

文章编号: 1000-4750(2013)04-0136-10

多自由度一般积分型粘弹性阻尼减震结构的 随机响应与等效阻尼

李创第, 邹万杰, 葛新广, 李 瞰

(广西工学院土建系, 柳州 545006)

摘 要: 该文对任意多自由度带支撑一般积分型粘滞和粘弹性阻尼器减震结构的随机响应与等效阻尼比的解析分析进行了系统研究。首先建立了结构一般运动方程; 然后将运动方程化为振型广义坐标的微分和积分混合地震响应方程组; 继而基于多自由度随机平均法理论, 获得了结构随机平均 Itô 方程组的解析式, 推导出耗能结构各振型振子的振幅与相位瞬态联合概率密度函数、位移与速度瞬态联合概率密度函数、位移与速度瞬态响应方差的一般解析解; 最后, 基于与多自由度随机平均法分析完全相同的等效准则, 建立了耗能结构各振型等效阻尼比的一般解析式, 并根据 CQC 和 SRSS 组合方法, 建立了耗能结构随机地震响应方差的解析式, 给出了带支撑广义 Maxwell 阻尼器和广义微分模型阻尼器减震结构随机响应和各振型等效阻尼比的一般解析式, 通过与一些典型问题的模态应变能法的计算精度对比分析, 表明了所提方法的有效性, 使耗能结构可直接应用反应谱法进行设计, 从而建立了带支撑任意线性粘滞和粘弹性阻尼器一般耗能结构随机响应与特性等效阻尼分析的完备解析解法。

关键词: 一般积分型粘弹性阻尼器; 支撑; 多自由度减震结构; 随机平均法; 随机响应特性; 振型等效阻尼比; 反应谱法

中图分类号: TU313.3 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.11.0743

RANDOM RESPONSE AND EQUIVALENT DAMPING OF MDOF DISSIPATION STRUCTURES WITH GENERAL INTEGRAL MODEL VISCOELASTIC DAMPERS

LI Chuang-di, ZOU Wan-jie, GE Xin-guang, LI Tun

(Department of Civil Engineering, Guangxi Institute of Technology, Liuzhou 545006, China)

Abstracts: The complete analytical methods for random earthquake response and equivalent damping of arbitrary MDOF dissipation structures with supporting braces and general integral model viscoelastic dampers in series are studied systematically. The structural response equations are firstly established. Then, by using the modal analytical method, the dynamic integral-differential model earthquake response equations are established. And then, by using the MDOF stochastic averaging method, the structural stochastic averaging Itô equations are established, the analytical formulas of the drift vector and the diffusion matrix of averaging Itô equations are given, the analytical solutions of the transient joint probability density function for every structural modal amplitude and phase, for every structural modal displacement and velocity are derived, the analytical solutions of transient mean-square values of various structural modal displacements and velocities are established. By the

收稿日期: 2011-11-01; 修改日期: 2012-03-17

基金项目: 广西高校百名中青年学科带头人计划项目(RC20060814017); 广西自然科学基金项目(0481001); 广西科学基金项目(0575021); 广西教育厅科研项目(0508052)

通讯作者: 李创第(1964—), 男, 广西柳州人, 教授, 博士, 从事结构抗震研究(E-mail: Lichuangdi1964@163.com).

作者简介: 邹万杰(1974—), 男, 广西柳州人, 副教授, 博士, 从事结构抗震研究(E-mail: 705450818@qq.com);

葛新广(1977—), 男, 安徽亳州人, 讲师, 硕士, 从事结构抗震研究(E-mail: gxgzlr.2008@163.com);

李 瞰(1973—), 男, 广西柳州人, 副教授, 硕士, 从事结构抗风/抗震研究(E-mail: leetun1973@163.com).

equivalent criterion of which all random response characteristics are identical in the meaning of MDOF stochastic averaging analysis, the analytic formulas of every modal equivalent damping ratio are established, which make it possible for structures to use response spectrum technique. Lastly, by CQC and SRSS methods, the analytic formulas for the random earthquake response of foregoing MDOF dissipation structures are given, the analytical formulas of the foregoing random response characteristics and every structural modal equivalent damping ratio for MDOF dissipation structures with supporting braces and general Maxwell model dampers and general differential model dampers in series are given, it is verified that the proposed methods are effective through accuracy in comparison with the Modal Strain Energy method for some typical problems, so the complete solutions of random earthquake response characteristics and equivalent damping for arbitrary MDOF dissipation structures with supporting braces and arbitrary linear viscous and viscoelastic dampers in series are achieved.

Key words: general integral model viscoelastic dampers; brace; MDOF dissipation structures; stochastic averaging method; random response characteristics; modal equivalent damping ratio; response spectrum method

粘滞和粘弹性阻尼器等被动控制技术已广泛应用^[1-3], 此类结构的抗震设计国内外仍普遍采用反应谱法, 故合理确定其等效阻尼至关重要。

对于不考虑支撑影响的粘滞和粘弹性阻尼器耗能结构, 文献[3]已建立了强行解耦法近似计算各振型的等效阻尼比, 文献[1]引入航空领域提出的模态应变能法^[4]近似计算等效阻尼比。研究表明这两种方法所得结果相同, 本质上是一致的^[3]。对于支撑的影响, 在试验和大量数值计算的基础上, 我国抗震规范通过限制最小支撑刚度来保证复合阻尼元件发挥或接近纯阻尼元件的功效^[3]。

文献[4]的附录和文献[2]给出了模态应变能法的详细推导, 其基本假设是: 1) 线弹性小阻尼; 2) 结构能用实模态解耦; 3) 不考虑粘弹性的应变历史记忆特性; 4) 瑞雷原理可推广至复数域, 且实模态可趋近复模态; 5) 强迫振动的能量比可用自由振动的能量比近似。其推导过程主要依据能量的物理意义和概念, 在一定程度上缺乏较严格的数学推导。对于阻尼器均匀布置的实际耗能结构, 假设 1) 和假设 2) 易于近似满足^[5], 但对于假设 3), 则随结构、阻尼器和激励的动力特性不同, 可能会产生较大误差^[6]; 对于假设 4), 则在物理意义上并不能完全实现^[4], 对于假设 5), 由于自由振动与强迫振动的不同, 也会产生一定误差。

随机平均法是一类预测结构随机响应特性的有效近似方法^[7], 其基本假设是小阻尼和宽带弱激励。与模态应变能法相比, 具有较为严密的理论依据, 易于理解和得出一般意义的解析解, 且在线性小阻尼情况下, 可得出与强行振型解耦法相同的结

果。事实上, 近年来线性与非线性随机振动的重要理论成果, 基本上都是应用随机平均法而获得^[8]。

研究表明: 支撑对结构响应有重要影响^[3], 能综合表征粘弹性阻尼器的瞬时弹性、蠕变、松弛和应变记忆的一般计算模型是积分型模型^[9]。

本文应用多自由度随机平均法, 采用一般积分型粘弹性阻尼器分析模型, 同时考虑支撑、阻尼器应变历史、结构和激励的动力特性的综合影响, 基于与随机平均分析完全相同的等效准则, 建立任意多自由度带支撑一般积分型粘滞和粘弹性阻尼器减震结构随机响应和等效阻尼解析分析方法, 使此类结构可直接应用反应谱法进行减震工程设计。

1 结构运动方程

设结构的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵分别为 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 和 \mathbf{C} , 层间质量、刚度和阻尼分别为 m_i 、 k_i 、 c_i , $i=1\sim n$; 各层设置 n_i 个带支撑的一般积分型粘滞或粘弹性阻尼器 $p_i(t)$, 其与支撑 k_{bi} 串联后的修正阻尼器为 $p_{Gi}(t)$; $p_i(t)$ 和 $p_{Gi}(t)$ 的复模量、储能模量、耗能模量分别为 $E_{Qi}(i\omega)$ 、 $E_{Qli}(\omega)$ 、 $E_{Q2i}(\omega)$ 和 $E_{Gi}(i\omega)$ 、 $E_{Gli}(\omega)$ 、 $E_{G2i}(\omega)$; $p_i(t)$ 和 $p_{Gi}(t)$ 的松弛模量、平衡模量、松弛函数分别为 $Q_i(t)$ 、 k_{Qi} 、 $h_{Qi}(t)$ 和 $G_i(t)$ 、 k_{Gi} 、 $h_{Gi}(t)$; 在地震动 $\ddot{x}_g(t)$ 作用下, 结构相对于地面的位移向量为 \mathbf{x} , 阻尼器 $p_i(t)$ 和其支撑 k_{bi} 的相对位移分别为 x_{pi} 和 x_{bi} , 结构和阻尼器的计算简图分别为图 1 和图 2, 则结构运动方程为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}']\mathbf{x} + \mathbf{p}_G^0(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (1)$$

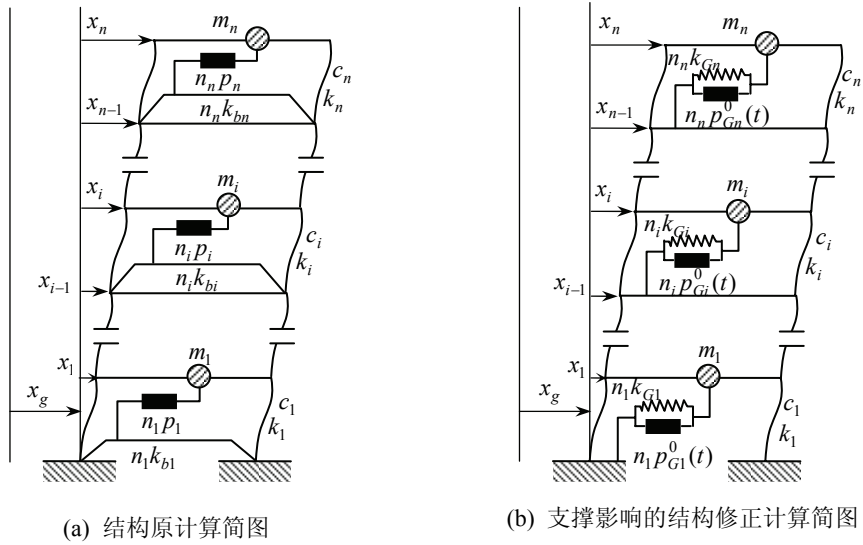
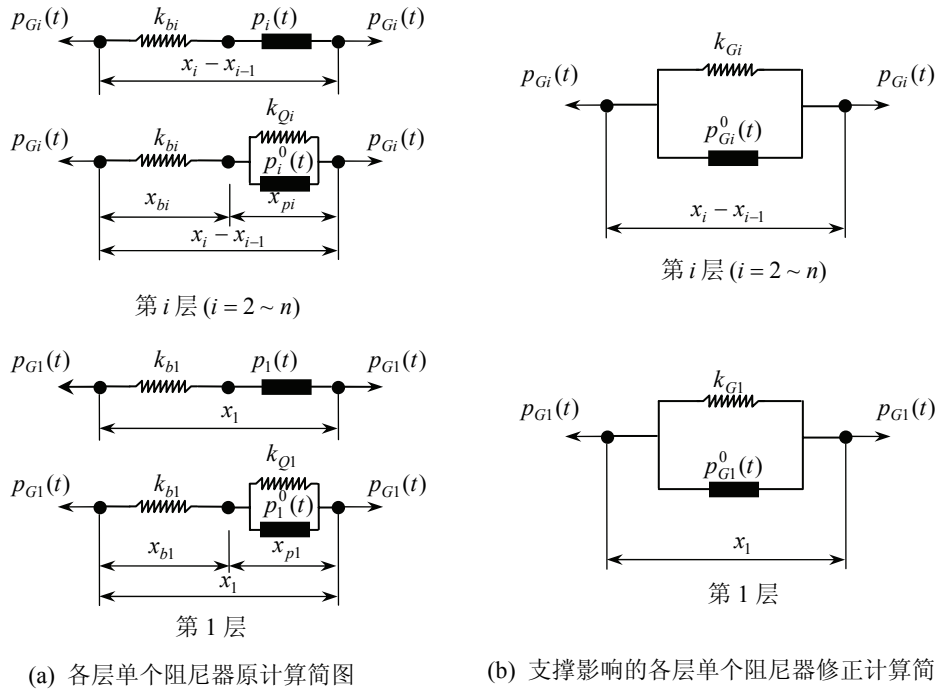


图1 结构计算简图

Fig.1 Calculation diagram of structure



(a) 各层单个阻尼器原计算简图

(b) 支撑影响的各层单个阻尼器修正计算简图

图2 阻尼器计算简图

Fig.2 Calculation diagram of damper

式中： \mathbf{K}' 是元素为 $K'_i = n_i k_{Gi}$ ($i=1 \sim n$) 构成的三对角矩阵； $\mathbf{I} = [1, 1, \dots, 1]^T$ ；

$$\mathbf{p}_G^0(t) = [n_1 p_{G1}^0(t) - n_2 p_{G2}^0(t), n_2 p_{G2}^0(t) - n_3 p_{G3}^0(t), \dots, n_n p_{Gn}^0(t)]^T \quad (2a)$$

$$p_{Gi}^0(t) = \int_0^t h_{Gi}(t-\tau) [\dot{x}_i(\tau) - \dot{x}_{i-1}(\tau)] d\tau \quad (2b)$$

其中， $i=1 \sim n$ ， $x_0(t)=0$ ， $\dot{x}_0(t)=0$ 。

阻尼器 $p_i(t)$ 和 $p_{Gi}(t)$ 的各种性能参数具有的性质及其对应关系见文献[10]，其中：

$$k_{Gi} = G_i(\infty) = E_{Gi}(0) = E_{G1i}(0) = \frac{k_{bi} k_{Qi}}{k_{bi} + k_{Qi}} \quad (3a)$$

$$E_{Gi}(i\omega) = E_{G1i}(\omega) + i E_{G2i}(\omega) \quad (3b)$$

$$E_{G1i}(\omega) = k_{Gi} + \omega \int_0^\infty h_{Gi}(t) \sin \omega t dt \quad (3c)$$

$$E_{G2i}(\omega) = \omega \int_0^\infty h_{Gi}(t) \cos \omega t dt \quad (3d)$$

$$E_{G1i}(\omega) = \frac{k_{bi} [E_{Q1i}^2(\omega) + E_{Q2i}^2(\omega) + k_{bi} E_{Q1i}(\omega)]}{[k_{bi} + E_{Q1i}(\omega)]^2 + E_{Q2i}^2(\omega)} \quad (3e)$$

$$E_{G2i}(\omega) = \frac{k_{bi}^2 E_{Q2i}(\omega)}{[k_{bi} + E_{Q1i}(\omega)]^2 + E_{Q2i}^2(\omega)} \quad (3f)$$

$$\int_0^\infty |h_{Gi}(t)| dt < +\infty; \quad \int_0^\infty |th_{Gi}(t)| dt < +\infty \quad (3g)$$

由结构的质量矩阵和总刚度矩阵 \mathbf{M} 和 $[\mathbf{K}+\mathbf{K}']$ ，可求出其 n 个频率 ω_i 和振型 $\boldsymbol{\psi}_i = [\psi_{1i}, \psi_{2i}, \dots, \psi_{ni}]^T$ ($i=1 \sim n$)。阻尼矩阵 \mathbf{C} 和振型 $\boldsymbol{\psi}_i$ 已不满足严格意义的正交条件，忽略非正交项会带来一定的误差。文献[11]研究了非经典阻尼矩阵忽略非正交项的误差问题，给出了这种方法的适用条件公式。文献[12]用非正交阻尼强行解耦法研究了桥梁隔震体系的振型阻尼比问题，对于上部结构阻尼比为 3%~10% 以及隔震层阻尼比为 5%~30% 的情况，强行解耦法的地震反应与复模态精确解法基本一致。由于原结构的 \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 矩阵具有正交解耦性，且原结构各振型的阻尼比一般均不大于 5%，属于小比例阻尼，加之阻尼器提供的附加刚度矩阵 \mathbf{K}' 在实际工程中一般是较 \mathbf{K} 的小量^[1]，因此耗能结构的振型与原结构相比一般变化不大^[1]，且其频率是略有增大的，故对一般工程结构，假设阻尼矩阵 \mathbf{C} 关于耗能结构振型正交是合理的^[3]。当然，在 \mathbf{K}' 较 \mathbf{K} 不是小量的特殊情况下，须满足文献[11]提出的适用条件。

将式(1)按振型展开，得出结构以振型广义坐标 y_i 表示的微分与积分混合方程组为：

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega^2 y_i + \frac{Z_i}{M_i^*} = -\beta_i \ddot{x}_g \quad (4)$$

式中： $i=1 \sim n$ ； M_i^* 、 β_i 、 ξ_i 分别为第 i 振型的广义质量、振型参与系数和振型阻尼比；

$$Z_i = \psi_{1i} \sum_{j=1}^n \psi_{1j} n_1 \gamma_1(\dot{y}_j) + (\psi_{2i} - \psi_{1i}) \times \sum_{j=1}^n (\psi_{2j} - \psi_{1j}) n_2 \gamma_2(\dot{y}_j) + \dots + (\psi_{ni} - \psi_{(n-1)i}) \sum_{j=1}^n (\psi_{nj} - \psi_{(n-1)j}) n_n \gamma_n(\dot{y}_j) \quad (5a)$$

$$\gamma_k(\dot{y}_j) = \int_0^t h_{Gk}(t-\tau) \dot{y}_j(\tau) d\tau, \quad k, j = 1 \sim n \quad (5b)$$

2 随机平均方程

对于实际结构， $\xi_i \leq 0.05$ ，阻尼器的个数 n_i 一般不是太多，每个阻尼器提供的阻尼力 $\gamma_k(\dot{y}_j)$ 一般

为小量，且所有阻尼器提供的振型附加阻尼比 $\xi_{pi} \leq 0.2$ (规范限值)，故假设 $n_k \gamma_k(\dot{y}_j) / (M_i^* \omega_i)$ ($k, j=1 \sim n$) 为小量是可行的；又因为结构处于线弹性小变形，白噪声也常常作为地震动激励的近似模型，故假设 $\ddot{x}_g(t)$ 为宽带弱激励也是可行的，所以可对式(4)进行随机平均分析^[7,13]。

基于多自由度随机平均法理论，引入标准 Van do pol 变换^[7,13]：

$$y_i(t) = A_i(t) \cos \theta_i(t) \quad (6a)$$

$$\dot{y}_i(t) = -A_i(t) \omega_i \sin \theta_i(t) \quad (6b)$$

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i t + \Phi_i(t) \quad (6c)$$

其中， $i=1 \sim n$ 。则式(4)可按随机平均法的标准范式化为：

$$\dot{A}_i(t) = f_{1i}^{(1)}(A_i, \Phi_i, t) + f_{1i}^{(2)}(A, \Phi, t) + g_{1i}^{(1)}(\Phi_i, t) \ddot{x}_g(t) \quad (7a)$$

$$\dot{\Phi}_i(t) = f_{2i}^{(1)}(\Phi_i, t) + f_{2i}^{(2)}(A, \Phi, t) + g_{2i}^{(1)}(A_i, \Phi_i, t) \ddot{x}_g(t) \quad (7b)$$

式中， $i=1 \sim n$ ，相关变量的表达式为：

$$\mathbf{A} = [A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)] \quad (8a)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_n(t)] \quad (8b)$$

$$f_{1i}^{(1)}(A_i, \Phi_i, t) = -2\xi_i \omega_i A_i(t) \sin^2 \theta_i(t) \quad (8c)$$

$$f_{2i}^{(1)}(\Phi_i, t) = -2\xi_i \omega_i \sin \theta_i(t) \cos \theta_i(t) \quad (8d)$$

$$f_{1i}^{(2)}(A, \Phi, t) = \frac{Z_i \sin \theta_i(t)}{M_i^* \omega_i} \quad (8e)$$

$$f_{2i}^{(2)}(A, \Phi, t) = \frac{Z_i \cos \theta_i(t)}{M_i^* \omega_i A_i(t)} \quad (8f)$$

$$g_{1i}^{(1)}(\Phi_i, t) = \frac{\beta_i \sin \theta_i(t)}{\omega_i} \quad (8g)$$

$$g_{2i}^{(1)}(A_i, \Phi_i, t) = \frac{\beta_i \cos \theta_i(t)}{\omega_i A_i(t)} \quad (8h)$$

如前述，在 ξ_i 、 $\ddot{x}_g(t)$ 、 $n_k \gamma_k(\dot{y}_j) / (M_i^* \omega_i)$ ($k, j=1 \sim n$) 均为小量时，由式(8c)~式(8h)知，式(7)的等号右边项均为小量，故 $A_i(t)$ 和 $\Phi_i(t)$ 均为慢变过程，根据随机平均法理论，式(7)可近似由下列随机平均 Itô 方程取代^[7,13]：

$$dA_i = m_{A_i} dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^A d\omega_{A_j} + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^{A\Phi} d\omega_{\Phi_j} \quad (9a)$$

$$d\Phi_i = m_{\Phi_i} dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^{\Phi A} d\omega_{A_j} + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^{\Phi} d\omega_{\Phi_j} \quad (9b)$$

其中： $i=1 \sim n$ ； $d\omega_{A_j}$ 、 $d\omega_{\Phi_j}$ 均为相互独立的单位维纳过程； m_{A_i} 、 m_{Φ_i} 、 σ_{ij}^A 、 $\sigma_{ij}^{A\Phi}$ 、 $\sigma_{ij}^{\Phi A}$ 、 σ_{ij}^{Φ} 可

利用关系式(7a)和式(7b)由文献[7,13]给出统一计算公式表出。

利用 $A_i(t)$ 和 $\Phi_i(t)$ 的慢变性和下列关系式:

$$\mathbf{M}_i\{\gamma_k(\dot{y}_j)\sin\theta_i(t)\} = \begin{cases} -\frac{A_i\omega_i}{2}H_{ck}(\omega_i), & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases} \quad (10a)$$

$$\mathbf{M}_i\{\gamma_k(\dot{y}_j)\cos\theta_i(t)\} = \begin{cases} \frac{A_i\omega_i}{2}H_{sk}(\omega_i), & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases} \quad (10b)$$

$$H_{ck}(\omega_i) = \int_0^{\infty} h_{GK}(\tau)\cos\omega_i\tau d\tau \quad (10c)$$

$$H_{sk}(\omega_i) = \int_0^{\infty} h_{GK}(\tau)\sin\omega_i\tau d\tau \quad (10d)$$

式中, $S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)$ 为 $\ddot{x}_g(t)$ 的功率谱函数在 ω_i 处的取值。式(10a)和式(10b)的推导过程见附录。

结构的随机平均 Itô 方程的最终表达式为:

$$dA_i = \left\{ -\left[\xi_i\omega_i + \frac{1}{2M_i^*} \left(\psi_{1i}^2 n_1 H_{c1}(\omega_i) + \sum_{k=2}^n (\psi_{ki} - \psi_{(k-1)i})^2 n_k H_{ck}(\omega_i) \right) \right] \times \right. \\ \left. A_i + \frac{\beta_i^2 \pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)}{2\omega_i^2 A_i} \right\} dt + \frac{\beta_i [\pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)]^{\frac{1}{2}}}{\omega_i} d\omega_{A_i} \quad (11a)$$

$$d\Phi_i = \frac{1}{2M_i^*} \left[\psi_{1i}^2 n_1 H_{s1}(\omega_i) + \sum_{k=2}^n (\psi_{ki} - \psi_{(k-1)i})^2 n_k H_{sk}(\omega_i) \right] dt + \\ \frac{\beta_i [\pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)]^{\frac{1}{2}}}{\omega_i A_i} d\omega_{\Phi_i} \quad (11b)$$

式中, $i=1\sim n$ 。

由关系式(10c)、式(10d)和式(3a)~式(3f), 可将 $H_{ck}(\omega_i)$ 和 $H_{sk}(\omega_i)$ 用原阻尼器 $p_k(t)$ 及其支撑 k_{bk} 的性能参量表示为:

$$H_{ck}(\omega_i) = \frac{E_{G2k}(\omega_i)}{\omega_i} = \frac{k_{bk}^2 E_{Q2k}(\omega_i)}{\omega_i \{ [k_{bk} + E_{Q1k}(\omega_i)]^2 + E_{Q2k}^2(\omega_i) \}} \quad (12a)$$

$$H_{sk}(\omega_i) = \frac{E_{G1k}(\omega_i) - k_{Gk}}{\omega_i} =$$

$$\frac{k_{bk} [E_{Q1k}^2(\omega_i) + E_{Q2k}^2(\omega_i) + k_{bk} E_{Q1k}(\omega_i)]}{\omega_i \{ [k_{bk} + E_{Q1k}(\omega_i)]^2 + E_{Q2k}^2(\omega_i) \}} \\ \frac{k_{bk} k_{Qk}}{\omega_i [k_{bk} + k_{Qk}]} \quad (12b)$$

3 结构各振型振子的随机响应特性

经过随机平均后, 每个振型振子位移 y_i 和速度 \dot{y}_i 对应的每组幅值和相位 (A_i, Φ_i) 为二维时齐扩散过程, 由于每组 (A_i, Φ_i) 满足的 Itô 随机微分方程式(12)已解耦, 故可按照已建立的单自由度结构的分析方法, 求出结构各振型振子的随机响应特性^[10]。

设每组 $A_i(t)$ 和 $\Phi_i(t)$ 的状态变量为 a_i 和 φ_i , ($i=1\sim n$), $A_i(t)$ 的概率密度函数为 $p_i(a_i, t)$, $A_i(t)$ 、 $\Phi_i(t)$ 和 $y_i(t)$ 、 $\dot{y}_i(t)$ 的联合概率密度函数分别为 $p_i(a_i, \varphi_i, t)$ 和 $p_i(y_i, \dot{y}_i, t)$, 则在静止初始条件下, 由 Itô 方程式(11), 得 $p_i(a_i, t)$ 满足的 FPK 方程以及 $p_i(a_i, t)$ 、 $p_i(a_i, \varphi_i, t)$ 、 $p_i(y_i, \dot{y}_i, t)$ 的解析解分别为^[10]:

$$\frac{\partial p_i(a_i, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ \left[\xi_i' \omega_i a_i - \frac{\beta_i^2 \pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)}{2\omega_i^2 a_i} \right] p_i(a_i, t) \right\} + \\ \frac{\beta_i^2 \pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)}{2\omega_i^2} \frac{\partial^2 p_i(a_i, t)}{\partial a_i^2} \quad (13a)$$

$$p_i(a_i, 0) = \delta(a_i) \quad (13b)$$

$$\xi_i' = \xi_i + \frac{1}{2M_i^* \omega_i} \left[\psi_{1i}^2 n_1 H_{c1}(\omega_i) + \sum_{j=2}^n (\psi_{ji} - \psi_{(j-1)i})^2 n_j H_{cj}(\omega_i) \right] \quad (13c)$$

$$p_i(a_i, t) = \frac{a_i}{c_i(t)} \exp \left[-\frac{a_i^2}{2c_i(t)} \right] \quad (14a)$$

$$c_i(t) = \frac{\beta_i^2 \pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)}{2\xi_i' \omega_i^3} [1 - e^{-2\xi_i' \omega_i t}] \quad (14a)$$

$$p_i(a_i, \varphi_i, t) = \frac{1}{2\pi} p_i(a_i, t) \quad (15)$$

$$p_i(y_i, \dot{y}_i, t) = \frac{1}{2\pi \omega_i a_i} p_i(a_i, t) \Bigg|_{a_i = \left(y_i^2 + \frac{\dot{y}_i^2}{\omega_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

式(13)~式(16)中, $i=1\sim n$ 。

由式(14)和式(16), 可得结构各振型振子的随机响应特性为:

$$p_i(y_i, \dot{y}_i, t) = \frac{1}{2\pi\omega_i c_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2c_i(t)} \left[y_i^2 + \frac{\dot{y}_i^2}{\omega_i^2} \right]\right\} \quad (17a)$$

$$p_i(y_i, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c_i(t)}} \exp\left\{-\frac{y_i^2}{2c_i(t)}\right\} \quad (17b)$$

$$p_i(\dot{y}_i, t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{2\pi c_i(t)}} \exp\left\{-\frac{\dot{y}_i^2}{2\omega_i^2 c_i(t)}\right\} \quad (17c)$$

$$E[y_i^2(t)] = c_i(t), \quad E[\dot{y}_i^2(t)] = \omega_i^2 c_i(t) \quad (17d)$$

式中, $i=1 \sim n$ 。

上述分析表明: 结构各振型振子的各种随机响应特性由 $p_i(a_i, t)$ 唯一确定。

4 基于随机平均法的结构各振型等效阻尼比

设结构第 i 振型的等效振型振子 y_i 的附加等效阻尼比为 ξ_{pi} , 则等效振型振子 y_i 满足的运动方程为:

$$\ddot{y}_i + 2(\xi_i + \xi_{pi})\omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\beta_i \ddot{x}_g \quad (18)$$

式中: $i=1 \sim n$; ξ_i 、 ω_i 、 β_i 均与结构原振型振子 y_i 的运动方程式(4)的对应取值完全相同, 仅将式(4)中各阻尼器提供的附加阻尼力等效为 $2\xi_{pi}\omega_i \dot{y}_i$ 。

根据随机平均法, 在静止初始条件下, 各等效振型振子 y_i 的幅值响应 $A_i(t)$ 的概率密度函数 $p_i(a_i, t)$ 满足的 FPK 方程为:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ \left[(\xi_i + \xi_{pi})\omega_i a_i - \frac{\beta_i^2 \pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)}{2\omega_i^2 a_i} \right] p_i \right\} + \frac{\beta_i^2 \pi S_{\ddot{x}_g}(\omega_i)}{2\omega_i^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial a_i^2} \quad (19a)$$

$$p_i(a_i, 0) = \delta(a_i), \quad i=1 \sim n \quad (19b)$$

对比原结构振型振子和等效振型振子的 $p_i(a_i, t)$ 所满足的方程式(13a)、式(13b)和式(19a)、式(19b), 可知, 只要:

$$\xi_{pi} = \frac{1}{2M_i^* \omega_i} \left[\psi_{1i}^2 n_1 H_{c1}(\omega_i) + \sum_{j=2}^n (\psi_{ji} - \psi_{(j-1)i})^2 n_j H_{c_j}(\omega_i) \right], \quad i=1 \sim n \quad (20)$$

则在随机平均法可运用的条件下, 对任意的随机地震激励 $\ddot{x}_g(t)$, 原结构的各振型振子 $y_i(t)$ 和等效振型振子 $y_i(t)$ 的所有响应统计特性 $p_i(y_i, \dot{y}_i, t)$ 、

$p_i(y_i, t)$ 、 $p_i(\dot{y}_i, t)$ 、 $E[y_i^2(t)]$ 、 $E[\dot{y}_i^2(t)]$ 均相等, 由于原结构的位移和速度响应均可表示为结构各振型响应的线性组合, 故用各等效振型振子方程式(18)取代原结构各振型振子方程式(4)进行结构响应计算和按反应谱法进行工程设计, 其效果完全一致。故可用式(20)表示原结构各振型振子的附加等效阻尼比。

5 原结构随机响应计算

由于已求得原结构各振型振子的位移与速度响应方差的解析式(17d), 同时还求出了结构各振型等效振子的频率 ω_i 和阻尼比 $(\xi_i + \xi_{pi})$, 故可按抗震规范的 CQC 组合方法求出原结构的位移与速度随机响应, 而当原结构的各频率 ω_i 相距较大时, 可按 SRSS 组合方法求解, 此时原结构各层的随机响应为:

$$E[x_j^2(t)] = \sum_{i=1}^n \psi_{ji}^2 E[y_i^2(t)] = \sum_{i=1}^n \psi_{ji}^2 c_i(t) \quad (21a)$$

$$E[\dot{x}_j^2(t)] = \sum_{i=1}^n \psi_{ji}^2 E[\dot{y}_i^2(t)] = \sum_{i=1}^n \psi_{ji}^2 \omega_i^2 c_i(t) \quad (21b)$$

其中, $j=1 \sim n$ 。

6 两种典型阻尼器的性能参数

如前所述, 只要求出耗能结构的修正阻尼器 $p_{Gj}(t)$ 的性能参数 k_{Gj} 和 $H_{c_j}(\omega_i)$, 即可求出附加刚度矩阵 \mathbf{k}' , 继而由自由振动分析求出频率 ω_i 和振型 ψ_i , 进而由式(20)求出结构振型附加阻尼比 ξ_{pi} , 最后按式(18)进行响应计算和按反应谱法进行设计, 故性能参数 k_{Gj} 和 $H_{c_j}(\omega_i)$ 决定结构响应和振型等效阻尼比。

6.1 带支撑广义 Maxwell 阻尼器

计算简图见图 3, 其中 $k_{0j} \sim k_{nj}$ 和 $c_{1j} \sim c_{nj}$ 为广义 Maxwell 阻尼器 $p_j(t)$ 的性能参数。

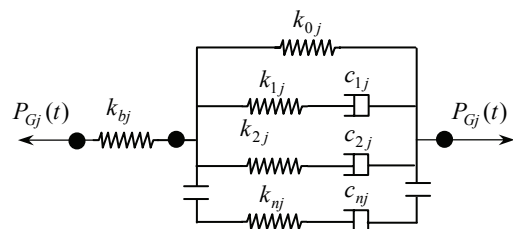


图 3 带支撑的广义 Maxwell 阻尼器
Fig.3 General integral model Maxwell damper with brace

对无支撑的广义 Maxwell 阻尼器 $p_j(t)$ 有^[9]:

$$E_{Q1j}(\omega) = k_{0j} + \sum_{l=1}^n \frac{k_{lj} \rho_{lj} \omega^2}{1 + \rho_{lj}^2 \omega^2} \quad (22a)$$

$$E_{Q2j}(\omega) = \sum_{l=1}^n \frac{c_{lj} \omega}{1 + \rho_{lj}^2 \omega^2} \quad (22b)$$

$$\rho_{lj} = \frac{c_{lj}}{k_{lj}}; \quad k_{Qj} = E_{Q1j}(0) = k_{0j} \quad (22c)$$

故由式(3a)和式(13a), 有:

$$k_{Gj} = \frac{k_{bj} k_{Qj}}{k_{bj} + k_{Qj}} = \frac{k_{bj} k_{0j}}{k_{bj} + k_{0j}} \quad (23a)$$

$$H_{cj}(\omega_i) = \frac{k_{bj}^2 \sum_{l=1}^n \frac{c_{lj}}{1 + \rho_{lj}^2 \omega_i^2}}{[k_{bj} + E_{Q1j}(\omega_i)]^2 + E_{Q2j}^2(\omega_i)} \quad (23b)$$

6.2 带支撑广义微分型阻尼器

计算简图如图 4 所示:

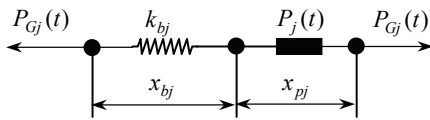


图 4 带支撑广义微分型阻尼器

Fig.4 General differential model damper with brace

由于一般分数导数模型可用文献[9]的方法转换为广义微分模型, 故广义微分模型是线性粘滞和粘弹性阻尼器的最一般计算模型^[9], 对无支撑的广义微分型阻尼器 $p_j(t)$, 其本构方程为^[9]:

$$\sum_{m=0}^M a_{jm} \frac{d^m p_j(t)}{dt^m} = \sum_{n=0}^N b_{jn} \frac{d^n x_{pj}(t)}{dt^n} \quad (24)$$

式中: $x_{pj}(t)$ 为阻尼器 $p_j(t)$ 两端的相对位移; a_{jm} 和 b_{jn} 为其材料性能常数。

由本构关系式(24), 可求得 $p_j(t)$ 的 k_{Qj} 、 $E_{Q1j}(\omega)$ 、 $E_{Q2j}(\omega)$ 分别为:

$$k_{Qj} = E_{Qj}(0) = \frac{b_{j0}}{a_{j0}} \quad (25a)$$

$$E_{Q1j}(\omega) = \frac{A_j(\omega)C_j(\omega) + B_j(\omega)D_j(\omega)}{A_j^2(\omega) + B_j^2(\omega)} \quad (25b)$$

$$E_{Q2j}(\omega) = \frac{A_j(\omega)D_j(\omega) - B_j(\omega)C_j(\omega)}{A_j^2(\omega) + B_j^2(\omega)} \quad (25c)$$

$$A_j(\omega) = \sum_{m=0}^M a_{jm} \omega^m \cos \frac{m\pi}{2} \quad (25d)$$

$$B_j(\omega) = \sum_{m=0}^M a_{jm} \omega^m \sin \frac{m\pi}{2} \quad (25e)$$

$$C_j(\omega) = \sum_{n=0}^N b_{jn} \omega^n \cos \frac{n\pi}{2} \quad (25f)$$

$$D_j(\omega) = \sum_{n=0}^N b_{jn} \omega^n \sin \frac{n\pi}{2} \quad (25g)$$

故由式(3a)和式(13a), 有:

$$k_{Gj} = \frac{k_{bj} b_{j0}}{k_{bj} a_{j0} + b_{j0}} \quad (26a)$$

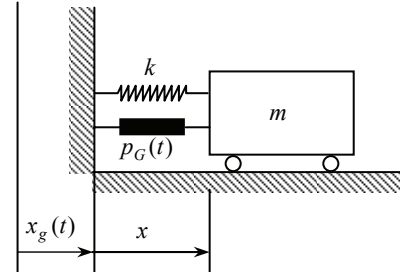
$$H_{cj}(\omega_i) = \frac{k_{bj}^2 E_{Q2j}(\omega_i)}{\omega_i \{ [k_{bj} + E_{Q1j}(\omega_i)]^2 + E_{Q2j}^2(\omega_i) \}} \quad (26b)$$

7 等效阻尼比的精度比较分析

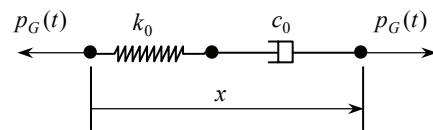
以文献[14]用于研究模态应变能法计算精度的单自由度和两自由度结构为例, 比较本文方法和模态应变能法的计算精度。

7.1 单自由度 Maxwell 阻尼减震结构

对图 5 所示质量为 m , 刚度为 k , 无阻尼的单自由度 Maxwell 阻尼减震结构, 在白噪声地震激励 $S_{\ddot{x}_g}(\omega) = S_0 / (2\pi)$ 作用下, 文献[14]分析了模态应变能法的计算精度, 现将本文方法与其比较。



(a) 结构计算简图



(b) Maxwell 阻尼器 $p_G(t)$ 计算简图

图 5 无阻尼单自由度 Maxwell 阻尼减震结构

Fig.5 Un-damped SDOF Maxwell model damper dissipation structures

结构运动方程为:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{p_G(t)}{m} = -\ddot{x}_g(t) \quad (27a)$$

$$p_G(t) = \int_0^t h_G(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \quad (27b)$$

$$h_G(t) = k_0 e^{-\frac{1}{\lambda}t}, \quad \lambda = \frac{c_0}{k_0} \quad (27c)$$

$$E_{G1}(\omega) = \frac{k_0 \lambda^2 \omega^2}{1 + \lambda^2 \omega^2}, \quad E_{G2}(\omega) = \frac{k_0 \lambda \omega}{1 + \lambda^2 \omega^2} \quad (27d)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_p^2 = \frac{k_0}{m} \quad (27e)$$

7.1.1 频域法计算结果

对方程取 Fourier 变换, 可求得结构相对地面位移 x 的频域响应函数 $H_x(i\omega)$ 为:

$$H_x(i\omega) = \frac{-\left[(i\omega) + \frac{1}{\lambda}\right]}{(i\omega)^3 + \frac{1}{\lambda}(i\omega)^2 + (\omega_0^2 + \omega_p^2)(i\omega) + \frac{\omega_0^2}{\lambda}} \quad (28)$$

由 James 积分公式^[7], 得 $x(t)$ 的平稳响应方差 σ_x^2 的精确解为:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_x(i\omega)|^2 S_{\ddot{x}_g}(\omega) d\omega = \frac{S_0}{2\omega_0^3} \cdot \frac{(\omega_0 + \omega_0^3 \lambda^2)}{\omega_p^2 \lambda} \quad (29)$$

7.1.2 本文方法计算结果

由式(18), 得式(27a)的等效方程为:

$$\ddot{x} + 2\xi_p \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{x}_g(t) \quad (30)$$

由式(20)、式(13a)和式(27d), 得等效阻尼比 ξ_p 为:

$$\xi_p = \frac{1}{2m\omega_0} \cdot \frac{E_{G2}(\omega_0)}{\omega_0} = \frac{\omega_p^2 \lambda}{2(\omega_0^3 \lambda^2 + \omega_0)} \quad (31)$$

由等效系统方程式(30)和频域法, 得:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\ddot{x}_g}(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\xi_p \omega_0 \omega)^2} d\omega = \frac{S_0}{2\omega_0^3} \cdot \frac{(\omega_0 + \omega_0^3 \lambda^2)}{\omega_p^2 \lambda} \quad (32)$$

比较式(32)和式(29), 可见本文结果与精确解完全相同。这说明随机平均法在特定的条件下能给出精确平稳解, 其能得出精确稳态解的原因, 文献[7]已有论述。

7.1.3 模态应变能方法计算结果

文献[14]用模态应变能方法获得的等效方程为:

$$\ddot{x} + 2\xi_n \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{x}_g(t) \quad (33)$$

式中:

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_n^2 \omega_p^2 \lambda^2}{\omega_n^2 \lambda^2 + 1} \quad (34a)$$

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_0^2 \lambda^2 + \omega_p^2 \lambda^2 - 1}{2\lambda^2} + \frac{\sqrt{(\omega_0^2 \lambda^2 + \omega_p^2 \lambda^2)^2 + 2(\omega_0^2 - \omega_p^2)\lambda^2 + 1}}{2\lambda^2} \quad (34b)$$

$$\xi_n = \frac{\omega_p^2 \lambda}{2(\omega_n^3 \lambda^2 + \omega_n)} \quad (34c)$$

模态应变能方法的计算结果为:

$$\sigma_{x_n}^2 = \frac{S_0}{2\omega_p^2 \lambda} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\omega_n^2} \right) \quad (35)$$

由式(29), σ_x^2 的精确解可改写为:

$$\sigma_x^2 = \frac{S_0}{2\omega_p^2 \lambda} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \right) \quad (36)$$

由式(34a)可知: $\omega_0^2 < \omega_n^2 < \omega_0^2 + \omega_p^2$, 故应变能法计算结果小于精确值。

7.2 两自由度 Maxwell 阻尼减震结构

对于图 6 所示的无阻尼两自由度 Maxwell 阻尼减震结构, 其运动方程为:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} + \mathbf{p}_G(t) = -M\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (37)$$

式中: \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 分别是由层间质量和刚度 m_i 、 k_i ($i=1,2$) 构成的质量矩阵与刚度矩阵:

$$\mathbf{p}(t) = [p_{G1} - p_{G2}, p_{G2}]^T \quad (38a)$$

$$p_{Gi}(t) = \int_0^t h_{Gi}(t-\tau) [\dot{x}_i(\tau) - \dot{x}_{i-1}(\tau)] d\tau \quad (38b)$$

$$h_{Gi}(t) = k_{0i} e^{-\frac{1}{\lambda_i}t}, \quad \lambda_i = \frac{c_{0i}}{k_{0i}} \quad (38c)$$

$$E_{G1i}(\omega) = \frac{k_{0i} \lambda_i^2 \omega^2}{1 + \lambda_i^2 \omega^2}, \quad E_{G2i}(\omega) = \frac{k_{0i} \lambda_i \omega}{1 + \lambda_i^2 \omega^2} \quad (38d)$$

式(38)中, $i=1,2$, $x_0(t) = 0$, $\dot{x}_0(t) = 0$ 。

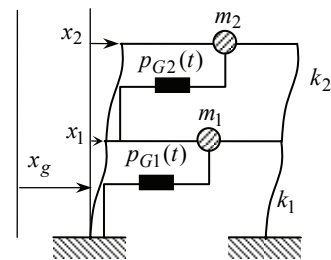


图 6 两自由度计算简图

Fig.6 2-DOF structural calculation diagram

7.2.1 模态应变能法的计算结果

在 $m_1 = m_2 = m$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0.1s$, $k_1/m = 200s^{-2}$, $k_2/m = 100s^{-2}$, $k_{01}/m = 100s^{-2}$, $k_{02}/m =$

$50s^{-2}$, $E[\ddot{x}_g(t)\ddot{x}_g(t+\tau)] = S_0\delta(\tau)$ 的情况下, 文献[14]分别用频域法和模态应变能法计算上述结构的位移方差响应和相对误差。

由频域法获得的精确值为:

$$\sigma_{x_1}^2 = 0.0013S_0, \quad \sigma_{x_2}^2 = 0.0067S_0 \quad (39)$$

由模态应变能法获得的频率、振型和阻尼比以及相对位移响应方差分别为:

$$\omega_{n1} = 8.41 \text{ rad/s}, \quad \xi_{n1} = 0.102 \quad (40a)$$

$$\Phi_1^T = [0.383, 0.924] \quad (40b)$$

$$\omega_{n2} = 21.97 \text{ rad/s}, \quad \xi_{n2} = 0.0067 \quad (41a)$$

$$\Phi_2^T = [0.924, -0.383] \quad (41b)$$

$$\sigma_{x_{1n}}^2 = 0.0011S_0, \quad \sigma_{x_{2n}}^2 = 0.0060S_0 \quad (42)$$

应变能法的相对误差为:

$$\left| \frac{\sigma_{x_1} - \sigma_{x_{1n}}}{\sigma_{x_1}} \right| = 8\%; \quad \left| \frac{\sigma_{x_2} - \sigma_{x_{2n}}}{\sigma_{x_2}} \right| = 5.4\% \quad (43)$$

7.2.2 本文方法计算结果

在取上述相同计算参数的情况下, 由于 Maxwell 阻尼器 $p_{Gi}(t)$ 不提供附加刚度, 故 $\mathbf{k}' = 0$, 所以耗能结构的自由振动分析与原结构相同, 即:

$$\omega_1 = 7.65 \text{ rad/s}, \quad M_1^* = m, \quad \beta_1 = 1.307 \quad (44a)$$

$$\Psi_1^T = [\psi_{11} \quad \psi_{21}] = [0.383, 0.924] \quad (44b)$$

$$\omega_2 = 18.48 \text{ rad/s}, \quad M_2^* = m, \quad \beta_2 = 0.541 \quad (45a)$$

$$\Psi_2^T = [\psi_{12} \quad \psi_{22}] = [0.924, -0.383] \quad (45b)$$

由式(18), 振型广义坐标 y_1 和 y_2 满足的等效方程为:

$$\ddot{y}_i + 2\xi_{pi}\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\beta_i\ddot{x}_g(t) \quad (46)$$

由式(21)、式(12a)和式(38d), 得等效阻尼比 ξ_{pi} 的表达式为:

$$\xi_{pi} = \frac{1}{2M_i^*\omega_i} \left[\psi_{1i}^2 \frac{E_{G21}(\omega_i)}{\omega_i} + (\psi_{2i} - \psi_{1i})^2 \frac{E_{G22}(\omega_i)}{\omega_i} \right], \quad i=1,2 \quad (47)$$

将有关参数代入, 可得:

$$\xi_{p1} = 0.12076, \quad \xi_{p2} = 0.10468 \quad (48)$$

$$\sigma_{y_1}^2 = 0.007899S_0, \quad \sigma_{y_2}^2 = 0.000110755S_0 \quad (49)$$

由 CQC 组合法, 得:

$$\sigma_{x_1}^2 = \psi_{11}^2 \sigma_{y_1}^2 + \psi_{12}^2 \sigma_{y_2}^2 + 2\psi_{11}\psi_{12}\rho_{12}\sigma_{y_1}\sigma_{y_2} \quad (50a)$$

$$\sigma_{x_2}^2 = \psi_{21}^2 \sigma_{y_1}^2 + \psi_{22}^2 \sigma_{y_2}^2 + 2\psi_{21}\psi_{22}\rho_{12}\sigma_{y_1}\sigma_{y_2} \quad (50b)$$

式中, 振型相关系数 ρ_{12} 由 Der Kiureghian 公式计算得 $\rho_{12} = 0.031824$ 。

将有关参数代入, 可求得:

$$\sigma_{x_1}^2 = 0.001274323S_0 \quad (51a)$$

$$\sigma_{x_2}^2 = 0.006722933S_0 \quad (51b)$$

标准差 σ_{x_1} 和 σ_{x_2} 与精确值的相对误差分别为 0.9924% 和 0.44775%。

总之, 通过上述精度比较, 表明了所提方法的有效性。

8 结 论

本文只用线性小阻尼和弱激励两个假设, 严谨地获得了摘要所述的结果。由于振型和频率分析不需要迭代计算, 所获得的结果均为一般意义的解析解, 将任意多自由度带支撑的任意线性粘滞和粘弹性阻尼器耗能结构在随机平均意义上等效为非耗能的常规结构, 使此类一般耗能结构的抗震计算、反应谱工程设计和进一步优化抗震设计更为简便。

参考文献:

- [1] Soong T T, Dargush G F. Passive energy dissipation systems in structural engineering [M]. England: John Wiley and Ltd, 1997: 141—143.
- [2] 周云. 粘弹性阻尼减震结构设计[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2006: 124—126.
Zhou Yun. Viscoelastic damper dissipation structure design [M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2006: 124—126. (in Chinese)
- [3] 欧进萍, 吴斌, 龙旭. 消能减震结构的设计, GB57011-2001 建筑抗震设计规范背景材料[S]// 戴国莹, 王亚勇, 主编. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005: 323—330.
Ou Jinping, Wu Bin, Long Xu. Passive dissipation structure design. GB57011-2001 Seismic design code for buildings background information [S]// Dai Guoying, Wang Yayong, ed. Beijing: China Building Industry Press, 2005: 323—330. (in Chinese)
- [4] Johnson C D, Kienhole D A. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers [J]. AIAA, 1982, 20(9): 1284—1290.
- [5] Inaudi J A, Kelly J M. Modal equations of linear structures with viscoelastic dampers [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1995, 24: 145—151.
- [6] Palmeri A, Ricciardelli F. Effects of viscoelastic memory on the buffeting response of tall buildings [J]. Wind and Structures, 2004, 7: 89—106.
- [7] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 278—285.
Zhu Weiqiu. Random vibration [M]. Beijing: Science Press, 1998: 278—285. (in Chinese)
- [8] Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation [J]. Applied Mechanics

Reviews, 2006, 59(6): 230—248.

[9] Park S W. Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38: 8065—8092.

[10] 李创第, 葛新广, 陆运军. 粘滞和粘弹性阻尼器减震结构的随机响应特性[J]. 应用力学学报, 2011, 28(3): 219—225.

Li Chuangdi, Ge Xinguang, Lu Yunjun. Random response characteristics of dissipation structures with viscous and viscoelastic dampers [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2011, 28(3): 219—225. (in Chinese)

[11] Warburton C B, Soni S R. Errors in response calculations for non-classically damped structures [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1977, 5: 365—376.

[12] Hwang T S, Chang K C, Tsai M H. Composite damping ratio of seismically isolated regular bridge [J]. Engineering Structures, 1997, 19(1): 52—62.

[13] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制——Hamiltonian理论体系框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 203—218.

Zhu Weiqiu. Nonlinear stochastic dynamics and control—Hamiltonian theory system frame [M]. Beijing: Science Press, 2003: 203—218. (in Chinese)

[14] Zambbrano A, Inaudi J A, Kelly J M. Model coupling and accuracy of modal strain energy method [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1996, 122(7): 603—612.

附录:

关于 $\gamma_k(\dot{y}_j)\sin\theta_i(t)$ 和 $\gamma_k(\dot{y}_j)\cos\theta_i(t)$ 的时间平均推导。
 对于函数 $F(A_j, \Phi_j, A_i, \Phi_i, t)$ 的时间平均, 其算子定义为^[7,13]:

$$M_t\{F(A_j, \Phi_j, A_i, \Phi_i, t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(A_j, \Phi_j, A_i, \Phi_i, t) dt \quad (A1)$$

由于 $A_j(t)$ 、 $A_i(t)$ 、 $\Phi_j(t)$ 、 $\Phi_i(t)$ 均为时间的慢变量, 故算子对时间 t 在区间 $(0, T]$ 的积分运算中, $A_j(t)$ 、 $A_i(t)$ 、 $\Phi_j(t)$ 、 $\Phi_i(t)$ 作为常数处理^[7,13], 即: $A_j(t) = A_j(t-\tau) = A_j$ 、 $A_i(t) = A_i(t-\tau) = A_i$ 、 $\Phi_j(t) = \Phi_j(t-\tau) = \Phi_j$ 、 $\Phi_i(t) = \Phi_i(t-\tau) = \Phi_i$ 。

将 $\gamma_k(\dot{y}_j)\sin\theta_i(t)$ 的表达式代入上述算子, 并对积分区域(图 A1)交换 dt 和 $d\tau$ 的积分顺序, 得:

$$M_t\{\gamma_k(\dot{y}_j)\sin\theta_i(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{\omega_j}{T} \times \int_0^T \left[\int_0^t \sin\theta_i(t) h_{Gk}(\tau) A_j(t-\tau) \sin\theta_j(t-\tau) d\tau \right] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{A_j \omega_j}{T} \times \int_0^T \left[\int_\tau^T \sin\theta_i(t) h_{Gk}(\tau) \sin\theta_j(t-\tau) dt \right] d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{A_j \omega_j}{T} \times \int_0^T \left[\int_\tau^T \sin\theta_i(t) \sin\theta_j(t) dt \right] h_{Gk}(\tau) \cos\omega_j \tau d\tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_j \omega_j}{T} \times \int_0^T \left[\int_\tau^T \sin\theta_i(t) \cos\theta_j(t) dt \right] h_{Gk}(\tau) \sin\omega_j \tau d\tau \quad (A2)$$

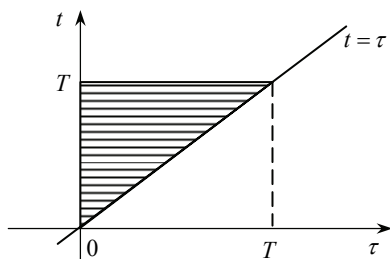


图 A1 变量 t 和 τ 的积分区域
 Fig.A1 The integral region of t and τ

下面分 $j=i$ 和 $j \neq i$ 两种情况进行分析:

1) 当 $j=i$ 时

$$\text{原式} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{A_i \omega_i}{T} \times \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}(T-\tau) - \frac{1}{4\omega_i} [\sin 2\theta_i(T) - \sin 2\theta_i(\tau)] \right\} \times h_{Gk}(\tau) \cos\omega_i \tau d\tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_i \omega_i}{T} \times \int_0^T \left\{ -\frac{1}{4\omega_i} [\cos 2\theta_i(T) - \cos 2\theta_i(\tau)] \right\} h_{Gk}(\tau) \sin\omega_i \tau d\tau \quad (A3)$$

由正弦函数、余弦函数的有界性及正文式(3g), 得:

$$M_t\{\gamma_k(\dot{y}_i)\sin\theta_i(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{A_i \omega_i T}{2T} \int_0^T h_{Gk}(\tau) \cos\omega_i \tau d\tau = -\frac{A_i \omega_i}{2} \int_0^\infty h_{Gk}(\tau) \cos\omega_i \tau d\tau = -\frac{A_i \omega_i}{2} H_{ck}(\omega_i) \quad (A4)$$

2) 当 $j \neq i$ 时

由正弦函数、余弦函数的有界性和正文公式(3g), 以及函数 $\int_0^T \sin\theta_i(t)\sin\theta_j(t) dt$ 的有界性, 得:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{A_j \omega_j}{T} \times \int_0^T \left[\int_\tau^T \sin\theta_i(t) \sin\theta_j(t) dt \right] h_{Gk}(\tau) \cos\omega_i \tau d\tau = 0 \quad (A5)$$

同理可得:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_j \omega_j}{T} \times \int_0^T \left[\int_\tau^T \sin\theta_i(t) \cos\theta_j(t) dt \right] h_{Gk}(\tau) \sin\omega_i \tau d\tau = 0 \quad (A6)$$

所以, 当 $j \neq i$ 时, 由式(A5)和式(A6), 有:

$$M_t\{\gamma_k(\dot{y}_j)\sin\theta_i(t)\} = 0 \quad (A7)$$

综上所述:

$$M_t\{\gamma_k(\dot{y}_j)\sin\theta_i(t)\} = \begin{cases} -\frac{A_i \omega_i}{2} H_{ck}(\omega_i), & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (A8a)$$

$$H_{ck}(\omega_i) = \int_0^\infty h_{Gk}(\tau) \cos\omega_i \tau d\tau \quad (A8b)$$

同理, 可求得:

$$M_t\{\gamma_k(\dot{y}_j)\cos\theta_i(t)\} = \begin{cases} \frac{A_i \omega_i}{2} H_{sk}(\omega_i), & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (A9a)$$

$$H_{sk}(\omega_i) = \int_0^\infty h_{Gk}(\tau) \sin\omega_i \tau d\tau \quad (A9b)$$