文章编号：1000-4750(2013)02-0464-06

狭窄血管处管壁的变形与应力分析

刘 纯，白象忠，李小宝

(燕山大学建筑工程与力学学院，秦皇岛 066004)

摘 要：该文根据血液流动连续性方程、运动方程及血管壁弹性力学方程，通过边界条件的耦合，在给定了血压波形函数的基础上，假设堵塞斑块与血管壁弹性性质相同时，求解了狭窄血管管壁的径向位移及环向应力；分析了不同狭窄程度对血管壁变形及应力的影响；给出了不同狭窄状态下，血管植入支架所需的支撑力，从而计算出植入支架后血管壁的径向位移及应力状态。该文的研究结果可为临床上对狭窄血管植入支架的变形与受力分析提供参考。

关键词：流固耦合；变形与应力；相容拉格朗日-欧拉法；血管堵塞；支架

中图分类号：O343; R322 **文献标志码**：A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.08.0521

DEFORMATION AND STRESS ANALYSIS OF STENOSED VESSELS

LIU Chun , BAI Xiang-zhong , LI Xiao-bao

(College of Civil Engineering & Meehanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: In this paper radial displacement and hoop stress of stenosed vessels are calculated based on the blood continuity equation, the blood motion equation, supposing that the blocking plaques and vessel wall are the same in their elastic properties, the vessel motion equation and the assumed blood pressure waveform function. The influence of the vessel stenosis's variation on the deformation and stress of vessels is analyzed. The supporting forces of the stents implanted in vessels under different stenosis's situation, and the corresponding radial displacement and hoop stress of vessels are obtained. The results in this paper can be adopted as a reference for the deformation and stress analysis of the stents implanted in stenosed vessels.

Key words: fluid-solid coupling; deformation and stress; united Lagrangian-Eulerian; vascular plug; stent

动脉局部狭窄将导致血管壁的非正常变形，且会影响动脉中的血液流动状态。这种变化又会反过来促进动脉局部狭窄的进一步发展。于是，在对动脉局部狭窄血管进行生理、病理研究的同时，有必要深入地研究局部狭窄区域管壁的变形情况，以便了解血液流动和血管弹性等诸因素可能对动脉局部狭窄发展的影响[1]。在动脉系统的一些部位，由于某种原因产生血管内壁的异常增生，将会造成动脉血管的局部狭窄[2−3]。例如，动脉粥样硬化斑块的形成和发展所造成动脉血管的局部狭窄，对血液的流动将会产生一系列的影响，其主要表现在：增加了血液流动阻力，减少了血液的流量，进而使血管壁的变形变小；局部狭窄附近的细胞增生，会逐步加大狭窄的严重程度，增大了血管完全堵塞的危险性；血管壁组织的损伤将会导致狭窄后局部扩张等[4−6]。

可见，动脉血管局部狭窄对人体是十分有害的。因此，有关动脉局部狭窄的形成、发展以及其对动脉管壁变形方面的研究，便成为当前重要的研究课题之一[7]。

本文根据心血管流体力学和弹性力学的基本理论，在给出了血液流动的连续性方程、运动方程

收稿日期：2011-08-11；修改日期：2011-12-11
基金项目：国家自然科学基金项目(50875230)
通讯作者：白象忠(1942−)，男(满族)，辽宁辽中人，教授，博导，从事耦合场理论及其应用研究(E-mail: baixiangzhong@sohu.com).
作者简介：刘 纯(1980−)，女，河北衡水人，硕士生，从事流固耦合理论及其应用研究(E-mail: lyzchun999@126.com)；
李小宝(1983−)，女，河北保定人，硕士生，从事流固耦合理论及其应用研究(E-mail: liyufei66@163.com).

$$u(x,R(x),t)=\frac{\partial\varsigma(x,t)}{\partial t} \tag{9}$$

$$v(x,R(x),t)=\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t} \tag{10}$$

1.5 血管壁的环向应力状态

考虑到血管壁的轴向变形非常小，由广义虎克定律有：

$$\begin{aligned}\sigma_\theta&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta+\mu\varepsilon_r),\\ \varepsilon_r&=\frac{1}{E}(\sigma_r-\mu\sigma_\theta)=\frac{1}{E}(-p-\mu\sigma_\theta),\\ \varepsilon_\theta&=\frac{1}{E}(\sigma_\theta-\mu\sigma_r)=\frac{1}{E}(\sigma_\theta+\mu p)。\end{aligned} \tag{11}$$

其中，ε_θ、ε_r为血管壁的环向应变和径向应变。

由式(11)可得血管内壁处的环向应力$\sigma_{\theta1}$为：

$$\sigma_{\theta1}=E\varepsilon_\theta-\mu p$$

血管外壁处的环向应力$\sigma_{\theta2}$为：

$$\sigma_{\theta2}=E\varepsilon_\theta-\mu p_{\mathrm{e}}$$

因为血压p一般情况下大于血管壁外部压力p_{e}，所以将血管壁外壁的环向应力记为σ_θ，且：

$$\sigma_\theta=E\frac{\xi}{R(x)}-\mu p_{\mathrm{e}}=\frac{(1-\mu^2)(p-p_{\mathrm{e}})R(x)}{h}-\mu p_{\mathrm{e}} \tag{12}$$

2 血管壁的变形与应力计算

由于心脏的间歇性射血，使动脉中流动的参数——压力、速度等都是一些随时间变化的量。对于血管壁的每一微元，都在作周期振荡。正常成年人按心动周期作用的血压波形如图 2 所示，压力和流速的波动方程可按时间分段写成下面的形式：

$$X_n=\begin{cases}X_{1n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\dfrac{1}{3}X_{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t}, & 0<t\leqslant\dfrac{4}{15}\mathrm{s}\\ X_{1n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\dfrac{1}{5}X_{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t}, & \dfrac{4}{15}\mathrm{s}<t\leqslant0.4\mathrm{s}\\ X_{1n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\dfrac{1}{3}X_{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t}, & 0.4\mathrm{s}<t\leqslant\dfrac{2}{3}\mathrm{s}\\ X_{1n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\dfrac{1}{5}X_{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t}, & \dfrac{2}{3}\mathrm{s}<t\leqslant0.8\mathrm{s}\end{cases} \tag{13}$$

当n取不同值时，式(13)表示为不同的方程组。取$n=1$时，$X_1=p-p_e$，$X_{11}=p_1(x)$，$X_{21}=p_2(x)$；取$n=2$时，$X_2=u$，$X_{12}=u_1(r,x)$，$X_{22}=u_2(r,x)$；取$n=3$时，$X_3=v$，$X_{13}=v_1(r,x)$，$X_{23}=v_2(r,x)$。由此构成了 3 个相互独立的方程组。其中，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$为圆频率，$T=0.8\mathrm{s}$；$p_1(x)$、$p_2(x)$，$u_1(r,x)$、$u_2(r,x)$，$v_1(r,x)$、$v_2(r,x)$分别为各频段的血压压力、血液运动的轴向速度及径向速度的幅值分量。

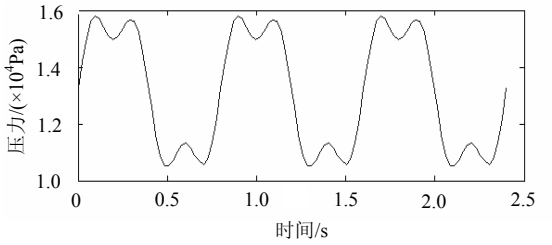

图 2 血液压力波形图

Fig.2 Blood pressure waveform

当$0<t\leqslant\dfrac{4}{15}\mathrm{s}$、$0.4\mathrm{s}<t\leqslant\dfrac{2}{3}\mathrm{s}$时，先取$p-p_{\mathrm{e}}$、$u$、$v$的第一项，即有：

$$\begin{aligned}(p-p_{\mathrm{e}})_{\mathrm{I}}&=p_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\\ u_{\mathrm{I}}&=u_1(r,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\\ v_{\mathrm{I}}&=v_1(r,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}。\end{aligned} \tag{14}$$

将式(13)代入式(4)，得：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_1)=0,\\ &\upsilon\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)-\mathrm{i}\omega u_1=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x}。\end{aligned} \tag{15}$$

考虑到在$r=0$处，u_1、v_1为有限值；在$r=R(x)$处，$u_1=0$、$v_1=0$。得：

$$u_1(x,r)=\frac{1}{\rho\omega\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{J_0(\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}r)}{J_0[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]}-1\right\} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}v_1(x,r)=&\\ &-\frac{1}{\rho\omega\mathrm{i}}\left\{\frac{\mathrm{d}^2p_1}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{J_1(\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}r)}{\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}J_0(\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}r)}-\frac{r}{2}\right)+\right.\\ &\left.\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x}\frac{J_1(\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}r)J_1[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]}{J_0^2[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]}\right\}\end{aligned} \tag{17}$$

其中：J_0、J_1分别为零阶、一阶 Bessel 函数。

在弹性狭窄管的管壁$r=R(x)$上，有：

$$v=\frac{\partial\xi}{\partial t} \tag{18}$$

则由式(17)、式(18)、式(8)可得到一个关于p_1的方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2p_1}{\mathrm{d}x^2}+M\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x}-Np_1=0 \tag{19}$$

其中：

$$M=\frac{2}{R(x)}.$$

$$\frac{J_1^2[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]}{J_0[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]J_2[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]}\frac{\mathrm{d}R(x)}{\mathrm{d}x},$$

$$N=\frac{2(1-\mu^2)\omega^2R(x)}{Eh\upsilon^2}\frac{J_0[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]}{J_2[\sqrt{-\mathrm{i}\omega/\upsilon}R(x)]}。$$

上式中：J_2 为二阶 Bessel 函数。

根据参考文献[1]给出的方法：利用最小二乘法，将式(19)的系数展开为虚数的形式；将展开的系数代入到式(19)中将方程转化为一个 Kummer 方程，解此方程，可计算得 p_1 的表达式为：

$$p_1(x)=A_1\frac{(1-\mu^2)\omega^2}{Eh\upsilon^2}\left[\sqrt{\frac{\omega}{\upsilon}}R(x)\right]^{1.23}\mathrm{e}^{0.1123\left[\sqrt{\frac{\omega}{\upsilon}}R(x)\right]} \tag{20}$$

其中，A_1 为待定常数。

当 $0<t\leqslant\frac{4}{15}$s、$0.4\mathrm{s}<t\leqslant\frac{2}{3}$s 时，再取 p、u、v 的第二项，有：

$$\begin{aligned}(p-p_\mathrm{e})_{\mathrm{II}}&=\frac{1}{3}p_2(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t},\\ u_{\mathrm{II}}&=\frac{1}{3}u_2(r,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t},\\ v_{\mathrm{II}}&=\frac{1}{3}v_2(r,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega t}。\end{aligned} \tag{21}$$

同理可得 p_2 的表达式为：

$$p_2(x)=A_2\frac{(1-\mu^2)\omega^2}{Eh}\left[\sqrt{\frac{3\omega}{\upsilon}}R(x)\right]^{1.23}\mathrm{e}^{0.1123\left[\sqrt{\frac{3\omega}{\upsilon}}R(x)\right]} \tag{22}$$

其中，A_2 为待定常数。

根据实际血液压力波形图 3，利用叠加法可得 $p-p_\mathrm{e}$ 的表达式为：

$$\begin{aligned}p-p_\mathrm{e}=&\frac{(1-\mu^2)\omega^2}{Eh}\Big\{A_1[\sqrt{\omega/\upsilon}R(x)]^{1.23}\cdot\\ &\mathrm{e}^{0.1123[\sqrt{\omega/\upsilon}R(x)]}[\sin(\omega t)+B]+A_2[\sqrt{3\omega/\upsilon}R(x)]^{1.23}\cdot\\ &\mathrm{e}^{0.1123[\sqrt{3\omega/\upsilon}R(x)]}\left[\frac{1}{3}(\sin(3\omega t)+B)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{23}$$

式中：B 为根据血压波形的具体数值来确定的常数。同理，可得到在 $\frac{4}{15}\mathrm{s}<t\leqslant0.4\mathrm{s}$、$\frac{2}{3}\mathrm{s}<t\leqslant0.8\mathrm{s}$ 时间段内的表达式为：

$$\begin{aligned}p-p_\mathrm{e}=&\frac{(1-\mu^2)\omega^2}{Eh}\Big\{A_1[\sqrt{\omega/\upsilon}R(x)]^{1.23}\cdot\\ &\mathrm{e}^{0.1123[\sqrt{\omega/\upsilon}R(x)]}[\sin(\omega t)+B]+A_2[\sqrt{3\omega/\upsilon}R(x)]^{1.23}\cdot\\ &\mathrm{e}^{0.1123[\sqrt{3\omega/\upsilon}R(x)]}\left[\frac{1}{5}(\sin(3\omega t)+B)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{24}$$

根据图 3，在一个心动周期内，已知当 $t=0.3$s 时，收缩压为血压的取值为 120mmHg 这时 $p-p_\mathrm{e}=1.58\times10^4$ Pa；当 $t=0.7$s 时，舒张压为 80mmHg，$p-p_\mathrm{e}=1.05\times10^4$ Pa；血液最大流速为 $u=0.6$m/s [1]。根据上述 3 个条件可求得 $A_1=532$、$A_2=158$、$B=3.5$。

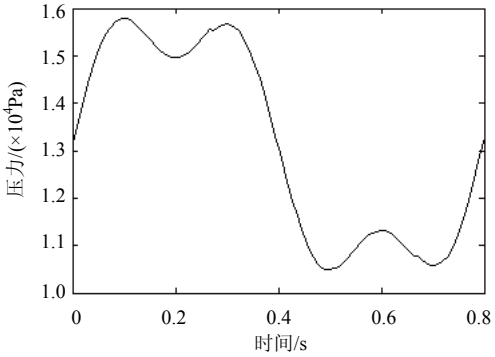

图 3　血液压力波形图

Fig.3　Blood pressure waveform

3　算例及结果分析

已知血管的半径 $R_0=0.6$cm，壁厚 $h=0.65$mm，假设血管壁与血管内斑块材料的弹性模量均为 $E=4.7\times10^5$ Pa，泊松比为 $\mu=0.3$；心动周期 $T=0.8$s，圆频率 $\omega=7.85$ rad/s；外压力 $p_\mathrm{e}=3.8$kPa，血液质量密度 $\rho=1.05\times10^3$ kg/m^3，血液动力粘度 $\eta=4.2\times10^{-3}$ Pa·s，血液运动粘度 $\upsilon=\eta/\rho=4\times10^{-6}$ m^2/s。经计算可得到血管的径向位移及应力状态。

图 4 显示的是正常血管(无狭窄部分)在一个心动周期内血管壁的径向位移。图 5、图 6 分别从不同角度显示了当血压为120mmHg 时，血管壁的径向位移。图 5 是从一个心动周期角度来描述堵塞程度不同时，血管壁的径向位移随时间变化的情况，而图 6 是当堵塞程度不同时，径向位移随轴向位置变化的情况。从图 5 可以看到，狭窄程度不同，径向位移是有差别的，特别是与图 4 正常血管的径向位移相差得很大。当狭窄达到一定程度时，根据伯努力方程可知：最狭窄处血液流速变大、压力变小。当内压小于外压时，则会出现负位移。图 7、图 8 表示了狭窄程度不同时，在上述条件下环向应力随时间和狭窄处不同位置的变化情况。

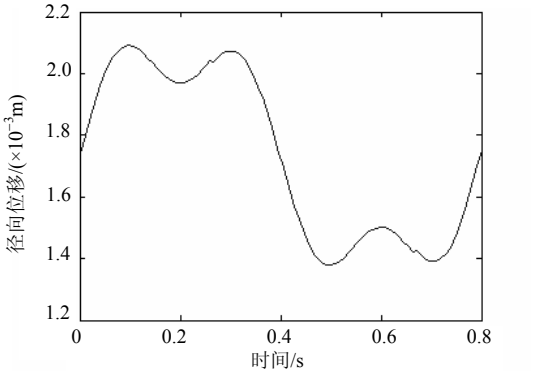

图 4 正常血管在一个心动周期的径向位移

Fig.4 Normal blood vessels in a cardiac cycle cycle of radial displacement

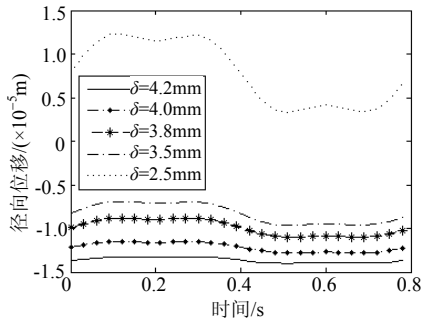

图 5 x=0 处δ 不同时管壁在一个心动周期的径向位移

Fig.5 δ not the same wall in a cardiac cycle of radial displacement, when x=0

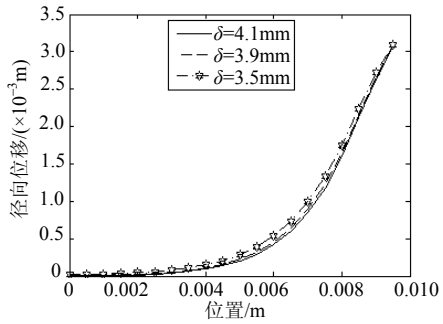

图 6 δ 取不同值时管壁的径向位移沿轴向坐标变化的曲线

Fig.6 δ take different value wall radial displacement along the axial coordinates the curve of the change

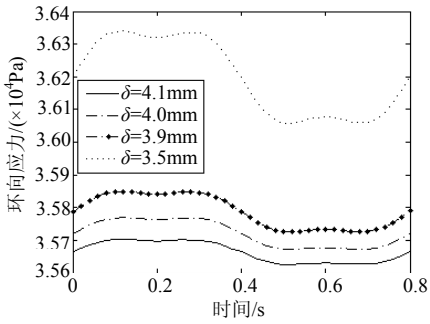

图 7 x=0 处δ 不同时管壁在一个心动周期的环向应力

Fig.7 δ is not the same wall of radial stress, when x=0

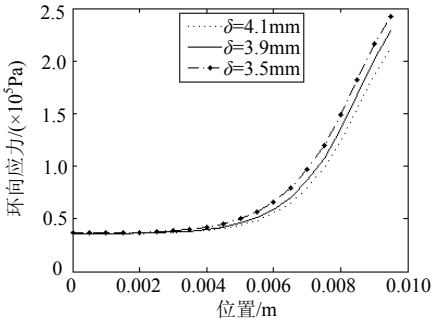

图 8 δ 不同时管壁的环向应力

Fig.8 δ is not the same wall of the radial stress

4 支架弹性支撑力的确定

通过上面的分析可知——血管狭窄处的径向位移非常小。为了保证血管内血液的正常流动，阻止动脉粥样硬化进一步发展，医学上通常在狭窄达到一定程度时在血管内植入支架，如图 9 所示[10−11]。假设在血管内给一个支撑压力 p'，使血管内斑块在此力作用下狭窄处的径向位移为 $\xi = R_0 - R(x)$。由式(7)有：

$$p' = \frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{R_0 - R(x)}{R^2(x)} + p_e \tag{25}$$

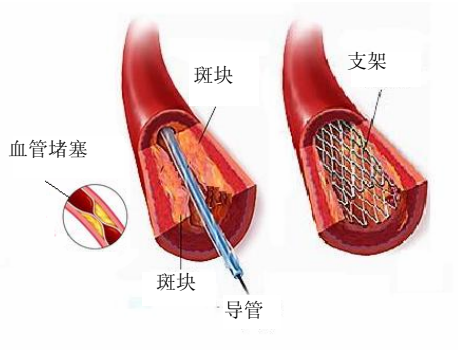

图 9 狭窄血管植入支架

Fig.9 After vascular stent implantation

假设给定动脉血管的许用应力为 $[\sigma] = 2\text{MPa}$，鉴于医学使用的支架是金属材料制成的，只要支架能把最狭窄的部分撑起，血管壁的其他部分随之产生变形。根据实际情况，这里只讨论最狭窄处 $(x = 0)$ 这一位置的径向位移及环向应力的情况。表 1 给出了血管堵塞程度不同时，植入支架后管壁的径向位移，血管外壁的环向应力的数值及所需要的弹性支撑力。可见当 $\delta = 4.7\text{mm}$ 时，血管壁的环向应力 $\sigma < 2\text{MPa}$，但是与血管壁的许用应力特别接近。从表 1 中数据可知：只有当 δ 值小于等于某一数值时，才可以安全地植入支架，否则可能会引起血管的破裂。

表 1　狭窄处植入支架后管壁的位移及应力

Table 1　narrow place after stent placement wall displacement and stress

δ / mm	堵塞面积/(%)	血管内支撑压力 p' / MPa	血管壁径向位移 ξ / mm	血管壁环向应力 σ_θ / MPa
$\delta = 3.0$	75.0	0.175	3.57	0.559
$\delta = 3.5$	82.6	0.221	4.06	0.763
$\delta = 4.0$	88.9	0.268	4.57	1.071
$\delta = 4.5$	93.8	0.315	5.05	1.582
$\delta = 4.7$	95.3	0.333	5.27	1.915
$\delta = 4.8$	96.0	0.343	5.37	2.113

5　结论

在正常血压波动的作用下，血管最狭窄处的径向位移非常小，为了保证血管的正常工作，医学上就必须软化并清除斑块。如果狭窄程度大，则必须考虑在血管内植入支架，这在临床中已经得到充分的证实。但是当血管堵塞的程度不同时，必须考虑植入支架后血管壁的环向应力的大小，否则可能造成血管的破裂；特别是当血管壁已经硬化，弹性模量较大、弹性性能低下的情况，更是必需慎重处理的。

工作状态下的血管壁变形及应力状态的定量计算，可用来作为制定动脉粥样硬化判别准则的基础。

参考文献：

[1] 柳兆荣. 心血管流体力学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1986: 30－41, 130－135, 256－264.
Liu Zhaorong. Cardiovascular fluid mechanics [M]. Shanghai: Fudan University Press, 1986: 30－41, 130－135, 256－264. (in Chinese)

[2] 赵一博, 王礼广. 狭窄动脉血管中血液流动的 ALE 有限元分析[J]. 湖南工业大学学报, 2010, 24(3): 25－29.
Zhao Yibo, Wang Liguang. Blood flow in the arteries narrow the ALE finite element analysis [J]. Hunan University of Technology, 2010, 24(3): 25－29. (in Chinese)

[3] Long Q, Ku X Y, Ramnarine K V, et al. Numerical investigation of physioloygically realistic pulsatile flow through aterial stenosis [J]. Journal of Biomechanics, 2001, 34(10): 1229－1242.

[4] Fry D L. Certain histological and chemical reponses of the vascular interface to acutely induced mechanical stress in the aorta of the dog [J]. Circulation, 1969, 24: 93－108.

[5] Fry D L. Certain chemorheological considerations regarding the blood vascular inteface with particular reference to coronary artery disease [J]. Circulation, 1969, 40(5S4): 38－57.

[6] 柳兆荣, 滕忠兆, 覃开蓉. 脉动流条件下血管壁的应力分布[J]. 力学学报, 2002, 34(5): 696－704.
Liu Zhaorong, Teng Zhongzhao, Tan Kairong. Vessel wall under pulsatile flow conditions, the stress distribution [J]. Mechanical Science, 2002, 34(5): 696－704. (in Chinese)

[7] 杜健航, 余志, 包芸, 靳亚非. 局部狭窄动脉内血流动力学环境的动态数值研究[J]. 水动力学研究及发展, 2006, 21(1): 1－7.
Du Jianhang, Yu Zhi, Bao Yun, Jin Yafei. Local intra-arterial stenosis hemodynamic values of the dynamic environment [J]. Hydrodynamic Research and Development, 2006, 21(1): 1－7. (in Chinese)

[8] 柳兆荣, 李惜惜. 弹性腔理论及其在心血管系统分析中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1986: 32－48.
Liu Zhaorong, Li Xixi. Elasticity theory and its cavity in the cardiovascular system Analysis [M]. Beijing: Science Press, 1986: 32－48. (in Chinese)

[9] 白象忠, 郝亚娟. 非线性流体弹性力学研究进展[J]. 力学进展, 2008, 38(5): 545－560.
Bai Xiangzhong, Hao Yajuan. Advances in nonlinear hydroelasticity [J]. Advances in Mechanics, 2008, 38(5): 545－560. (in Chinese)

[10] 王跃轩, 易红, 倪中华, 顾兴中. 医用血管支架生物力学性能分析方法研究[J]. 东南大学学报, 2005, 35(2): 216－221.
Wang Yuexuan, Yi Hong, Ni Zhonghua, Gu Xingzhong. Medical stent biomechanical analysis method [J]. Southeast University, 2005, 35(2): 216 － 221. (in Chinese)

[11] 皇甫强, 于振涛, 罗丽娟, 等. 新型高强度钛合金血管支架的制备与性能研究[J]. 稀有金属, 2006, 30(专辑): 125－128.
Huang Fuqiang, Yu Zhentao, Luo Lijuan, et al. New high-strength titanium alloy stent Preparation and Properties [J]. Rare, 2006, 30(Spec.): 125－128. (in Chinese)