

文章编号: 1000-4750(2013)04-0023-05

基于 Kriging 代理模型的拉压不同模量 平面问题的近似求解

张国庆, 杨海天

(大连理工大学工程力学系/工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁, 大连 116024)

摘 要: 该文建议采用 Kriging 代理模型数值求解拉压不同模量平面问题。通过本构方程光滑化、有限元法及拉丁超立方采样技术, 对拉压不同模量桁架与二维平面问题, 给出了基于 Kriging 模型的近似数值解, 以代理基于有限元的数值解, 并探讨了样本点数目和问题规模对所建 Kriging 近似模型求解精度/效率的影响。数值算例表明: 所提方法可为求解拉压不同模量平面问题提供精度合理的近似数值解。当问题规模较大且正问题需要多次求解时, 该方法有望显著减少计算时间, 这对于降低拉压不同模量反问题与优化问题的计算开销十分重要。

关键词: 双模量; Kriging 代理模型; 平面问题; 有限元; 计算开销

中图分类号: O343.5 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.12.0825

AN APPROXIMATE SOLUTION FOR THE BIMODULAR PLANE PROBLEM BASED ON KRIGING SURROGATE MODEL

ZHANG Guo-qing, YANG Hai-tian

(Department of Mechanics / State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: Kriging surrogate model is suggested to approximate the solutions of bimodular plane elastic problems. By utilizing a smoothed constitutive equation, finite element method, and the Latin hypercube sampling skill, a Kriging model based approximate numerical solution is presented to surrogate the FEM based solution of bimodular trusses and 2D plane problems. The impacts of sample numbers and problem scales on the computing accuracy/efficiency of the surrogate model are investigated. Numerical tests indicate that the proposed approach is capable of providing an approximate numerical solution with a reasonable computing accuracy for the bimodular plane problem, and considerable amount of computing time can be saved particularly when the solutions of direct bimodular problems are continually required and the problem scale is relatively large. The work presented in this paper is significantly valuable for saving computing time in solving the inverse bimodular problem and bimodular optimization problem.

Key words: bimodulus; Kriging surrogate model; plane problems; FEM; computing expense

拉压不同模量材料是实际工程问题中经常碰到的一类材料^[1]。拉压不同模量是指材料在受拉与受压时具有不同的弹性模量, 其本构关系如图 1 所示^[2]。本构关系的非线性使得拉压不同模量问题一般难于解析求解, 而数值求解往往需要多次迭

代^[3-4], 导致计算时间大幅增加。特别是在拉压不同模量反问题与优化问题的求解中, 由于需要不断求解正问题, 将导致计算量显著增加。文献[5]在二维拉压不同模量平面结构反问题求解中, 计算耗时接近 50h。因此, 如何降低不同模量问题数值求解

收稿日期: 2011-12-06; 修改日期: 2012-03-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(10421002, 10772035, 10721062, 11072043); 国家“973”重点基础研究发展规划项目(2005CB321704, 2010CB832703)

通讯作者: 杨海天(1956—), 男, 浙江黄岩人, 教授, 博士, 博导, 从事计算固体力学研究(E-mail: haitian@dlut.edu.cn).

作者简介: 张国庆(1984—), 男, 河南焦作人, 博士生, 从事计算固体力学研究(E-mail: jiaozuo-zhangguoqing@sina.com).

的计算成本,具有重要的理论探讨价值与工程实用意义。为此,本文建议采用 Kriging 代理模型技术求解拉压不同模量问题。

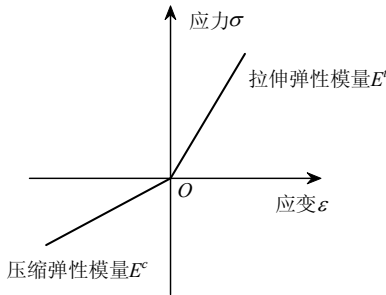


图1 拉压不同模量材料本构关系

Fig.1 Constitutive relation of the bimodulus materials

代理模型技术,是指在保持一定精度的前提下,通过前期试验设计采样,利用样本点上的高保真数值分析或试验结果,构造一个计算开销小的数学模型,替代原来计算开销昂贵的数值模型,以显著的降低计算成本。常用的代理模型主要有多项式响应面、Kriging、径向基函数和多元自适应回归样条函数^[6-7]等。相比而言,Kriging 模型在求解非线性程度较高的问题时精度最好,但其建模成本较高^[6]。考虑到拉压不同模量问题的非线性,为保证足够的计算精度,本文采用 Kriging 模型。它最早被地质学家用来估计采样矿石的性质^[7],随后被广泛应用于空间统计学^[8]、概念设计^[9]、结构优化^[10]、多学科优化^[11]以及航天机械工程^[12-13]等学科当中。但利用 Kriging 模型求解拉压不同模量问题的工作目前还未见文献报道。

因此本文利用有限元与拉丁超立方采样技术,构造了基于 Kriging 代理模型的拉压不同模量平面问题的近似求解模型,通过算例进行了计算精度与计算时间上的数值验证。结果分析表明:局限于建模成本较高^[6],当正问题求解次数较少时,基于 Kriging 模型的近似计算并不能降低计算开销。但当问题计算规模较大,需要多次正问题求解时,Kriging 模型可作为有限元解的一个很好的“代理”,大幅降低数值计算时间,并有望在拉压不同模量反问题与优化问题的求解中显著减少计算开销。

1 拉压不同模量结构的光滑化本构方程及有限元求解

对于桁架结构,第 i 根杆光滑后的本构方程^[3]:

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix} d_i(\sigma) [\cos \alpha_i \quad \sin \alpha_i] \varepsilon_i \quad (1)$$

式中: $d_i = E^t \left(\frac{e^{p\varepsilon_i}}{1+e^{p\varepsilon_i}} \right) + E^c \left(\frac{e^{-p\varepsilon_i}}{1+e^{-p\varepsilon_i}} \right)$; α_i 为 i 号杆轴线与总体坐标系 x 轴的夹角。

对于二维平面结构,主坐标系下的光滑化本构关系为^[4]:

$$\{\varepsilon_1\} = [A(\sigma_1)] \{\sigma_1\} \quad (2)$$

其中: $\{\varepsilon_1\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}^T$, $\{\sigma_1\} = \{\sigma_1, \sigma_2\}^T$ 分别代表主应变向量和主应力向量; $[A]$ 是由主应力状态决定的柔性矩阵,表达式为:

$$[A(\sigma_1)] = \begin{bmatrix} f(\sigma_1) & c \\ c & f(\sigma_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中:

$$f(\sigma_i) = \frac{1}{p} \ln(1+e^{p\sigma_i}) \cdot \frac{1}{|\sigma_i|} \cdot \frac{1}{E^t} + \frac{1}{p} \ln(1+e^{-p\sigma_i}) \cdot \frac{1}{|\sigma_i|} \cdot \frac{1}{E^c}, \quad c = -\frac{\mu^c}{E^c} = -\frac{\mu^t}{E^t}, \quad E^t, E^c, \mu^t \text{ 和 } \mu^c \text{ 分别代表拉压弹性模量和拉压泊松比。}$$

把式(1)和式(2)代入虚功方程后,即可得到整体有限元方程^[3-4]:

$$[K(\mathbf{u})] \{\mathbf{u}\} = \{P\} \quad (4)$$

其中: $\{\mathbf{u}\}$ 是总结点位移向量; $[K(\mathbf{u})]$ 是总刚度矩阵。

式(4)的求解,桁架结构采用敏度类的 Newton-Raphson 算法^[4],二维平面结构采用初应力法^[3]。

2 Kriging 模型的构造

2.1 Kriging 模型的基本理论

Kriging 模型由一个参数模型和一个非参数随机过程构成,是一种基于统计理论的半插值技术^[7]。给定训练样本 $S = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, m 是样本点的个数。系统的响应值与自变量之间的关系可以表示成如下的形式^[7]:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}) \quad (5)$$

其中: $y(\mathbf{x})$ 是待拟合的响应函数; $\boldsymbol{\beta}$ 是回归系数; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在设计空间中模拟全局近似; $z(\mathbf{x})$ 是期望为 0、方差为 σ_z^2 的高斯随机分布过程,模拟局部偏差,其协方差矩阵如下:

$$\text{Cov}[Z(x_i), Z(x_j)] = \sigma_z^2 R_{ij}(\theta, x_i, x_j) \quad (6)$$

式中: R 是含有参数 θ 的高斯相关函数,表示样本点之间相关性,其表达式为:

$$R(\theta, x_i, x_j) = \sum_{k=1}^n \exp(-\theta_k |x_i^k - x_j^k|^2)$$

其中： n 是设计变量的个数； x_i^k 和 x_j^k 分别是样本点 x_i 、 x_j 的第 k 个分量。

在以上假定的基础上，采用训练样本响应值 $Y=[y_1, y_2, \dots, y_m]$ 的线性组合来估计待测点 x_{new} 的响应值和误差，并使其预测误差的均值为零，方差最小^[14]。从而可以得到预测响应值和预测值误差的方差分别为：

$$y_{new}(x_{new}) = f(x_{new})^T \beta' + r(x_{new})^T \gamma' \quad (7)$$

$$\phi(x_{new}) = \sigma_z^2 [1 + \zeta^T (F^T R^{-1} F)^{-1} \zeta - r^T R^{-1} r] \quad (8)$$

式中：

$$R = \begin{pmatrix} R(\theta, x_1, x_1) & \dots & R(\theta, x_1, x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ R(\theta, x_m, x_1) & \dots & R(\theta, x_m, x_m) \end{pmatrix}$$

是由不同样本点处的相关函数构成的相关矩阵； $r(\theta, x_{new}, S) =$

$$[R(\theta, x_{new}, x_1), R(\theta, x_{new}, x_2), \dots, R(\theta, x_{new}, x_m)]$$

是表示预测点与各样本点之间相关性的相关矩阵。而：

$$\begin{aligned} F &= [f_1, f_2, \dots, f_m]^T, \\ \beta' &= (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} Y, \\ \gamma' &= R^{-1} (Y - F\beta'), \\ \zeta &= F^T R^{-1} r - f. \end{aligned}$$

为了达到较好的精度， $f(x)$ 均采用 2 阶多项式。 σ_z^2 和 $r(x_{new})$ 中的未知参数 θ 则利用最大似然估计法求得。

2.2 Kriging 模型构造过程

用 Kriging 代理模型求解拉压不同模量问题的具体求解过程如下：

1) 首先给定 E^t (或 E^c) 的值，选择 E^c/E^t 和结构空间点的坐标值 x, y (针对二维平面结构) 作为设计变量，并给出其变化范围。对于桁架 $E^c/E^t \in (0, 20]$ ；二维平面结构 $E^c/E^t \in (0, 10]$ ，坐标变量按照结构尺寸和边界条件设定变化范围；

2) 利用拉丁超立方采样^[15]在变量取值范围内选取训练和测试样本点，由有限元法求出各训练样本点的位移，调用 Matlab-DACE 工具箱^[16]构造 Kriging 模型；

3) 比较在测试样本处 Kriging 解和有限元解的精度与计算时间；改变样本点的数目，比较 Kriging 模型的精度变化。

3 算例结果与对比分析

3.1 算例及结果分析

算例 1. 考虑图 2 所示的超静定桁架，荷载如图 2，由于是对称结构，选取一半进行有限元计算。设定 $E^t = 11.8\text{MPa}$ ，在取值范围内选取 100 个训练样本。空间上分别选择 8 个(图 3 中标出)和 12 个结点位移作为训练样本的响应向量。表 1 给出了验证点处近似解与有限元解在精度上的对比，最大相对误差分别为 2.04% 和 16.5%，12 个空间点近似的精度要明显好于 8 个，这表明 Kriging 模型的精度随着空间取点数目的增多而提高。

表 1 有限元解与近似解精度的比较 /m

Table 1 Accuracy comparison between FEM and Kriging model

测试样本	$E^c/E^t = 4.99$		$E^c/E^t = 10.01$				$E^c/E^t = 15.00$			
	有限元解	近似解		有限元解	近似解		有限元解	近似解		
		12 空间点	8 空间点		12 空间点	8 空间点		12 空间点	8 空间点	
u_2	7.59931×10^{-5}	7.60514×10^{-5}	7.62043×10^{-5}	6.84339×10^{-5}	6.895×10^{-5}	7.023×10^{-5}	4.68537×10^{-5}	4.67951×10^{-5}	4.81362×10^{-5}	
u_3	1.88102×10^{-5}	1.8724×10^{-5}	1.9091×10^{-5}	2.90124×10^{-5}	2.9031×10^{-5}	2.99634×10^{-5}	3.2459×10^{-5}	3.2414×10^{-5}	3.4137×10^{-5}	
u_4	0.000128777	0.000129011	0.0001326327	0.000117673	0.000114952	0.000100367	0.00009651	0.000094971	0.000091634	
u_5	4.19197×10^{-5}	4.20056×10^{-5}	3.82011×10^{-5}	4.07696×10^{-5}	4.07102×10^{-5}	4.2168×10^{-5}	3.88349×10^{-5}	3.87936×10^{-5}	3.9726×10^{-5}	
u_6	0.000152686	0.000153061	0.0001604384	0.000141683	0.000141834	0.0001206	0.000126419	0.0001259341	0.00013064	
v_7	-0.000422817	-0.000426315	-0.000430392	-0.000370691	-0.0003689	-0.00031294	-0.00024291	-0.000246349	-0.000229362	
v_8	-0.000489744	-0.00049021	-0.00044032	-0.000429928	-0.000421637	-0.000490365	-0.000362549	-0.000357634	-0.00034691	
v_9	-0.000488986	-0.000482173	-0.00040839	-0.00042942	-0.00043167	-0.000442067	-0.00036917	-0.000365731	-0.000342106	
v_{10}	-0.000527633	-0.0005319	-0.00060231	-0.000463679	-0.0004597	-0.000513647	-0.000342691	-0.000346827	-0.000321638	
v_{11}	-0.000526867	-0.0005306	-0.000441364	-0.000463162	-0.000459327	-0.000402039	-0.000203649	-0.000205961	-0.000223691	
v_{12}	-0.000539987	-0.000530196	-0.000603948	-0.000474704	-0.0004734	-0.000537324	-0.000296413	-0.000290346	-0.000316394	
v_{13}	-0.000539225	-0.000542138	-0.000562367	-0.000474188	-0.00047026	-0.000449638	-0.000203623	-0.000199492	-0.000183621	

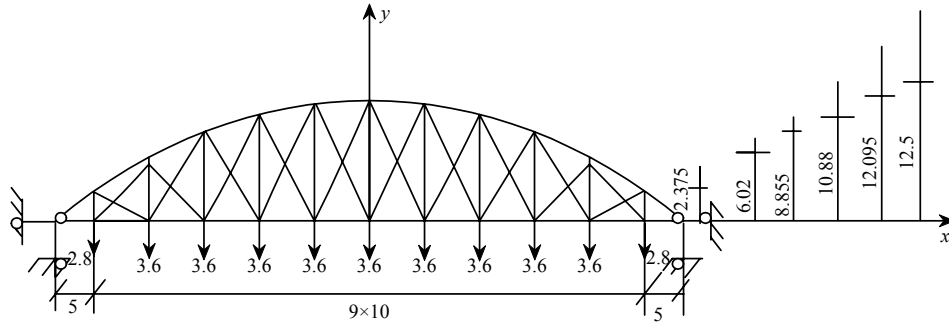


图2 24 结点 55 杆超静定桁架

Fig.2 Statically indeterminate truss with 24 nodes and 55 bars

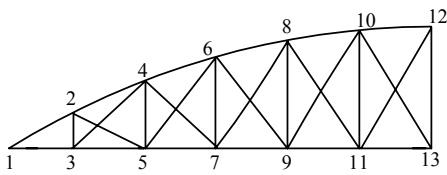


图3 对称计算

Fig.3 The model for symmetric computation

算例 2. 如图 4 所示为一边长 2m 的方形薄板的有限元网格图。取 $E^c = 185\text{MPa}$ 。由于结构左边界固定，坐标变量的变化范围设定为： $x \in [-0.999, 1.0]$ ， $y \in [-1.0, 1.0]$ 。表 2 为近似解与有限元解在部分测试样本上精度的对比，3 种数目样本点建模求解的最大相对误差分别为 1.08%，8.50%和 14.5%。

表 3 给出了在不同测试样本处，两种方法单次计算时间的比较(8×8 划分有限元网格，500 个样本点构造 Kriging 模型)。

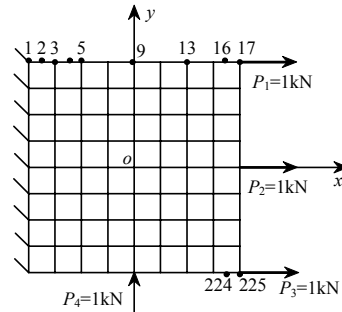


图4 不同模量薄板及有限元网格划分(8×8)
Fig.4 A bimodulus plate with FEM mesh (8×8)

表 2 有限元解与近似解精度的对比 /mm

Table 2 Accuracy comparison between FEM and Kriging

测试样本	$E^c/E^t = 3.00$				$E^c/E^t = 5.00$				$E^c/E^t = 10.00$			
	有限元解	近似解			有限元解	近似解			有限元解	近似解		
结点位移		500 样本点	200 样本点	100 样本点		500 样本点	200 样本点	100 样本点		500 样本点	200 样本点	100 样本点
u_5	0.4650	0.46732	0.49177	0.53264	0.46102	0.45423	0.44198	0.50063	0.45034	0.44093	0.48862	0.51137
u_9	0.52255	0.52459	0.54619	0.57639	0.51778	0.51836	0.53719	0.47752	0.48216	0.47374	0.51064	0.43329
u_{13}	0.56793	0.56634	0.58934	0.51136	0.56264	0.56977	0.52296	0.62394	0.55178	0.54751	0.53098	0.50119
u_{17}	0.58968	0.58934	0.55946	0.64314	0.58421	0.59037	0.61247	0.52239	0.55436	0.56039	0.52962	0.47726

表 3 测试样本点处求解时间的比较

Table 3 Comparison of computing time on testing sample points

工况	$E^c/E^t = 1.00$		$E^c/E^t = 3.00$		$E^c/E^t = 5.00$		$E^c/E^t = 10.00$	
	有限元解	近似解	有限元解	近似解	有限元解	近似解	有限元解	近似解
计算时间/ min	0.78	0.03	2.37	0.03	5.59	0.03	14.74	0.03

为了更详细的说明样本点数目和问题规模对 Kriging 求解的影响，定义系统误差：

$$\varepsilon_s = \sqrt{\sum_{i=1}^{2k} \left(\frac{u_i^{\text{Kriging}} - u_i^{\text{FEM}}}{u_i^{\text{FEM}}} \right)^2} \quad (9)$$

其中， u_i^{Kriging} 和 u_i^{FEM} 分别为测试样本处的近似解和有限元解(包括 x 和 y 两个方向)。测试样本 $k=208$ ，

其中坐标变量变化范围内的样本点选取所有有限元单元结点。

图 5 给出了 10 种不同数目训练样本建模，3 种有限元网格划分情况下，Kriging 模型在相同测试样本处求解的系统误差变化趋势。表 2、表 3 与图 5 说明，Kriging 模型能够大幅的降低单次数值求解正问题的时间，且随着建模样本点数目的增大与有限

元网络的加密, Kriging 模型近似求解的精度均得到了提高。但上述两种方式同时也增加了有限元数值求解的计算量, 从而导致 Kriging 模型的建模成本大幅提升, 如表 4 所示(测试样本为 $E^c/E^t = 5.00$, 500 个样本点建模)。

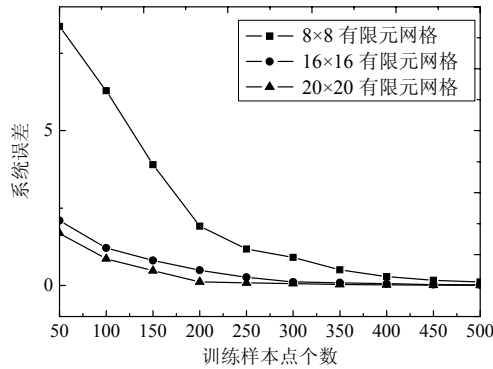


图 5 近似解系统误差变化趋势

Fig.5 Variation tendency of system error for Kriging

表 4 有限元网格密度对单次求解时间及 Kriging 建模时间的影响

Table 4 Impact of FEM mesh density on computing time and Kriging modeling time

有限元网格 划分形式	正问题单次数值求解时间/min		Kriging 模型 建模时间/min
	有限元法	Kriging	
8×8	5.59	0.03	1483.62
16×16	7.86	0.0299	1734.49
20×20	10.17	0.0299	1816.75

3.2 计算时间分析

Kriging 模型的建模时间是采样, 计算样本点响应和拟合模型的时间之和, 与样本点的选取方法、数目、样本点响应的计算方法及问题的规模等因素有关, 其建模成本较高。因此当问题规模较小或正问题求解次数较少时, 整个计算时间的主体是“建模时间”, “近似数值求解”(单次)时间远低于有限元求解的优点未能体现出来, Kriging 模型的求解效率并不如有限元求解(表 5 中正问题计算 50 次和 100 次)。但使用代理模型的初衷之一, 就是通过代理近似降低那些单次求解较为耗时并且需要多次求解的问题的计算开销。因此当问题规模较大且正问题需要多次求解时, 由于 Kriging 模型建模过程只需要一次, 且其单次的求解时间要远低于有限元求解, Kriging 模型才能显现出其在计算效率方面的优点。在利用蚁群算法^[17]求解某拉压不同模量反问题至解收敛时调用正问题求解器达 5122 次。以求解算例 2 中单次求解耗时最长的情况为例 ($E^c/E^t = 10.0$, 500 个样本点建模, 8×8 划分有限

元网格), 正问题求解 5000 次时计算效率可提高近 44 倍, 如表 5 所示。

表 5 Kriging 模型和有限元法用于反演计算时间的对比
Table 5 Comparison of computing time between Kriging and FEM when applied to inverse problem

算例	Kriging 建模时间	正问题求解次数及计算时间					
		50 次	100 次	500 次	1000 次	2000 次	5000 次
算例 1	1483.62	有限元 737.0	1474	7370	14740	29480	73700
算例 2	间/min Kriging 1485.12	1486.62	1498.62	1518.62	1548.62	1638.62	

4 结论

本文的主要工作是提出了一种基于 Kriging 代理模型的求解拉压不同模量平面问题的数值近似方法。通过数值算例, 详实分析了样本点数目和问题规模对 Kriging 模型计算精度与计算时间的影响。分析表明: 所提方法在具有处理高度非线性, 且计算规模较大, 需要多次求解的问题时精度较好, 能够显著缩减数值计算时间。这对于降低拉压不同模量反问题与优化问题的计算开销十分重要。

参考文献:

- [1] 何晓婷. 拉压不同模量弹性结构的非线性力学行为研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2007.
He Xiaoting. Study on nonlinear mechanics behavior of elastic structure with different tension and compression moduli [D]. Chongqing: Chongqing University, 2007. (in Chinese)
- [2] 阿姆巴尔楚米扬 C A. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
Ambartsumyan C A. The different modulus of elasticity [M]. Translated by Wu Ruifeng, Zhang Yunzhen. Beijing: Chinese Railway Press, 1986: 2-3. (in Chinese)
- [3] 杨海天, 朱应利. 光滑函数法求解拉压不同弹性模量问题[J]. 计算力学学报, 2006, 23(1): 19-23.
Yang Haitian, Zhu Yingli. Solving elasticity problems with bimodulus via a smoothing technique [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(1): 19-23. (in Chinese)
- [4] 杨海天, 张晓月, 何宜谦. 两级敏度分析求解双弹性模量桁架结构反问题[J]. 固体力学学报, 2010, 31(2): 198-204.
Yang Haitian, Zhang Xiaoyue, He Yiqian. Solving inverse bimodular problems of truss structures via two-level sensitivity analysis [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2010, 31(2): 198-204. (in Chinese)

- Dalian University of Technology, 2009. (in Chinese)
- [8] 邹志利, 戴遗山. 回转体二阶绕射压力和绕射力[J]. 中国造船, 1992, 33(1): 1—18.
Zou Zhili, Dai Yishan. Second-order diffraction pressure and forces on an axisymmetric body subjected to stokes waves [J]. Ship Building of China, 1992, 33(1): 1—18. (in Chinese)
- [9] 贺五洲, 陈炜. Stokes波在铅垂圆柱上绕射的二阶分析[J]. 工程力学, 2004, 21(6): 177—182.
He Wuzhou, Chen Wei. Second order analysis of diffraction of stokes waves by a vertical cylinder [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(6): 177—182. (in Chinese)
- [10] 戴遗山. 船舶在波浪中运动的频域与时域势流理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998: 178—197.
Dai Yishan. Potential flow theory of ship motions in waves in frequency and time domain [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1998: 178—197. (in Chinese)

(上接第 27 页)

- [5] Yang H T, Xu M L. Solving inverse bimodular problems via artificial neural network [J]. Inverse Problems in Science and Engineering, 2009, 17(8): 999—1017.
- [6] Jin R, Chen Wei, Simpson T W. Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 23(1): 1—13.
- [7] 高月华. 基于 Kriging 代理模型的优化设计方法及其在注塑成型中的应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2008: 16, 19—22.
Gao Yuehua. Optimization methods based on kriging surrogate model and their application in injection molding [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008: 16, 19—22. (in Chinese)
- [8] Martin J D, Simpson T W. On the use of kriging models to approximate deterministic computer models [C]// ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Salt Lake City, Utah, USA, 2004: 1—2.
- [9] Pacheco J E, Amon C H, Finger S. Bayesian surrogates applied to conceptual stages of the engineering design process [J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125: 664—672.
- [10] Booker A J, Dennis J E. A rigorous framework for optimization of expensive functions by surrogates [J]. Structural Optimization, 1999, 17(1): 1—13.
- [11] Koch P N, Wujek B A, Golovidov O, Simpson T W. Facilitating probabilistic multidisciplinary design optimization using kriging approximation models [C]// 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. Atlanta, Georgia, 2002: 14—23.
- [12] Simpson T W. Comparison of response surface and kriging models in the multidisciplinary design of an aerospike nozzle [R]. Langley Research Center, NASA, Hampton, VA, 1998: 7—16.
- [13] Yang R J, Wang N, Tho C H, Bobineau J P, Wang B P. Metamodeling development for vehicle frontal impact simulation [J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127: 1014—1020.
- [14] 刘纪涛, 刘飞, 张为华. 基于拉丁超立方抽样及响应面的结构模糊分析[J]. 机械强度, 2011, 33(1): 73—76.
Liu Jitao, Liu Fei, Zhang Weihua. Fuzzy structure analysis based on latin hypercube sampling and response surface [J]. Journal of Mechanical Strength, 2011, 33(1): 73—76. (in Chinese)
- [15] Macay M D, Beckman R J, Conover W J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code [J]. Technometrics, 1979, 21(2): 239—245.
- [16] Lophaven S N, Nielsen H B, Sondergaard J. DACE-A matlab kriging toolbox, technical report IMM-TR-2002-12, Informatics and mathematical modelling [R]. Denmark: Technical University of Denmark, 2002: 13—20.
- [17] 段海滨. 蚁群算法原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 176—187.
Duan Haibin. Ant colony algorithm: Theory and applications [M]. Beijing: Science Press, 2005: 176—187. (in Chinese)