

文章编号: 1000-5641(2010)06-0137-05

## 无赋权的 LEW 嵌入的图

曹倪, 刘妮, 任韩

(华东师范大学 数学系, 上海 200241)

**摘要:** 研究网格图  $G(a, b)$  ( $a \geq 2, b \geq 2$ ) 和 Möbius 梯子图  $G_n$  ( $n \geq 4$ ) 赋权的 LEW(大边宽度)嵌入问题, 证明这两类图分别在环面和射影平面上无赋权的 LEW 嵌入, 运用拓扑手术方式构造出可定向曲面  $S_n$  和不可定向曲面  $N_n$  上的无赋权的 LEW 嵌入图.

**关键词:** 网格图; Möbius 梯子图; LEW 嵌入; 可/不可定向曲面

**中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A

### Weighted graphs permitting no LEW-embeddings

CAO Ni, LIU Ni, REN Han

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

**Abstract:** This article studied the LEW (large edge width) embeddability of weighted grid graph  $G(a, b)$  ( $a \geq 2, b \geq 2$ ) and the Möbius ladder graph  $G_n$  ( $n \geq 4$ ) and showed that such two types of weighted graphs have no LEW-embeddings. Based on these two kinds of graphs weighted graphs were constructed which are strongly embedded in  $S_n$  and  $N_n$  and permit no LEW-embeddings in the same surface they embedded.

**Key words:** grid graph; Möbius ladder; LEW embedding; orientable/non-orientable surface

## 0 引 言

本文所涉及到的图都是简单连通图, 未说明的概念和术语均同文献 [1]. 用  $V(G), E(G)$  分别表示图  $G$  的顶点集, 边集. 一个曲面  $\Sigma$  是一个紧致连通的无边界 2-维流形. 所有的图嵌入都是 2-胞腔的(即每一个面都同胚于一个圆盘). 根据拓扑学, 所有曲面都可以分成两类: 可定向曲面和不可定向曲面. 如果将圆柱的两个端口以相同的方向粘接, 所得到的曲面是环面; 如果以相反的方向粘接两个端口, 则得到的曲面是 Klein 瓶. 将圆盘边界上每一对对径点进行黏合就得到射影平面. 环面上挖去一个开圆盘, 即在环面上挖去一个洞, 所得空间称为环柄. 在球面上挖去一个洞, 在洞口粘接一个环柄, 我们把这样的“手术”称为在环面上安插环柄. 如果在球面上安插  $n$  个环柄, 所得到的闭曲面称为亏格为  $n$  的可定向闭曲面  $S_n$ . 在球

收稿日期: 2009-11

基金项目: 国家自然科学基金(10671073)

作者简介: 曹倪, 男, 硕士.

通信作者: 任韩, 男, 教授. E-mail: hren@euler.math.ecnu.edu.cn.

面上挖去一个洞,在洞口粘接一个 Möbius 带,称为在球面上安插交叉帽.如果在球面上安插  $n$  个交叉帽,所得到的闭曲面称为亏格为  $n$  的不可定向闭曲面  $N_n$ .

两个图  $G_1$  和  $G_2$  的笛卡尔积图用  $G_1 \times G_2$  表示,它是这样一个图:点集  $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ ,边集  $E(G_1 \times G_2) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \mid u_1 = v_1 \text{ 且 } u_2 v_2 \in E(G_2) \text{ 或 } u_2 = v_2 \text{ 且 } u_1 v_1 \in E(G_1)\}$ ,而网格图  $G(m, n)$  是圈  $C_m$  与圈  $C_n$  的笛卡尔积. Möbius 梯子图是一个长为  $2n$  的圈  $C_{2n} = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$  加上  $n$  条弦  $(x_i, y_i), (1 \leq i \leq n)$ .

根据 C.Thomassen 和 B.Mohar 的约定<sup>[1]</sup>,一个图  $G$  的一个旋转系统  $\Pi = (\pi, \lambda)$  可以完全决定  $G$  在一个曲面上的嵌入,其中  $\pi$  是由图  $G$  的所有节点处与之关联边的循环置换,而  $\lambda$  是一个从  $E(G)$  到  $\{-1, +1\}$  的映射.如果在图  $G$  的嵌入  $\Pi$  中,圈  $C$  有偶数条指派为负的边,则  $C$  为  $\Pi$ -双侧圈,否则  $C$  是  $\Pi$ -单侧圈.设  $C = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{l-1} e_l v_0$  是  $\Pi$ -嵌入图  $G$  的一个双侧圈.不妨设  $\Pi$  在  $C$  的指派全为正的,对于所有的  $i = 1, \dots, l$ ,如果  $e_{i+1} = \pi_{v_i}^{k_i}(e_i)$ ,我们把所有的边  $\pi_{v_i}(e_i), \pi_{v_i}^2(e_i), \dots, \pi_{v_i}^{k_i-1}(e_i)$  称为圈  $C$  左侧的边.我们称所有包含一条  $C$  左侧边的  $C$ -桥的并是  $C$  的左图.记为  $G_l(C, \Pi)$  或简记为  $G_l(C)$ .类似可定义  $C$  的右图,记为  $G_r(C, \Pi)$  或简记为  $G_r(C)$ .如果  $G_l(C) \cup C$  或  $G_r(C) \cup C$  的亏格为 0,则称圈  $C$  为  $\Pi$ -可收缩圈;否则称  $C$  为  $\Pi$ -不可收缩圈.

任取图  $G$  中一点  $v$  以及  $v$  的关联边  $e = vu$ ,从  $v$  到  $u$  遍历  $e$ .沿着边  $e' = \pi_u(e)$  继续遍历,重复这个过程,除非遍历到一条指派为  $-1$  的边.我们将用相反的旋来决定遍历的下一条边.直到以相同方向遍历到初始边  $e$  时,就产生了一个面迹  $Q$ .在面迹  $Q$  中出现两次的点为奇异点,出现两次的边为奇异边.称无奇异点和无奇异边的面迹为面圈  $C$ .

设  $\Pi$  是图  $G$  的一个嵌入,则称最短的  $\Pi$ -不可收缩圈  $C$  的长度为边宽度,记为  $ew(G, \Pi)$ .如果  $G$  只有可收缩圈,则  $ew(G, \Pi) = \infty$ .对于图  $G$  的一个嵌入  $\Pi$ ,如果边宽度  $ew(G, \Pi)$  大于最大  $\Pi$ -面迹  $Q$  的长度  $l(Q)$ ,即有  $ew(G, \Pi) > l(Q)$  则称嵌入  $\Pi$  是 LEW(large-edge-width) 嵌入.若存在边权值函数  $W: E(G) \rightarrow R^+$  满足对于任意的  $\Pi$ -面迹  $Q$ ,任意的  $\Pi$ -不可收缩圈  $C$ ,有  $W(Q) < W(C)$ ,则称  $\Pi$  是图  $G$  的赋权的 LEW 嵌入,函数  $W$  是 LEW 嵌入权值函数.

本文首先证明网格图  $G(a, b)$  ( $a \geq 2, b \geq 2$ ) 和 Möbius 梯子图  $G_n$  ( $n \geq 4$ ) 分别在环面和射影平面上没有赋权的 LEW 嵌入.然后通过手术粘合的方式,利用网格图  $G(a, b)$  和 Möbius 梯子图  $G_n$  构造出两类图分别在可定向曲面  $S_n$  和不可定向曲面  $N_n$  上没有赋权的 LEW 嵌入.

## 1 赋权网格图在环面上无 LEW-嵌入

设  $\Pi_0$  是网格图  $G(a, b)$  ( $a \geq 2, b \geq 2$ ) 在环面上的嵌入(如图 1 所示).其中  $a$  表示嵌入图中横向直线的条数, $b$  表示纵向直线的条数.

**定理 1** 如果  $(a-2)(b-2) \leq 4$ ,则网格图  $G(a, b)$  在环面上无赋权的 LEW 嵌入.

**证明** 由图 1 可知,网格图  $G(a, b)$  在环面上的嵌入  $\Pi_0$  中,有  $ab$  个面圈, $a+b$  个不可收缩圈( $a$  个横向的, $b$  个纵向的),且  $ab$  个面圈的权和为  $2 \sum_{e \in G(a,b)} w(e)$ , $a+b$  个不可收缩圈的权和为  $\sum_{e \in G(a,b)} w(e)$ .则如果

$$\frac{2 \sum_{e \in G(a,b)} w(e)}{ab} \geq \frac{\sum_{e \in G(a,b)} w(e)}{a+b}. \quad (1)$$

化简 (1) 式, 有

$$(a - 2)(b - 2) \leq 4, \tag{2}$$

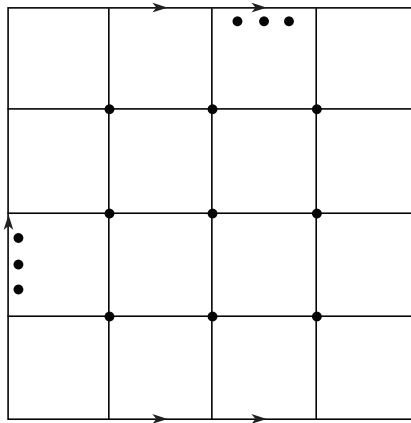


图 1 网格图在环面上的嵌入

Fig. 1 Embedding grid graph in the torus

所以只要  $a, b$  满足 (2) 式, 网格图  $G(a, b)$  无带权的 LEW 嵌入.

## 2 Möbius 梯子图在射影平面上无赋权的 LEW 嵌入

C.Thomassen 证明了, 图  $G$  的赋权的 LEW 嵌入一定是最小亏格嵌入<sup>[1]</sup>, 所以, 只需考虑 Möbius 梯子图  $G_n(n \geq 4)$  在射影平面上的嵌入.

**定理 2** Möbius 梯子图  $G_n(n \geq 4)$  在射影平面上只有两类嵌入, 它们都对应于 Hamilton 圈  $C = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$  是可收缩的情形.

**证明** (1) 如果  $C$  是可收缩圈, 则显然只有两类嵌入:  $\Pi_1$  如图 2(a) 所示, 其中只有一个面不是 4-边形, 其中最短不可收缩圈长= $n+1$ ;  $\Pi_2$  如图 2(b) 所示, 其中有两个面不是 4-边形, 其中最短不可收缩圈长为 4.

(2) 如果  $C$  是不可收缩圈, 将  $C$  先嵌入到射影平面上, 得到一个面  $f$  的嵌入. 然后考虑将两条边  $x_1y_1$  和  $x_2y_2$  画入到  $f$  内部的画法. 不难看出, 此时它们各自有两种画入  $f$  内部的画法, 一共组成 4 种将它们同时画入  $f$  内部的画法. 对于每一种画法, 边  $x_1y_1$  和  $x_2y_2$  将  $f$  的内部自然分化成为 3 个内部不交的区域. 在此条件下, 要想再将边  $x_3y_3$  和  $x_4y_4$  同时画入必然要在边  $x_1y_1$  或  $x_2y_2$  上产生交叉, 从而导致  $G_n$  无法嵌入到射影平面上.

综上所述, Möbius 梯子图  $G_n(n \geq 4)$  在射影平面上只有两类嵌入, 它们对应于情形(1)中  $C$  为可收缩圈的情形.

**注意** 满足定理 1-2 中条件的图有无限多个, 且均可为非平面的(含有 Kuratowski 子图).

**定理 3** Möbius 梯子图  $G_n(n \geq 4)$  在射影平面上无赋权的 LEW 嵌入.

**证明** 反证法, 设 Möbius 梯子图  $G_n, (n \geq 4)$  在射影平面上的嵌入只有两类:  $\Pi_1$  如图 2(a) 所示,  $\Pi_2$  如图 2(b) 右侧所示.

假设 Möbius 梯子图  $G_n$  在射影平面上存在权值函数  $W$ , 使得  $G$  的任意面圈  $Q$ , 任意不可收缩圈  $C$  有

$$W(Q) < W(C). \tag{3}$$

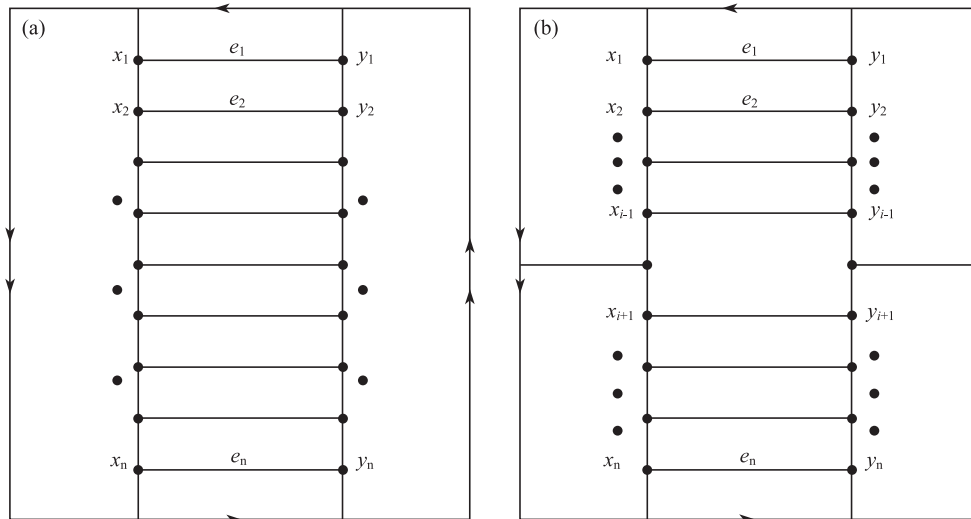


图 2 Möbius 梯子图在射影平面上的两类嵌入

Fig. 2 Two types of embeddings of Möbius ladder graph

在  $\Pi_1$  的情况中, 对于面圈  $Q_1 = x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, x_1$  和不可收缩圈  $C_1 = x_1, y_1, y_2, \dots, y_n, x_1$ ,  $C_2 = y_1, y_2, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1$ , 利用 (3) 式有

$$W(x_1y_1) > \sum_{i=1}^{n-1} W(x_i x_{i+1}) + W(x_n y_1),$$

$$W(x_2y_2) > \sum_{i=2}^{n-1} W(y_i y_{i+1}) + W(x_1 y_n) + W(x_1 x_2).$$

现在考虑面圈  $Q_2 = x_1 y_1 y_2 x_2 x_1$ . 有

$$\begin{aligned} W(Q_2) &= W(x_1y_1) + W(y_1y_2) + W(x_2y_2) + W(x_1x_2) \\ &> W(x_1x_2) + W(y_1y_2) + W(x_1y_1) + \sum_{i=2}^{n-1} W(y_i y_{i+1}) + W(x_1 y_n) + W(x_1 x_2) \\ &> \sum_{i=1}^{n-1} W(y_i y_{i+1}) + W(x_1 y_n) + W(x_1 y_1) \\ &= W(C_1). \text{ 矛盾!} \end{aligned}$$

在  $\Pi_2$  的情况中, 对于面圈  $Q_1 = x_i, x_{i+1}, y_{i+1}, y_i, y_{i-1}, x_{i-1}$  和不可收缩圈  $x_i, x_{i+1}, y_{i+1}, y_i$ , 利用 (3) 式有  $W(x_i y_i) > W(x_i x_{i-1}) + W(x_{i-1} y_{i-1}) + W(y_{i-1} y_i)$ . 对于面圈  $Q_2 = x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_i$  和不可收缩圈  $x_{i-1}, x_i, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$ , 有  $W(x_{i-1} x_i) + W(x_{i-1} y_{i-1}) > W(x_i y_i) + W(y_{i-1} y_i)$ . 将以上两式相加, 可得  $0 > 2W(y_{i-1} y_i)$ . 矛盾!

所以 Möbius 梯子图  $G_n (n \geq 2)$  在射影平面上无带权的 LEW 嵌入.

### 3 构造 $S_n$ 上的无赋权的 LEW 嵌入

前面已经知道,  $(a-2)(b-2) \leq 4$  时, 网格图  $G(a, b)$  在环面上都没有赋权的 LEW 嵌入. 故任意取两个在环面上无赋权的 LEW 嵌入的网格图, 不妨就取  $G(a, b)$  两个相同的嵌入  $\Pi', \Pi''$ ,

如图 3 所示. 分别在  $\Pi', \Pi''$  的任意面  $F', F''$  内部各挖去一个闭圆盘  $ABCD$ , 并在  $\Pi'$  上连接  $V'_{11}A, V'_{12}B$ , 在  $\Pi''$  上连接  $V''_{11}B, V''_{12}A$ , 这里,  $V'_{11}V'_{12}$  和  $V''_{11}V''_{12}$  分别是  $F', F''$  边界上的边.

最后将两曲面作连通和(如文献[3]中定义)运算, 即按图中方式进行粘贴, 如图 3 所示. 记所得图的嵌入为  $\Pi^*$ .

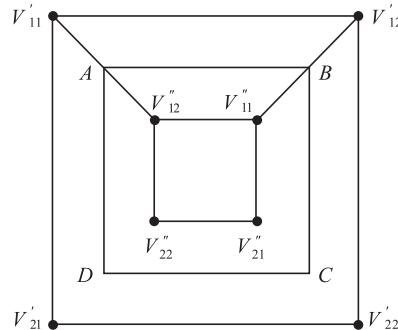


图 3  $S_2$  上无 LEW-嵌入的赋权图

Fig. 3 A graph without LEW-embedding on  $S_2$

**定理 4**  $\Pi^*$  是可定向曲面  $S_2$  的无赋权 LEW 嵌入图.

**证明** 设环面网格图嵌入  $\Pi', \Pi''$  的顶点数, 边数, 面数分别是  $n', q', f'$  和  $n'', q'', f''$ . 由欧拉公式有

$$n' - q' + f' = 2 - 2g_1, \quad n'' - q'' + f'' = 2 - 2g_2. \tag{4}$$

而从图 3 中可以看出, 嵌入图  $\Pi^*$  的顶点数, 边数, 面数分别是  $n' + n'', q' + q'' + 2, f' + f''$ , 则由式 (4) 有  $(n' + n'') - (q' + q'') + (f' + f'') = 4 - 2(g_1 + g_2)$ , 或  $(n' + n'') - (q' + q'' + 2) + (f' + f'') = 2 - 2(g_1 + g_2)$ . 所以  $\Pi^*$  是粘贴后所得图在曲面  $S_2$  上的嵌入. 考虑嵌入图  $\Pi^*$ , 可知有  $2ab$  个面圈,  $2(a + b)$  个不可收缩圈, 且  $2ab$  个面圈的权值和是  $2 \sum_{e \in G(a,b)} w(e)$ ,  $2(a + b)$  个不可收缩圈的权

和是  $\sum_{e \in G(a,b)} w(e) - W(e_1) - w(e_2)$ , 其中  $e_1 = V'_{11}V'_{12}, e_2 = V'_{12}V''_{11}$ . 因为  $a, b$  满足 (1) 式, 则

$$\frac{2 \sum_{e \in G(a,b)} w(e)}{2ab} \geq \frac{\sum_{e \in G(a,b)} w(e)}{2(a + b)} \geq \frac{\sum_{e \in G(a,b)} w(e) - W(e_1) - w(e_2)}{2(a + b)}.$$

故这样作连通和所得到图的嵌入是  $S_2$  上无赋权的 LEW 嵌入.

可以看出, 按照这种方式利用网格图  $G(a, b)$  作连通和, 容易构造可定向曲面  $S_n$  上无赋权的 LEW 嵌入图. 类似地, 我们也可以很容易地用 Möbius 梯子图在  $N_1$  嵌入图进行两两粘贴, 构造出不可定向曲面  $N_n$  上无赋权的 LEW 嵌入图.

[参 考 文 献]

[ 1 ] MOHAR B, THOMASSEN C. Graphs on Surfaces [M]. Maryland: Johns Hopkins university Press, 2001.  
 [ 2 ] WEST D B. Introduction to Graph Theory [M]. Beijing: China Machine Press, 2004.  
 [ 3 ] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997.  
 YOU C Y. Basic Topology [M]. Beijing: University Press, 1997.