

文章编号: 1000-4750(2013)04-0235-06

# 饱和分数导数型粘弹性土层竖向振动放大效应

段玮玮<sup>1</sup>, 闻敏杰<sup>2</sup>, 李 强<sup>1</sup>

(1. 浙江海洋学院土木系, 舟山 316000; 2. 上海大学土木系, 上海 200072)

**摘 要:** 将土骨架视为具有分数阶导数本构关系的粘弹性体, 采用 Biot 动力固结方程, 在频率域内研究了饱和分数导数粘弹性土层的土骨架粘性、土层厚度等对竖向振动放大系数的影响。通过动力控制方程解耦和边界条件束缚, 给出了经典弹性饱和土、分数导数型粘弹性饱和土和经典粘弹性饱和土三种情况下饱和土层的位移、应力和孔压解析表达式。考察了饱和土各物理和几何参数对竖向振动放大系数的影响, 结果表明: 在不同土层厚度时, 经典弹性饱和土、分数导数型粘弹性饱和土及经典粘弹性饱和土的竖向振动放大系数各不相同; 分数导数模型的材料参数对振动放大系数有较大影响。

**关键词:** 岩土工程; 分数导数; 竖向振动; 粘弹性; 比较分析

中图分类号: TU435 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.12.0811

## VERTICAL VIBRATION AMPLIFICATION OF A SATURATED FRACTIONAL DERIVATIVE TYPE VISCOELASTIC SOIL LAYER

DUAN Wei-wei<sup>1</sup>, WEN Min-jie<sup>2</sup>, LI Qiang<sup>1</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316000, China;

2. Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** The soil skeleton is treated as a viscoelastic medium with a fractional derivative constitutive relation. By utilizing the Biot's theory, the influences of the viscosity of soil skeleton and the thickness of soil layer for a saturated soil layer on the vertical vibration amplification coefficient are investigated in the frequency domain. By decoupling dynamic control equations and bounding the boundary conditions, the analytical expressions of the displacement, stress and pore water pressure for the saturated classic elastic, saturated fractional derivative viscoelastic soil and saturated classic viscoelastic soil are obtained. On the basis, the vertical vibration amplification of the soil layer is analyzed for different physical and geometrical parameters of the soil. It is shown that the vertical vibration amplification of the saturated classic elastic, fractional derivative viscoelastic saturated soil and saturated classic viscoelastic soil are different for the different thickness of soil layers; the material parameters of the fractional derivative model have great influences on the vertical vibration amplification coefficient.

**Key words:** geotechnical engineering; fractional derivative; vertical vibration; viscoelastic; comparative analysis

众所周知, 场地土对地震波具有放大作用, 而且场地的自由场反应计算是土-结构动力作用分析的前提。因此, 场地土对地震波放大效应研究对地下结构抗震和震害分析具有重要意义<sup>[1]</sup>。近年来国

内外学者对此进行了深入研究。将土体视为单相弹性介质, Idriss 和 Seed<sup>[2]</sup>、Wolf<sup>[3]</sup>、Davis<sup>[4]</sup>、Zhao<sup>[5]</sup>、尚守平<sup>[6]</sup>等人研究了均匀自由场地的横向和竖向振动响应; 忽略土骨架的粘性, Yang 和 Sato<sup>[7-8]</sup>以

收稿日期: 2011-12-11; 修改日期: 2012-04-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(41002112); 浙江海洋学院 2011 年校级专项科研项目; 浙江省自然科学基金项目(LQ12E08003/LY12E09005)

通讯作者: 段玮玮(1980-), 女, 湖北孝感人, 讲师, 硕士, 从事岩土力学等方面的研究(E-mail: suisui2001@126.com).

作者简介: 闻敏杰(1986-), 男, 浙江海宁人, 硕士生, 从事饱和和多孔介质理论研究(E-mail: 7279026@163.com);

李 强(1972-), 男, 安徽淮南人, 教授, 博士, 从事土动力学研究(E-mail: qiangli001@tom.com).

1995 年阪神地震为例, 讨论了 P 波波速和泊松比等参数对竖向振动放大系数的影响。将土骨架视为经典 Kelvin-Voigt 粘弹性体<sup>[9]</sup>, 马晓华等<sup>[10]</sup>比较分析了弹性和粘弹性土层竖向振动放大系数随频率变化规律的差异。

需要指出的是, 目前已有研究指出经典粘弹性模型在描述粘弹性力学行为时不能更好地与实验数据相吻合<sup>[11]</sup>, 分数导数本构关系仅用少量的参数构成粘弹性材料的数学模型, 并在较大频率范围内描述材料的力学性能<sup>[12]</sup>。最近, 该本构关系在桩基、隧道等工程领域进行深入研究<sup>[13-14]</sup>。本文在现有基础上, 将土骨架视为具有分数导数本构关系的粘弹性体, 采用 Biot 动力固结方程和一维波动理论, 在频率域内研究了饱和分数导数粘弹性土层的土骨架粘性、土层厚度等对竖向振动放大系数的影响。比较分析了经典弹性土、分数导数粘弹土及经典粘弹性饱和土对竖向振动放大系数影响的差异性。

### 1 数学模型与边界条件

如图 1 所示, 现有一厚度为  $L$  的饱和粘弹性土层, 将土骨架视为具有分数导数本构关系的粘弹性体, 其泊松比为  $\nu^S$ ; 将该土层视为液固两相介质, 孔隙率为  $n$ ; 土体总密度为  $\rho^T = (1-n)\rho^S + n\rho^F$ ;  $\rho^F$  和  $\rho^S$  分别为孔隙水和土颗粒密度; 土骨架和孔隙水相对于土骨架的位移矢量分别为  $u^S$  和  $w^F$ ; 液固两相作用系数为  $b = \eta/k$ ,  $\eta$  为流体粘滞系数;  $k$  为 Darcy 渗透系数。孔隙水压力为  $p$ ; 土体总应力张量为  $\sigma^T$ ; 土骨架有效应力为  $\sigma^{SE}$ 。考虑孔隙流体和土骨架的压缩性, 则用两个 Biot 压缩性系数表示为  $\alpha$  和  $M$ 。

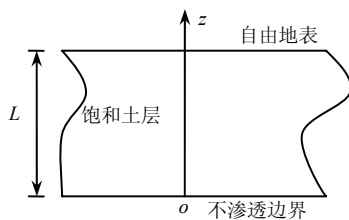


图 1 饱和分数导数型粘弹性土层

Fig.1 Saturated fractional derivative type viscoelastic soils layer

假设上表面( $z = L$ )自由可渗透, 则:

$$p = 0 \tag{1}$$

若上表面( $z = L$ )无应力, 满足:

$$\sigma_z^T = 0 \tag{2}$$

设下表面( $z = 0$ )不渗透, 则:

$$w_z^F = 0 \tag{3}$$

下表面( $z = 0$ )竖向振动产生的位移为:

$$u_z^S = u_0 \tag{4}$$

### 2 控制方程

根据 Biot 理论<sup>[15]</sup>, 流固整体平衡动力方程为:

$$\frac{\partial \sigma_z^T}{\partial z} = \rho^T \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + \rho^F \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} \tag{5}$$

利用分数导数模型描述土骨架应力-位移本构关系<sup>[13]</sup>:

$$(1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma) \sigma_z^{SE} = (1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma) (\lambda^S + 2\mu^S) \frac{\partial u_z^S}{\partial z} \tag{6}$$

式中,  $\tau_\varepsilon$ 、 $\tau_\sigma$ 、 $\lambda^S$ 、 $\mu^S$  为材料参数, 满足  $\lambda^S = 2\nu^S \mu^S / (1 - 2\nu^S)$ 。  $D^\gamma = d^\gamma / (dt)^\gamma$  为  $\gamma$  阶黎曼-刘维尔形式分数阶导数, 且  $0 < \gamma < 1$ , 其表达式为:

$$D^\gamma [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} dt \tag{7}$$

式中,  $\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt$  为 Gamma 函数。

土体总应力本构关系为:

$$\sigma_z^T = \sigma_z^{SE} - \alpha p \tag{8}$$

渗流连续方程为:

$$p = -M \frac{\partial w_z^F}{\partial z} - \alpha M \frac{\partial u_z^S}{\partial z} \tag{9}$$

流体运动方程:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho^F \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + \frac{\rho^F}{n} \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k} \frac{\partial w_z^F}{\partial t} \tag{10}$$

结合式(5)~式(10), 整理得到用位移表示的控制方程为:

$$\frac{(1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma)}{(1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma)} \frac{2(1 - \nu^S)}{1 - 2\nu^S} \mu^S \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial z^2} + \alpha M \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial z^2} + \alpha^2 M \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial z^2} = \rho^T \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + \rho^F \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} \tag{11}$$

$$M \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial z^2} + \alpha M \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial z^2} = \rho^F \frac{\partial^2 u_z^S}{\partial t^2} + \frac{\rho^F}{n} \frac{\partial^2 w_z^F}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k} \frac{\partial w_z^F}{\partial t} \tag{12}$$

对圆频率为  $\omega$  的稳态振动, 设  $u_z^S = LU_z^S e^{i\omega t}$ ,  $w_z^F = LW_z^F e^{i\omega t}$ ,  $p = \mu^S P e^{i\omega t}$ ,  $u_0 = LU_0 e^{i\omega t}$ ; 并引入无量纲量和常量:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= \frac{z}{L}, \quad \lambda = \frac{\omega L}{V^S}, \quad \bar{M} = \frac{M}{\mu^S}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho^F}{\rho^T} \\ \bar{\eta} &= \frac{\eta}{L\sqrt{\mu^S \rho^T}}, \quad T_\sigma = \frac{\tau_\sigma V^S}{L}, \quad T_\varepsilon = \frac{\tau_\varepsilon V^S}{L} \\ \bar{k} &= \frac{k}{L^2}, \quad V^S = \sqrt{\frac{\mu^S}{\rho^T}}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{k}} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

将式(13)代入式(11)和式(12), 可得:

$$\chi \frac{2(1-\nu^S)}{1-2\nu^S} \frac{d^2 U_z^S}{d\beta^2} + \alpha \bar{M} \frac{d^2 W_z^F}{d\beta^2} + \alpha^2 \bar{M} \frac{d^2 U_z^S}{d\beta^2} + \lambda^2 U_z^S + \bar{\rho} \lambda^2 W_z^F = 0 \quad (14)$$

$$\bar{M} \frac{d^2 W_z^F}{d\beta^2} + \alpha \bar{M} \frac{d^2 U_z^S}{d\beta^2} + \bar{\rho} \lambda^2 U_z^S + \frac{\bar{\rho}}{n} \lambda^2 W_z^F - \bar{b} i \lambda W_z^F = 0 \quad (15)$$

式中,  $\chi = (1 + T_\sigma^\gamma (i\lambda)^\gamma) / (1 + T_\varepsilon^\gamma (i\lambda)^\gamma)$ 。

为了求解方程式(14)和式(15), 根据一维波动理论, 将  $U_z^S$ 、 $W_z^F$  分解如下:

$$U_z^S = U_{z1}^S + U_{z2}^S, \quad W_z^F = W_{z1}^F + W_{z2}^F \quad (16)$$

若令  $\delta_1$ 、 $\delta_2$  为与频率相关的系数, 则满足:

$$U_{z1}^S = \delta_1 W_{z1}^F, \quad U_{z2}^S = \delta_2 W_{z2}^F \quad (17)$$

于是, 将式(16)和式(17)代入式(14)和式(15), 并利用边界条件式(1)~式(4), 解得:

$$W_z^F = U_0 \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} \left\{ \frac{\cos[\zeta_1(1-\beta)]}{\cos \zeta_1} - \frac{\cos[\zeta_2(1-\beta)]}{\cos \zeta_2} \right\},$$

$$U_z^S = U_0 \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} \left\{ \frac{\delta_1 \cos[\zeta_1(1-\beta)]}{\cos \zeta_1} - \frac{\delta_2 \cos[\zeta_2(1-\beta)]}{\cos \zeta_2} \right\} \quad (18)$$

式中:

$$\delta_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; \quad \delta_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$

$$A = \bar{\rho} \left[ \frac{2(1-\nu^S)\chi}{1-2\nu^S} + \alpha^2 \bar{M} \right] - \alpha \bar{M};$$

$$B = \left[ \frac{2(1-\nu^S)\chi}{1-2\nu^S} + \alpha^2 \bar{M} \right] \left( \frac{\bar{\rho}}{n} - \frac{i\bar{\eta}}{\bar{k}\lambda} \right) - \bar{M};$$

$$C = \left( \frac{\bar{\rho}}{n} - \frac{i\bar{\eta}}{\bar{k}\lambda} \right) \alpha \bar{M} - \bar{\rho} \bar{M};$$

$$\zeta_1 = \frac{(a_1 b_1 - a_4 b_2 - i a_3 \bar{b} / \lambda)}{a_1 a_2 - a_3 a_4};$$

$$\zeta_2 = \frac{(a_3 b_3 - a_2 b_4 - i a_3 \bar{b} / \lambda) \lambda^2}{a_3 a_4 - a_2 a_1};$$

$$a_1 = \left[ \chi \frac{2(1-\nu^S)}{1-2\nu^S} + \alpha^2 \bar{M} \right] \delta_2 + \alpha \bar{M};$$

$$a_2 = \alpha \bar{M} \delta_1 + \bar{M};$$

$$a_3 = \left[ \chi \frac{2(1-\nu^S)}{1-2\nu^S} + \alpha^2 \bar{M} \right] \delta_1 + \alpha \bar{M};$$

$$a_4 = \alpha \bar{M} \delta_2 + \bar{M}; \quad b_1 = \bar{\rho} \delta_1 + \frac{\bar{\rho}}{n}; \quad b_2 = \delta_1 + \bar{\rho};$$

$$b_3 = \bar{\rho} \delta_2 + \frac{\bar{\rho}}{n}; \quad b_4 = \delta_2 + \bar{\rho}.$$

于是, 由式(8), 可得孔隙水压力为:

$$P = -U_0 (\bar{M} + \alpha \bar{M} \delta_1) \frac{\zeta_1}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\sin[\zeta_1(1-\beta)]}{\cos \zeta_1} + U_0 (\bar{M} + \alpha \bar{M} \delta_2) \frac{\zeta_2}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\sin[\zeta_2(1-\beta)]}{\cos \zeta_2} \quad (19)$$

因此, 根据式(18)和式(19)及本构关系式(8), 得土体总应力为:

$$\sigma_z^T = e^{i\omega t} \mu^S \left\{ U_0 \mathfrak{g}_1 \frac{\zeta_1}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\sin[\zeta_1(1-\beta)]}{\cos \zeta_1} - U_0 \mathfrak{g}_2 \frac{\zeta_2}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\sin[\zeta_2(1-\beta)]}{\cos \zeta_2} \right\} \quad (20)$$

$$\text{式中, } \mathfrak{g}_1 = \left( \frac{2(1-\nu^S)\chi}{1-2\nu^S} + \alpha^2 \bar{M} \right) \delta_1 + \alpha \bar{M},$$

$$\mathfrak{g}_2 = \left( \frac{2(1-\nu^S)\chi}{1-2\nu^S} + \alpha^2 \bar{M} \right) \delta_2 + \alpha \bar{M}.$$

参考文献[10], 定义土体任意深度处 ( $z_0 \leq L$ ) 的位移和土体底部位移 ( $z=0$ ) 的比值为放大系数函数, 则:

$$T(\beta, \lambda) = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} \left\{ \frac{\delta_1 \cos[\zeta_1(1-\beta)]}{\cos \zeta_1} - \frac{\delta_2 \cos[\zeta_2(1-\beta)]}{\cos \zeta_2} \right\} \quad (21)$$

### 3 模型对比

为了验证本文采用分数导数模型研究地震放大效应的正确性和合理性, 将该模型与以往学者常采用的经典弹性模型和标准线性固体模型进行了比较分析。便于计算, 取如下参数:  $\beta=1$ ,  $\nu^S=0.35$ ,  $\bar{M}=20$ ,  $\alpha=0.95$ ,  $\bar{b}=10$ ,  $\bar{\rho}=0.5$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $T_\sigma/T_\varepsilon=3$ ,  $T_\varepsilon=10$ ,  $n=0.4$ ,  $\lambda=1.2$ 。

图 2 表示经典弹性模型、分数导数模型和标准

线性固体模型三种情况下在  $\beta=1$  和  $\lambda=1.2$  处竖向振动放大系数  $T$  分别随无量纲频率  $\lambda$  和无量纲厚度  $\beta$  的变化曲线。由图 2(a)可知, 三种模型相比, 经典弹性模型时竖向振动放大系数  $T$  的共振基频为最小值,  $T$  的峰值处于中间值。标准线性固体模型时放大系数  $T$  的共振基频和峰值都处于最大值, 而分数导数本构模型时放大系数  $T$  的峰值处于最小值, 而基频处于中间值。这是因为分数导数模型时土体的阻抗小于经典弹性模型时土体的阻抗, 而大于标准线性固体模型时土体的阻抗。图 2(b)可见, 经典弹性模型时竖向振动放大系数  $T$  随无量纲土层厚度  $\beta$  变化最快。标准线性固体模型时放大系数  $T$  的值变化最小, 而分数导数粘弹性模型时放大系数  $T$  随厚度  $\beta$  的变化值处于两种模型之间。

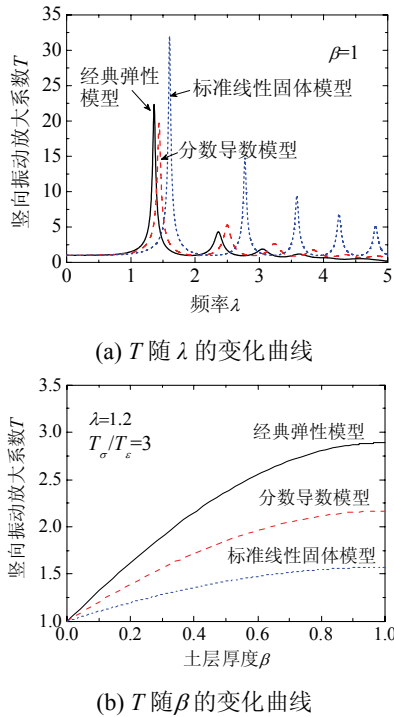


图 2 三种模型对比分析

Fig.2 Comparative analysis for three models

### 4 算例分析

下面考察土层厚度  $\beta$ 、分数导数阶数  $\gamma$ 、材料参数比  $T_\sigma / T_\epsilon$  以及振动频率  $\lambda$  对竖向振动放大系数  $T$  的影响。图 3~图 5 分别表示土层厚度为  $\beta=0.25$ 、 $\beta=0.5$  和  $\beta=1$  时阶数  $\gamma$  对竖向振动放大系数的影响曲线。由图 3 可知, 当  $\beta=0.25$  时, 经典粘弹性饱和土层 ( $\gamma=1$ ) 条件下竖向振动放大系数产生的第 2 个峰值大于第 1 个峰值, 而后随着无量纲频率的增加, 峰值逐渐衰减。阶数  $\gamma=0.5$  时第 1 个峰值为最小值。随着阶数的增加, 放大系数产生的共振

基频逐渐增大, 这是由于阶数的改变促使土体的阻抗产生变化。图 4 可知, 在  $\beta=0.5$  处, 随着频率的增加, 竖向振动放大系数产生的峰值逐渐减小。阶数增加时, 共振的基频也相应增大。图 5 可见, 在  $\beta=1$  处与  $\beta=0.5$  处有类似的影响。综合图 3~图 5 可知, 随着厚度的增加, 竖向振动放大系数逐渐增大。另外, 经典粘弹性饱和土层 ( $\gamma=1$ ) 的竖向振动放大系数产生的共振基频和峰值都是最大, 弹性饱和土层时 ( $\gamma=0$ ) 基频最小。另外, 在土层厚度  $\beta=0.25(z=L/4)$  处, 第 2 个峰值反而所有增大, 之后逐渐衰减。  $\beta=0.5(z=L/2)$  和  $\beta=1(z=L)$  时三种模型具有类似的影响, 峰值逐渐衰减。图 6 表示  $T_\sigma / T_\epsilon = 0.5$  时在  $\beta=1(z=L)$  处三种土层的竖向振动放大系数随频率的衰减曲线。图 5 和图 6 对比得出, 材料参数比  $T_\sigma / T_\epsilon > 1$  和  $T_\sigma / T_\epsilon < 1$  时三种土层模型条件下竖向振动系数存在很大差异,  $T_\sigma / T_\epsilon < 1$  时, 阶数对竖向振动放大系数无明显影响 (图 6), 而  $T_\sigma / T_\epsilon > 1$  时不同阶数对放大系数的影响存在较大差异。图 7 表示在  $\beta=1$  处材料参数比对竖向振动放大系数的影响。可见, 在出现第 1 峰值时, 随着材料参数比的增大, 土体阻抗越大, 峰值逐渐减小, 而峰值随频率衰减越快。图 8 表示土层

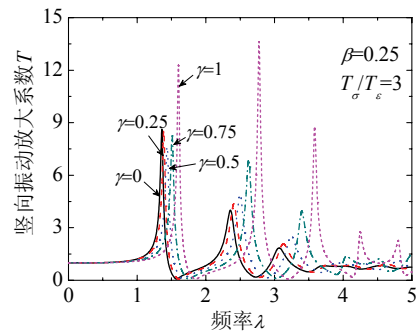


图 3  $\beta=0.25$  时阶数对竖向振动放大系数的影响

Fig.3 Influence of the order on vertical vibration amplification when  $\beta=0.25$

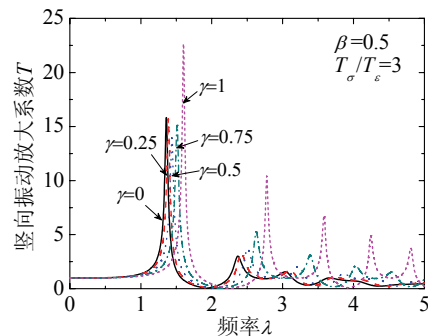


图 4  $\beta=0.5$  时阶数对竖向振动放大系数的影响

Fig.4 Influence of the order on vertical vibration amplification when  $\beta=0.5$

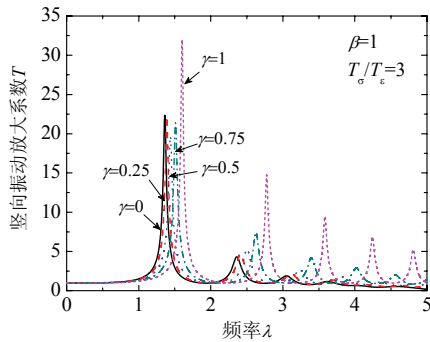


图 5  $T_\sigma/T_\varepsilon=3$ ,  $\beta=1$  时阶数对竖向振动放大系数的影响

Fig.5 Influence of the order on vertical vibration amplification when  $T_\sigma/T_\varepsilon=3$ ,  $\beta=1$

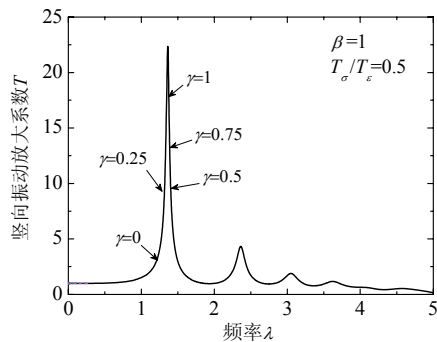


图 6  $T_\sigma/T_\varepsilon=0.5$ ,  $\beta=1$  时阶数对竖向振动放大系数的影响

Fig.6 Influence of the order on vertical vibration amplification when  $T_\sigma/T_\varepsilon=0.5$ ,  $\beta=1$

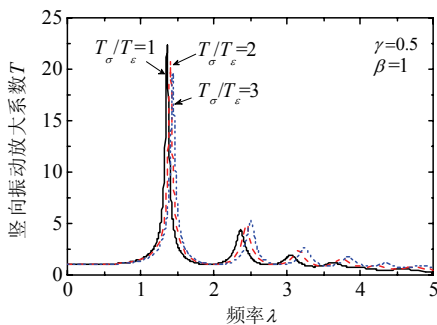


图 7 材料参数比  $T_\sigma/T_\varepsilon$  对竖向振动放大系数的影响

Fig.7 Influence of material parameter on vertical vibration amplification

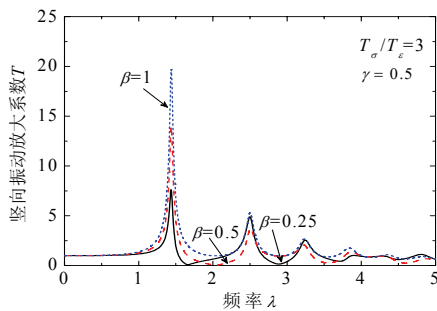


图 8 土层厚度对竖向振动放大系数的影响

Fig.8 Influence of thickness of soil layer on vertical vibration amplification

厚度变化时竖向振动放大系数随频率的变化曲线。可见，第 1 峰值时随着土层厚度的增加，竖向振动放大系数逐渐增大，随着频率逐渐衰减。

## 5 讨论

在现有对土层竖向放大效应研究的基础上，采用分数导数模型描述土骨架的应力和应变本构关系，并将该模型与以往常用的经典弹性模型和标准线性固体(经典粘弹性)模型进行了对比，讨论了本构参数和土体各参数对竖向振动放大系数的影响。目前，该模型在岩土工程领域应用的技术难题是本构参数的确定。因此，笔者还有很多工作要做。最近，已有学者对湛江沿海软土开展不同固结压力作用下的三轴固结不排水蠕变试验，根据蠕变试验数据得到土体的蠕变曲线，然后借助最小二乘法对试验数据进行蠕变曲线拟合，确定了该模型的本构参数<sup>[16]</sup>，为该模型在岩土领域的应用奠定了基础。

## 6 结论

本文将土骨架视为具有分数导数本构关系的粘弹性体，通过对 Biot 动力固结方程解耦，在频率域内得到了饱和分数导数粘弹性土层竖向振动放大系数函数，分析发现分数导数阶数、材料参数、土层厚度等对竖向振动放大系数的影响较大。通过对经典粘弹性饱和土层、分数导数型粘弹性饱和土层以及经典弹性饱和土层比较分析，充分体现分数导数模型的优越性，为更好地进行场地土对地震波放大效应研究提供可靠的理论依据。

### 参考文献:

- [1] 刘林超, 高洪波, 闫启方. 上覆分数导数粘弹性场地地震放大效应[J]. 应用力学学报, 2010, 27(4): 646—649.  
Liu Linchao, Gao Hongbo, Yan Qifang. Seismic response of analysis of amplification of ground soil by fractional derivative viscoelastic model [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2010, 27(4): 646—649. (in Chinese)
- [2] Idriss I M, Seed H B. Seismic response of horizontal soil layers [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1968, 94(4): 1003—1031.
- [3] Wolf J P. 土-结构动力相互作用[M]. 吴世明, 译. 北京: 地震出版社, 1989: 146—151.  
Wolf J P. Dynamic soil-structure interaction [M]. Translated by Wu Shiming. Beijing: Seismic Press, 1989: 146—151. (in Chinese)
- [4] Davis R. Effects of weathering on site response [J].

- Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1995, 24(2): 301—309.
- [5] Zhao J X. Modal analysis of soft-soil sites including radiation damping [J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1997, 26(1): 93—113.
- [6] 尚守平, 李刚, 任慧. 剪切模量沿深度按指数规律增大的场地土的地震放大效应[J]. 工程力学, 2005, 22(5): 153—157, 35.  
Shang Shouping, Li Gang, Ren Hui. Seismic amplification of sites with exponentially increasing shear modulus with depth [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(5): 153—157, 35. (in Chinese)
- [7] Yang J, Sato T. Characterization of a reclaimed site and its seismic vertical amplification [C]// Proceedings of Sessions of Geo-Denver 2000 — Use of Geophysical Methods in Construction. Denver, Colorado, United States: American Society of Civil Engineers, 2000, 296: 187—200.
- [8] Yang J, Sato T. Analytical study of saturation effects on seismic vertical amplification of a soil layer [J]. Geotechnique, 2001, 51(2): 161—165.
- [9] Eringen A C. Mechanics of continua [M]. New York: Huntington Press, 1980: 385—406.
- [10] 马晓华, 徐长节, 蔡袁强. 粘弹性中竖向振动放大系数的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(24): 4534—4539.  
Ma Xiaohua, Xu Changjie, Cai Yuanqiang. Analytical study on vertical vibration amplification of a viscoelastic soil layer [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(24): 4534—4539. (in Chinese)
- [11] 孙海忠, 张卫. 服从分数导数 Kelvin 本构模型的粘弹性阻尼器的阻尼性能分析及试验研究[J]. 振动工程学报, 2008, 21(1): 48—53.  
Sun Haizhong, Zhang Wei. Analysis and experiment on damping properties of visco-elastic damper modeled by fractional Kelvin method [J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(1): 48—53. (in Chinese)
- [12] 朱正佑, 李根国, 程昌钧. 具有分数导数本构关系的粘弹性 Timoshenko 梁的静动力学行为分析[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(1): 1—10.  
Zhu Zhengyou, Li Genguo, Cheng Changjun. Quasi-static and dynamical analysis for viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2002, 23(1): 1—10. (in Chinese)
- [13] 刘林超, 杨骁. 分数导数模型描述的饱和土桩纵向振动分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 526—532.  
Liu Linchao, Yang Xiao. Analysis of vertical vibrations of a pile in saturated soil described by fractional derivative model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(2): 526—532. (in Chinese)
- [14] 杨骁, 闻敏杰. 饱和分数导数型粘弹性土-深埋圆形隧洞衬砌系统的动力特性[J]. 工程力学, 2012, 29(12): 248—255.  
Yang Xiao, Wen Minjie. Dynamic characteristics of saturated fractional derivative type viscoelastic soil and lining system with a deeply embedded circular tunnel [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(12): 248—255. (in Chinese)
- [15] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous media. I. low frequency range [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 168—178.
- [16] 何利军, 孔令伟, 吴文军, 等. 采用分数阶导数描述软黏土蠕变的模型[J]. 岩土力学, 2011, 32(增 2): 239—244.  
He Lijun, Kong Lingwei, Wu Wenjun, et al. A description of creep model for soft soil with fractional derivative [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(Suppl 2): 239—244. (in Chinese)