文章编号: 1000-5641(2010)03-0142-07

伪辛空间上全迷向子空间的Critical问题

赵燕冰[1], 钱国栋[2], 霍元极[3]

(1. 张家口职业技术学院 基础部, 河北 张家口 075051; 2. 河北北方学院 计算机科学系, 河北 张家口 075000; 3. 海南软件职业技术学院 数学系, 海南 琼海 571000)

摘要: 利用伪辛空间的性质和计数定理在伪辛空间上研究了全迷向子空间的 Critical 问题, 得到了相应的计数公式和 Critical 指数.

关键词: 伪辛空间; Critical指数; 面; 格; matroid; Möbius 函数.

中图分类号: O152.8 **文献标识码**: A

Critical problems of totally isotropic subspaces in finite pseudo-symplectic spaces

ZHAO Yan-bing[1], QIAN Guo-dong[2], HUO Yuan-ji[3]

(1. *Department of Basic Courses, Zhangjiakou Vocational College of Technology, Zhangjiakou Hebei* 075051, *China*;
2. *Department of Computer Science, Hebei North University, Zhangjiakou Hebei* 075000, *China*;
3. *Department of Mathematics, Hainan Software Profession Institute, Qionghai Hainan* 571000, *China*)

Abstract: With the properties and counting theorems of the finite pseudo-symplectic spaces, this paper studied the critical problems of totally isotropic subspaces in the finite pseudo-symplectic spaces and obtained the corresponding counting formulas and critical exponents.

Key words: pseudo-symplectic spaces; critical exponent; flat; lattice; matroid; Möbius function

0 引言

设$\mathbb{F}_q$是q个元素的有限域, 这里q是一个素数幂, $\mathbb{F}_q^{(n)}$是$\mathbb{F}_q$上的n维行向量空间. $\mathbb{F}_q^{(n)}$上的经典Critical问题由Crapo和Rota在1970年系统地阐述和研究, 给出了Critical指数及其相关的结果(见文献[1]). Kung在文献[2]中研究了辛空间的Critical问题, 给出了一些结论. 万哲先在有限域上酉空间和辛空间中研究了Critical问题, 得到一些重要结论(见文献[3]), 并纠正了Kung的一些错误. 伪辛空间上的情形比较复杂, 本文根据文献[4-6]中的结

收稿日期: 2009-08

基金项目: 海南省自然科学基金(109006).

第一作者: 赵燕冰, 男, 硕士, 副教授, 研究方向为编码理论, 组合数学. E-mail: zjkzyb@tom.com.

果, 研究了伪辛空间上的全迷向子空间的 Critical 问题, 也得到与文献[1,3]中相应的一些结论, 解决了文献[4]中的遗留问题.

在这一节, 我们仍引用文献[4]中所介绍的伪辛空间上全迷向子空间的概念、符号和术语. 设 $\mathbb{F}_q$ 是一个特征为 2 的有限域, 令 $\boldsymbol{S}_{2\nu+\delta}$ 是一个 $\mathbb{F}_q$ 上 $(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 非奇异对称矩阵, 其中 $\delta=0,1,2$,

$$\boldsymbol{S}_{2\nu}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ I^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}_{2\nu+1}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} & \\ I^{(\nu)} & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}_{2\nu+2}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} & & \\ I^{(\nu)} & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 $\mathbb{F}_q$ 上满足 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}_{2\nu+\delta}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}_{2\nu+\delta}$ 的所有 $(2\nu+\delta)\times(2\nu+\delta)$ 非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$ 关于矩阵乘法作成一个群, 称该群为 $\mathbb{F}_q$ 上关于 $\boldsymbol{S}_{2\nu+\delta}$ 的 $2\nu+\delta$ 阶伪辛群, 表示为 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q,\boldsymbol{S}_\delta)$. 群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q,S_{2\nu+\delta})$ 在 $2\nu+\delta$ 维向量空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上的作用定义如下.

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\times Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q,S_{2\nu+\delta})\longrightarrow\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\\ ((x_1,x_2,\cdots,x_{2\nu+\delta}),\boldsymbol{T})\longmapsto(x_1,x_2,\cdots,x_{2\nu+\delta})\boldsymbol{T}.\end{gathered}$$

向量空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 与如上 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q,S_{2\nu+\delta})$ 的群作用一起被叫做特征为 2 的有限域 $\mathbb{F}_q$ 上 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间. 令 P 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 的一个 m 维子空间, 秩为 m 的 $m\times(2\nu+\delta)$ 矩阵也用 P 表示, 它的行向量扩张为一个子空间 P, 并且叫这个矩阵 P 为这个子空间 P 的矩阵表示. 在 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上的一个 m 维子空间 P 是一个 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型子空间, 其中 $\tau=0,1,2$ 且 $\varepsilon=0,1$, 如果

(i) $PS_{2\nu+\delta}P^{\mathrm{T}}$ 合同于 $(S_{2s+\delta},0^{(m-2s-\delta)})$, 对于 s 使得 $0\leqslant s\leqslant[m/2]$.

(ii) 对应于 $\varepsilon=0$ 或 1 分别有 $e_{2\nu+1}\notin P$ 或 $e_{2\nu+1}\in P$.

特别, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上 $(m,0,0,0)$,$(m,0,0,1)$ 型子空间被叫做 m 维全迷向子空间. 令 $\mathcal{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$ 表示 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型子空间的集合, 依据文献[4] 定理 4.11, 在 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型子空间存在当且仅当

$$(\tau,\varepsilon)=\begin{cases}(0,0),(1,0),(1,1),\text{或}(2,0), & \text{若}\delta=1,\\ (0,0),(0,1),(1,0),(2,0),\text{或}(2,1), & \text{若}\delta=2,\end{cases}\tag{1}$$

且

$$2s+\max\{\tau,\varepsilon\}\leqslant m\leqslant\nu+s+[(\tau+\delta-1)/2]+\varepsilon.\tag{2}$$

依据文献[4]定理 4.12, 群 $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q,S_{2\nu+\delta})$ 可迁地作用在 $\mathcal{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$ 上.

令 $N(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)=|\mathcal{M}(m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)|$. 令 P 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上一个给定的 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型子空间, $\mathcal{M}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1;m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$ 表示包含在 P 中的 $(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1)$ 型子空间集合, 且 $N(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1;m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)=|\mathcal{M}(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1;m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)|$. 令 P_1 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上一个给定的 $(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1)$ 型子空间, $\mathcal{M}'(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1;m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)$ 表示包含 P_1 的 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型子空间集合, 且 $N'(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1;m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)=|\mathcal{M}'(m_1,2s_1+\tau_1,s_1,\varepsilon_1;m,2s+\tau,s,\varepsilon;2\nu+\delta)|$.

下面, 我们研究$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}(\delta=1,2)$上全迷向子空间的Critical问题, $\delta=0$的情形已在文献[4]中讨论.

1 引理与推论

引理 1.1 $2\nu+\delta$维伪辛空间$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}(\delta=1,2)$上全迷向子空间的维数$\leqslant \nu+\delta-1$; $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$上极大全迷向子空间的维数为$\nu+\delta-1$; $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$上任何全迷向子空间包含在一个维数为$\nu+\delta-1$的全迷向子空间中.

证 明 (i) 通过(1),(2)式可知$\delta=1$, $(\tau,\varepsilon)=(0,0)$时, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$上存在全迷向子空间, 且维数$\leqslant\nu$; 可以验证$(I^{(\nu)}\quad 0^{(\nu+1)})$是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$上维数为$\nu$的全迷向子空间. 因此$\delta=1$, $(\tau,\varepsilon)=(0,0)$时, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$上极大全迷向子空间的维数为ν. 显然, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$上一个全迷向子空间的子空间是全迷向的. 因此, 我们推出$(I^{(\nu)}\quad 0^{(\nu+1)})$有任何维数$\leqslant\nu$的全迷向子空间. 通过文献[4]定理4.12, $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q,\boldsymbol{S}_{2\nu+\delta})$可迁地作用在同样维数的全迷向子空间的集合上. 因此, 任何全迷向子空间包含在一个维数为ν的全迷向子空间中.

(ii) 通过(1),(2)式可知$\delta=2$, $(\tau,\varepsilon)=(0,0),(0,1)$时, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$上存在全迷向子空间, 且维数$\leqslant\nu+\varepsilon$; 可以验证

$$\begin{pmatrix} I^{(\nu)} & 0^{(\nu)} & 0^{(\nu\times1)} & 0^{(\nu\times1)} \\ 0^{(1\times\nu)} & 0^{(1\times\nu)} & \varepsilon^{(1\times1)} & 0^{(1\times1)} \end{pmatrix}$$

是$\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$上维数为$\nu+\varepsilon$的全迷向子空间. 因此$\delta=2$, $(\tau,\varepsilon)=(0,0),(0,1)$时, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$上极大全迷向子空间的维数为$\nu+1$. 显然, $\mathbb{F}_q^{(2\nu+2)}$上一个全迷向子空间的子空间是全迷向的. 因此, 我们推出

$$\begin{pmatrix} I^{(\nu)} & 0^{(\nu)} & 0^{(\nu\times1)} & 0^{(\nu\times1)} \\ 0^{(1\times\nu)} & 0^{(1\times\nu)} & 1^{(1\times1)} & 0^{(1\times1)} \end{pmatrix}$$

有任何维数$\leqslant\nu+1$的全迷向子空间. 通过文献[4]定理4.12, $Ps_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q,\boldsymbol{S}_{2\nu+\delta})$可迁地作用在同样维数($\varepsilon$的值也相同)的全迷向子空间的集合上. 因此, 任何全迷向子空间包含在一个维数为$\nu+1$的全迷向子空间中.

引理 1.2 令$r\leqslant m\leqslant\nu$. 在$(2\nu+\delta)$维伪辛空间上包含一个给定的r维全迷向子空间的m维全迷向子空间的个数是

$$\begin{aligned} &N'(r,0,0,\varepsilon_1;m,0,0,\varepsilon;2\nu+\delta)\\ &=\begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{m-r}\dfrac{q^{2(\nu-i+1-r)}-1}{q^i-1}, & \delta=1,\\ q^{m-r}\prod\limits_{i=0}^{m-r-1}\dfrac{q^{2(\nu-r-i)}-1}{q^{m-r-i}-1}+\prod\limits_{i=1}^{m-r-1}\dfrac{q^{2(\nu-r-i+1)}-1}{q^{m-r-i}-1}+\prod\limits_{i=0}^{m-r-1}\dfrac{q^{2(\nu-r-i+1)}-1}{q^{m-r-i}-1}, & \delta=2. \end{cases}\end{aligned}$$

当$r=0,\delta=2$时, $N'(r,0,0,\varepsilon_1;m,0,0,\varepsilon;2\nu+\delta)$的值为前两项.

证 明 当$r>0$时, 先考虑$\delta=1$的情形, 通过文献[4]中的推论4.15得

$$N(r,0,0,0;2\nu+1)=\frac{\prod\limits_{i=0}^{r-1}(q^{2(\nu-i)}-1)}{\prod\limits_{i=1}^{r}(q^i-1)};$$

$$N(m,0,0,0;2\nu+1)=\frac{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(q^{2(\nu-i)}-1)}{\prod\limits_{i=1}^{m}(q^{i}-1)}.$$

对于$N(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)$, 此时$\tau_1=0,\tau=0$和$\max\{0,r\}\leqslant\min\{m,r\}$成立, 所以在文献[4]中定理4.24的条件(4.42)式成立, 由定理4.25得

$$N(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)=N(r,0,0;0+m,0).$$

由于在$N(r,0,0;0+m,0)$中, $\nu=0,\delta=0,l=m$, 且满足$\max\{0,r\}\leqslant\min\{m,r\}$, 所以, 文献[4]定理3.24, 推论3.25成立, 此时$k=r$. 当$k=r$时, 由定理3.24, 推论3.25, 计算得

$$N(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)=N(r,0,0;0+m,0)=\frac{\prod\limits_{i=m-r+1}^{m}(q^{i}-1)}{\prod\limits_{i=1}^{r}(q^{i}-1)}.$$

为了计算$N'(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)$, 我们定义$\boldsymbol{M}$是一个具有行标和列标的$(0,1)-$矩阵, 且行标由$\mathcal{M}(r,0,0,0;2\nu+1)$标定, 列标由$\mathcal{M}(m,0,0,0;2\nu+1)$标定, 矩阵$\boldsymbol{M}$的元素$(A,B)=1$当且仅当$A\subseteq B$, 否则为0, 其中$A\in\mathcal{M}(r,0,0,0;2\nu+1),B\in\mathcal{M}(m,0,0,0;2\nu+1)$. 计算矩阵$\boldsymbol{M}$所有行中1的个数, 可得$N(r,0,0,0;2\nu+1)N'(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)$. 同样计算矩阵$\boldsymbol{M}$所有列中1的个数, 可得$N(m,0,0,0;2\nu+1)N(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)$. 因此,

$$\begin{aligned}N'(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)&=\frac{N(m,0,0,0;2\nu+1)N(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+1)}{N(r,0,0,0;2\nu+1)}\\&=\frac{\dfrac{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(q^{2(\nu-i)}-1)}{\prod\limits_{i=1}^{m}(q^{i}-1)}\times\dfrac{\prod\limits_{i=m-r+1}^{m}(q^{i}-1)}{\prod\limits_{i=1}^{r}(q^{i}-1)}}{\dfrac{\prod\limits_{i=0}^{r-1}(q^{2(\nu-i)}-1)}{\prod\limits_{i=1}^{r}(q^{i}-1)}}\\&=\prod_{i=1}^{m-r}\frac{q^{2(\nu-i+1-r)}-1}{q^{i}-1}.\end{aligned}$$

再考虑$\delta=2$的情形. $N'(r,0,0,\varepsilon_1;m,0,0,\varepsilon;2\nu+2)=N'(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+2)+N'(r,0,0,0;m,0,0,1;2\nu+2)+N'(r,0,0,1;m,0,0,1;2\nu+2)$. 用情形1同样的方法分别可得

$$\begin{aligned}N'(r,0,0,0;m,0,0,0;2\nu+2)&=q^{m-r}\prod_{i=0}^{m-r-1}\frac{q^{2(\nu-r-i)}-1}{q^{m-r-i}-1};\\N'(r,0,0,0;m,0,0,1;2\nu+2)&=\prod_{i=1}^{m-r-1}\frac{q^{2(\nu-r-i+1)}-1}{q^{m-r-i}-1};\\N'(r,0,0,1;m,0,0,1;2\nu+2)&=\prod_{i=0}^{m-r-1}\frac{q^{2(\nu-r-i+1)}-1}{q^{m-r-i}-1}.\end{aligned}$$

特别当 $r=0$ 时, $N'(r,0,0,\varepsilon_1;m,0,0,\varepsilon;2\nu+2)=q^m\prod\limits_{i=0}^{m-1}\frac{q^{2(\nu-i)}-1}{q^{m-i}-1}+\prod\limits_{i=1}^{m-1}\frac{q^{2(\nu-i+1)}-1}{q^{m-i}-1}$. 此时, 引理 1.2 可由文献[4]中的推论 4.15 直接得到.

推论 1.3 在 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间上包含一个给定的 r 维全迷向子空间的 $\nu+\delta-1$ 维极大全迷向子空间的个数是

$$\begin{aligned} N'(r,0,0,\varepsilon_1;\nu+\delta-1,0,0,\varepsilon;2\nu+\delta) &= \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{\nu-r}(q^i+1), & \delta=1, \\ (q^{\nu-r+1}+2)\prod\limits_{i=1}^{\nu-r}(q^i+1), & \delta=2. \end{cases} \\ &= (q^{\nu-r+1}+2)^{\delta-1}\prod_{i=1}^{\nu-r}(q^i+1). \end{aligned}$$

伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上一个向量集 X 被叫做迷向集, 如果 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{S}_{2\nu+\delta}\boldsymbol{v}'=0$, 对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in X$. 令 X 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上的一个非空向量集, 用 $\langle X\rangle$ 表示由 X 扩张成的子空间. 显然, 如果 X 是一个向量的迷向集, 则 $\langle X\rangle$ 是一个全迷向子空间. 用 $r(X)$ 表示 X 的秩, 并被定义为 $r(X)=\dim\langle X\rangle$. 如果 $X=\phi$ 则 $\langle X\rangle=\phi$ 且 $r(X)=0$. 令 S 是伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上一个非零向量集, 一个全迷向子空间 P 被叫做是分离 S 的, 如果 $P\cap S=\phi$. S 的伪辛 Critical 指数被定义为存在一个最小正整数 $\lambda\leqslant\nu+\delta$, 使得存在一个 $(\nu+\delta-\lambda)$ 维全迷向子空间分离 S, 表示为 $\mathbb{C}_{ps}(S,\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)})$. 令 $P_1,P_2,\cdots,P_\lambda$ 是 λ 个极大全迷向子空间, $(P_1,P_2,\cdots,P_\lambda)$ 叫做极大全迷向子空间的 λ 元组, 如果 $\dim(P_1\cap P_2)=\nu+(\delta-1)-1,\dim(P_1\cap P_1\cap P_3)=\nu+(\delta-1)-2,\cdots,\dim(P_1\cap P_1\cap P_3\cap\cdots P_\lambda)=\nu+\delta-\lambda$.

因为任何 $(\nu+\delta-\lambda)$ 维全迷向子空间是极大全迷向子空间的一个 λ 元组的交, 这个 S 的伪辛 Citical 指数也可以定义为 $\nu+\delta-1$ 维极大全迷向子空间 $P_i(i=1,2,...,\lambda)$ 所成的 λ 元组 $(P_1,P_2,\cdots,P_\lambda)$ 与 S 分离, 即 $(\bigcap\limits_{i=1}^{\lambda}P_i)\bigcap S=\phi$, 这些 λ 元组中, 最小的 λ 成为 S 的伪辛 Critical 指数. 按照惯例, 我们也认为 0 元组的全迷向子空间的交是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$.

令 S 是一个伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中非零向量的集合, $M(S)$ 是被线性无关向量定义的 S 上的 matriod, $L(M(S))$ 是 $M(S)$ 的面格, 一个迷向面也是一个向量迷向集, 显然, 向量迷向集的子集也是迷向的. 迷向面的集族在 $L(M(S))$ 中形成一个理想, $L_I(M(S))$.

引理 1.4 令 $r\leqslant m\leqslant\nu$. 在 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间上包含一个给定秩为 r 的迷向集的 m 维全迷向子空间的个数是

$$\begin{aligned} &N'(r,0,0,\varepsilon_1;m,0,0,\varepsilon;2\nu+\delta) \\ &= \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{m-r}\dfrac{q^{2(\nu-i+1-r)}-1}{q^i-1}, & \delta=1, \\ q^{m-r}\prod\limits_{i=0}^{m-r-1}\dfrac{q^{2(\nu-r-i)}-1}{q^{m-r-i}-1}+\prod\limits_{i=1}^{m-r-1}\dfrac{q^{2(\nu-r-i+1)}-1}{q^{m-r-i}-1}+\prod\limits_{i=0}^{m-r-1}\dfrac{q^{2(\nu-r-i+1)}-1}{q^{m-r-i}-1}, & \delta=2. \end{cases} \end{aligned}$$

证 明 当 $r=r(X)=0$ (此时也有 $\varepsilon_1=0$), 应用文献[4]中的推论 4.15可证.

现在假设 $r=r(X)>0$. 令 P 是一个 m 维全迷向子空间, $P\supseteq X$ 当且仅当 $P\supseteq\langle X\rangle$, 因此, 应用引理 1.2, 该引理得证.

推论 1.5 在 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间上包含一个给定秩为 r 的向量迷向集的 $\nu+\delta-1$ 维极大

全迷向子空间的个数是

$$N'(r,0,0,\varepsilon_1;\nu+\delta-1,0,0,\varepsilon;2\nu+\delta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{\nu-r}(q^i+1), & \delta=1,\\ (q^{\nu-r+1}+2)\prod\limits_{i=1}^{\nu-r}(q^i+1), & \delta=2.\end{cases}$$
$$=(q^{\nu-r+1}+2)^{\delta-1}\prod_{i=1}^{\nu-r}(q^i+1).$$

2　定理及推论

定理 2.1　设 S 是 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型非零向量的集合, $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 满足(1), (2)式, $M(S)$ 是被线性无关向量定义的matriod, $L(M(S))$ 是 $M(S)$ 的面格, $L_I(M(S))$ 是在格 $L(M(S))$ 中迷向面的理想, μ 是 $L(M(S))$ 上的Möbius函数, 那么, 对于任何正整数 $\lambda\leqslant\nu+\delta$, 分离 S 的 $(\nu+\delta)-\lambda$ 维全迷向子空间的个数是

$$\sum_{X\in L_I(M(S)):\ r(X)\leqslant\nu+\delta-\lambda}\mu(\phi,X)g(\lambda,X)$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{X\in L_I(M(S)):\\ r(X)\leqslant\nu+1-\lambda}}\mu(\phi,X)\prod\limits_{i=1}^{\nu-\lambda-r(X)+1}\dfrac{q^{2(\nu-i+1-r(X))}-1}{q^i-1}, & \delta=1,\\ \sum\limits_{\substack{X\in L_I(M(S)):\\ r(X)\leqslant\nu+2-\lambda}}\mu(\phi,X)(q^{\nu+2-\lambda-r(X)}f(0,0)+f(1,1)+f(0,1)), & \delta=2.\end{cases}$$

其中, $f(x,y)=\prod\limits_{i=x}^{\nu-\lambda-r(X)+1}\frac{q^{2(\nu-r(X)-i+y)}-1}{q^{\nu+2-\lambda-r(X)-i}-1}$.

证　明　令 X 是 $M(S)$ 的一个面, 用 $g(\lambda,X)$ 表示包含 X 的 $(\nu+\delta)-\lambda$ 维全迷向子空间的个数. 如果 X 是迷向的且 $r(X)\leqslant(\nu+\delta)-\lambda$, 那么, 应用引理1.4且简记 $f(x,y)=\prod\limits_{i=x}^{\nu-\lambda-r(X)+1}\frac{q^{2(\nu-r(X)-i+y)}-1}{q^{\nu+2-\lambda-r(X)-i}-1}$, 得

$$g(\lambda,X)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{\nu+1-\lambda-r(X)}\dfrac{q^{2(\nu-i+1-r(X))}-1}{q^i-1}, & \delta=1,\\ q^{\nu+2-\lambda-r(X)}f(0,0)+f(1,1)+f(0,1), & \delta=2.\end{cases}$$

如果 X 是非迷向的, 或 X 是迷向的但 $r(X)>(\nu+\delta)-\lambda$, 那么 $g(\lambda,X)=0$. 用 $f(\lambda,X)$ 表示 $P\cap S=X$ 的 $(\nu+\delta-\lambda)$ 维全迷向子空间 P 的个数, 那么

$$g(\lambda,X)=\sum_{Y\in L_I(M(S)):Y\supseteq X}f(\lambda,Y).$$

依据Möbius函数反演公式, 有

$$f(\lambda,Y)=\sum_{X\in L_I(M(S)):X\supseteq Y}\mu(Y,X)g(\lambda,X)$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{\substack{X\in L_I(M(S)):X\supseteq Y\\ \text{and } r(X)\leqslant\nu+1-\lambda}}\mu(Y,X)\prod\limits_{i=1}^{\nu+1-\lambda-r(X)}\dfrac{q^{2(\nu-i+1-r(X))}-1}{q^i-1}, & \delta=1,\\ \sum\limits_{\substack{X\in L_I(M(S)):X\supseteq Y\\ \text{and } r(X)\leqslant\nu+2-\lambda}}\mu(Y,X)(q^{\nu+2-\lambda-r(X)}f(0,0)+f(1,1)+f(0,1)), & \delta=2.\end{cases}$$

对于 $Y=\phi, f(\lambda,\phi)$ 是分离 S 的 $(\nu+\delta-\lambda)$ 维全迷向子空间的个数. 定理得证.

推论 2.2 令 S 是 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型非零向量的集合, $M(S), L(M(S)), L_I(M(S)), \mu$ 与定理 2.1 相同, 那么

$$\mathcal{C}(S,\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}) = \begin{cases} \min\{\lambda| \sum\limits_{\substack{X\in L_I(M(S))\\ \text{with } r(X)\leqslant \nu+1-\lambda}} \mu(\phi,X) \prod\limits_{i=1}^{\nu+1-\lambda-r(X)} \dfrac{q^{2(\nu-i+1-r(X))}-1}{q^i-1} \neq 0\}, & \delta=1,\\ \min\{\lambda| \sum\limits_{\substack{X\in L_I(M(S))\\ \text{with } r(X)\leqslant \nu+2-\lambda}} \mu(\phi,X)(q^{\nu+2-\lambda-r(X)}f(0,0)+f(1,1)+f(0,1)) \neq 0\}, & \delta=2. \end{cases}$$

其中, $f(x,y)=\prod\limits_{i=x}^{\nu-\lambda-r(X)+1} \frac{q^{2(\nu-r(X)-i+y)}-1}{q^{\nu+2-\lambda-r(X)-i}-1}$.

定理 2.3 令 S 是 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型非零向量的集合, 那么极大全迷向子空间的 λ 元组与 S 分离的个数为

$$\sum_{X\in L_I(M(S))} \mu(\phi,X)((q^{\nu-r(X)+1}+2)^{\delta-1}\prod_{i=1}^{\nu-r(X)}(q^i+1))^{\lambda}.$$

证 明 依据推论1.5, 应用定理2.1类似的方法可证该定理.

推论 2.4 令 S 是 $2\nu+\delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的 $(m,2s+\tau,s,\varepsilon)$ 型非零向量的集合, 那么

$$\mathcal{C}(S,\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)})=\min\{\lambda|\sum_{X\in L_I(M(S))}\mu(\phi,X)[(q^{\nu-r(X)+1}+2)^{\delta-1}\prod_{i=1}^{\nu-r(X)}(q^i+1)]^{\lambda}\neq 0\}.$$

致谢 衷心感谢审稿专家和编辑提出的宝贵修改意见.

[参 考 文 献]

[1] CRAPO H H, ROTA G C. On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries[M]. Cambridge: MIT Press, 1970.
[2] KUNG J P S. Pfaffian structures and critical problem in finite symplectic spaces[J]. Annals of Combinatorics, 1997(1): 159-172.
[3] WAN Z X. Critical problem in finite vector spaces[J]. Codes and Designs, 2002(10): 293-303.
[4] WAN Z X. Geometry of Classical Groups over Finite Fields[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2002.
[5] MARTIN A. Combinatorial Theory[M]. Berlin: Springer-Verlag Press, 1979.
[6] WELSH D J A. Matroid Theory[M]. London: Academic Press, 1976.

(上接第 118 页)

[8] 姚庆六. 非线性 Sturm-Liouville 边值问题的一个正解存在定理[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2009(1): 32-36.
YAO Q L. Existence theorem of positive solution to a nonlinear Sturm-Liouville problem [J]. J East China Normal University (Natural Science), 2009(1): 32-36.
[9] 程其骧, 张奠宙. 实变函数与泛函分析基础[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
CHEN Q X, ZHANG D Z. Foundation of Real Variables and Functional Analysis [M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2003.
[10] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用[M]. 科学出版社, 北京, 2008.
SUN J X. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications [M]. Beijing: Science Press, 2008.