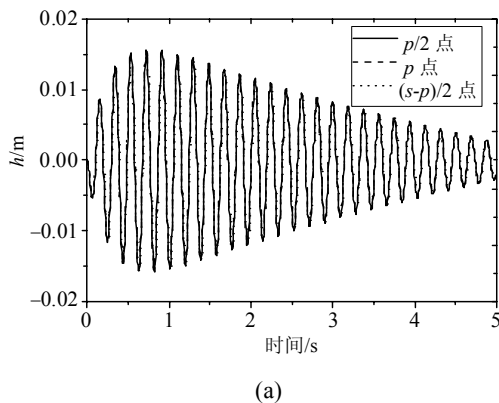


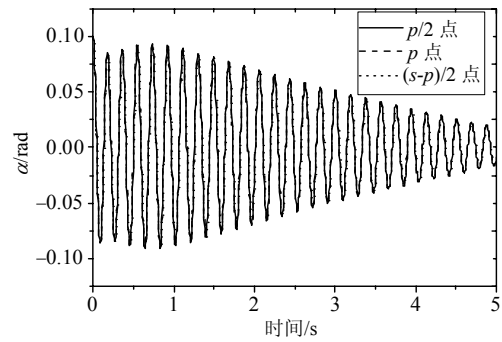
图 11 不同的初始扭矩  $M_0$ 和加入摩擦非线性的刚度  $k_{\alpha 1}$ 对中心间隙系统颤振速度的影响

Fig.11 The flutter speeds  $V_f$  of the different  $M_0$  and different  $k_{\alpha}$

对于初偏间隙,通过计算可知,初始扭矩  $M_0$ 和加入摩擦非线性的刚度  $k_{\alpha 1}$ 的对系统颤振速度的影响与中心间隙类似。图 12 给出了初偏间隙中加入摩擦非线性的不同位置对系统气动弹性响应产生的影响,图中给出了 3 个位置点,分别是  $p/2$  点(solid),  $p$  点(dash)和  $(s-p)/2$  点(dot)的气动弹性响应情况。



(a)



(b)

图 12 加入摩擦非线性的不同位置对初偏间隙系统气动弹性响应的影响

Fig.12 The effect of different positions of friction nonlinearity

从图 12 中可看出,当系统其它参数都不变的情况下,加入摩擦非线性的不同位置点的气动弹性响应图基本重合,其结果表明当摩擦类型确定的情况下,其在初偏间隙中加入的位置对系统的气动弹性响应几乎没有影响。

## 4 结论

本文研究了一个俯仰方向带有间隙和摩擦非线性的二元翼面,研究结果可归纳为以下几点:

对于中心间隙,间隙大小对进入极限环振荡的速度影响不大,但极限环振荡的振幅随着间隙的增大而增大。对于初偏间隙,情况与中心间隙有所不同,其进入极限环振荡的速度随着间隙的增大而减小,振幅则随着间隙的增大而增大。即对于工程中普遍存在的初偏间隙情况,如果对间隙控制在一定数值以下时,系统产生的是弱非线性或是近似线性的运动。

不论中心间隙或是初偏间隙,加入的摩擦都能够有效的减弱翼面的非线性强度,当气流速度低于线性颤振速度时,系统的运动都是衰减的。

加入的摩擦力矩的一些物理参数对系统稳定性影响不大。当摩擦的初始扭矩  $M_0$ 和刚度  $k_{\alpha 1}$ 的值比较大的情况下,其值的变化对系统的颤振速度不会有明显的影响。对于初偏间隙,当摩擦类型确定时,其加入的位置对系统的气动弹性响应几乎没有影响。

综上所述,对于工程中存在的间隙非线性问题,本文提出通过摩擦来抑制间隙非线性影响的方案是有效的,并通过计算证明其方案对加入摩擦的

物理参数的不敏感性, 所以本方案还具备了一定的实用性, 有利于工程设计和实施。

#### 参考文献:

- [1] Lee B H K, Price S J, Wong Y S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoil: bifurcation and chaos [J]. *Progress in Aerospace Science*, 1999, 35: 205—334.
- [2] Dowell E H, Edwards J, Strganac T. Nonlinear aeroelasticity [J]. *Journal of Aircraft*, 2003, 40: 857—874.
- [3] Lee I, Kim S H. Aeroelastic of a flexile control surface with structural nonlinearity [J]. *Journal of Aircraft*, 1995, 32(4): 868—874.
- [4] Conner M D, Tang D M, Dowell E H, Virgin L N. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1997, 11: 89—109.
- [5] Lee B H K, Liu L, Chung K W. Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281: 699—717.
- [6] Liu L, Dowell E H. Harmonic balance approach for an airfoil with a freeplay control surface [J]. *AIAA Journal*, 2005, 43: 802—815.
- [7] Li D, Xiang J. Chaotic motions of an airfoil with cubic nonlinearity in subsonic flow [J]. *Journal of Aircraft*, 2008, 45: 1457—1460.
- [8] Lee I, Kim S H. aeroelastic of a flexile control surface with structural nonlinearity [J]. *Journal of Aircraft*, 1995, 32(4): 868—874.
- [9] Bae J S, Inman D J, Lee I. Effects of structural nonlinearity on subsonic aeroelastic characteristics of an aircraft wing with control surface [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2004, 19(6): 747—763.
- [10] Li Daochun, Guo Shijun, Xiang Jinwu. Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329: 4756—4771.
- [11] 李道春, 向锦武. 迟滞非线性二元机翼颤振特性分析 [J]. *航空学报*, 2007, 28(3): 600—604.  
Li Daochun, Xiang Jinwu. Aeroelastic analysis of a two-dimensional airfoil with a hysteresis structural nonlinearity [J]. *Acta Aeronautica et Astronautia Sinica*, 2007, 28(3): 600—604. (in Chinese)
- [12] 任爱娣, 张琪昌. 具有间隙的二元机翼自激振动的数值分析 [J]. *天津理工学院学报*, 2004, 20(3): 17—21.  
Ren Aidi, Zhang Qichang. Numerical analysis on a self-excited two-dimensional airfoil with freeplay model [J]. *Journal of Tianjin Institute of Technology*, 2004, 20(3): 17—21. (in Chinese)
- [13] Griffin J H. Friction Damping of resonant stresses in Gas Turbine engine airfoils [J]. *Journal of Engineering for Power*, 1980, 102: 329—333.
- [14] Mignolet M P, Agelastos A M, Liu D D. Impact of frictional structural nonlinearity in the presence of negative aerodynamic damping [R]. AIAA paper 1428, 2003.
- [15] Choi G G, Agelastos A M, Mignolet M P, Liu D D. Effects of internal friction on the dynamic behavior of aeroelastic systems [R]. AIAA paper 1591, 2004.
- [16] Laith K, Abbas, Chen Q. Aeroelastic behavior of lifting surfaces with freeplay, and aerodynamic stiffness and damping nonlinearities [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(4): 1101—1126.
- [17] Dowell E H, Tang D M. Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics [R]. AIAA paper 0003, 2002.
- [18] Zhao Demin, Zhang Qichang. Bifurcation and chaos analysis for aeroelastic airfoil with freeplay structural nonlinearity in pitch [J]. *Chinese Physics*, 2010, 19(3): 1—10.
- [19] 赵永辉, 胡海岩. 具有操纵面间隙非线性二维翼段的气动弹性分析 [J]. *航空学报*, 2003, 24(6): 521—525.  
Zhao Yonghui, Hu Haiyan. Aeroelastic analysis of a two dimensional airfoil with control surface freeplay nonlinearity [J]. *Acta Aeronautica et Astronautia Sinica* 2003, 24(6): 521—525. (in Chinese)
- [20] Patil M J, Hodges H. On the importance of aerodynamic and structural geometrical nonlinearities in aeroelastic behavior of high-aspect-ratation Wings [R]. AIAA paper 1448, 2000.
- [21] Botez R, Ibrir S, Biskri D, et al. Aerodynamic forces approximation for aeroservoelastic models [R]. AIAA paper 1577, 2003.
- [22] Conner M D, Virgin L N, Dowell E H. Accurate numerical integration of state-space models for aeroelastic systems with freeplay [J]. *AIAA Journal*, 1996, 34: 2202—2205.
- [23] Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter [R]. California: NACA 496, 1935.