文章编号: 1000-5641(2011)02-0032-07

最大度是 5 的可平面图的边染色

倪伟平

(枣庄学院 数学与信息科学系, 山东 枣庄 277160)

摘要: 运用 Discharge 方法及临界图的一些重要性质证明了: 最大度是 5 且任意一个 3 -圈与任意一个 4 -圈不相邻接, 或任意一个 3 -圈与任意一个 5 -圈不相邻接的可平面图是第一类图. 从而给出了最大度是 5 的可平面图是第一类图的 2 个充分条件.

关键词: 平面图; 边染色; 最大度; 圈

中图分类号: O157.5 **文献标识码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2011.02.005

Edge colorings of planar graphs with maximum degree five

NI Wei-ping

(*Department of Mathematics and Information Science, Zaozhuang University, Zaozhuang Shandong* 277160, *China*)

Abstract: By applying a discharging method and using some theorems of critical graphs, we proved that every planar graph G with $\Delta = 5$ is of class 1, if any 3-cycle is not adjacent to any 4-cycle or to any 5-cycle in G. Therefore, we concluded two sufficient conditions for planar graph G to be Class 1.

Key words: planar graph; edge coloring; maximum degree; cycle

0 引 言

假定 G 是简单、无向有限的平面图, 分别用 $V(G)$, $E(G)$, $F(G)$ 和 $\Delta(G)$(简记为 Δ) 表示 G 的顶点集合、边集合、面集合和最大度. 若存在一个映射 $\phi:\ E(G) \to \{1, 2, \cdots k\}$, 使得对 G 中任意两条相邻接的边 e_1 和 e_2, 有 $\phi(e_1) \neq \phi(e_2)$, 则称 G 是 k -边可染色的. 使图 G 具有 k -边可染色的最小的正整数 k 定义为 G 的边色数, 记作 $\chi'(G)$. 1964 年, Vizing[1]证明了, 任意一个平面图 G, 都满足 $\Delta \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta + 1$. 将满足 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 的图 G 称为第一类图, 满足 $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ 的图 G 称为第二类图. 如果 G 中的任意两个圈(或面)至少有一条公共边, 则称这两个圈(或面)是相邻接的.

关于平面图的边染色, 目前已经有大量的有趣的结论. Vizing[2] 证明了每个 $\Delta \geqslant 8$ 的简单平面图都是第一类图, 并找出了 $\Delta \in \{2, 3, 4, 5\}$ 的简单平面图存在第二类的例子, 同时猜想这个结论对 $\Delta \geqslant 6$ 的简单平面图也是成立的. 最近, $\Delta = 7$ 的情况已由文献[3, 4]给出了证明. Vizing 对 $\Delta = 6$ 的猜想目前还没有完全得到解决. 对于 $\Delta \leqslant 6$ 的可平面图, 最近的文

收稿日期: 2009-11

作者简介: 倪伟平, 女, 硕士, 研究方向为图论. E-mail: niweipingdd@yahoo.com.cn.

献多集中于寻找其是第一类图的充分条件. 如文献 [5] 证明了, 每个 $\Delta=6$ 且无长度为 3, 4, 5 之一时的圈的简单平面图是第一类图; 文献 [6] 证明了, $\Delta=6$, 没有 6 -圈, 或没有相邻三角形, 或不含有弦的 5 -圈和 6 -圈的可平面图是第一类图; 文献 [7] 证明了, $\Delta=6$ 不含有弦的 5 -圈的可平面图是第一类图; 文献 [8] 证明了, $\Delta=5$ 且围长不小于 4 的可平面图是第一类图; 文献 [9] 证明了, $\Delta=5$且不含 4 -圈或不含 5 -圈的可平面图是第一类图; 文献 [10] 证明了, $\Delta=5$ 且没有相交三角形的可平面图是第一类图.

最近, 借鉴以上文献, 我们也得到了 $4\leqslant\Delta\leqslant6$ 的可平面图是第一类图的一些充分条件. (1) 最大度是 4 且满足下列条件之一的可平面图 G 是第一类图: G 中不含长度为 4 至 9 的圈; G 中不含 4 -圈和 5 -圈, 且任意两个 3 -面不关联于同一个顶点; G 中不含长度在 5 和 8 之间的圈, 且任意两个 3 -圈, 任意两个 4 -圈不关联于同一个点; 围长不小于 4, G 中不含有弦的 8 -圈, 且任意两个 4 -面不关联于同一个顶点. (2) 最大度是 6 且任意两个长度至多是 6 的 k -圈不相邻接的可平面图是第一类图. (3) 最大度是 5 且任意一个 3 -圈和任意一个 4 -圈不相邻接, 或任意一个3-圈和任意一个5-圈不相邻接的可平面图是第一类图. 充分条件 (1) 和 (2) 在文献 [11, 12] 中给出了证明. 这里, 运用 Discharge 方法及临界图的重要性质证明充分条件 (3).

为方便使用, 下面用 $d(x)$ 表示 x 在 G 中的度数, 其中 $x\in V(G)\cup F(G)$. 用 $d_k(v)$ 表示点 v 的度数为 k 的邻点的个数. 度数为 k 的点(或面)称为 k -点(或 k -面), 度数不小于 k 的点(或面)称为 k^+ -点(或 k^+ -面). 如果一个 3 -面 f 关联 3 个度数分别为 $i,\ j,\ k$ 的顶点, 其中 $i\leqslant j\leqslant k$, 则称 f为 $(i,\ j,\ k)$ -面.

1 临界图

定义 1.1 如果图 G 是连通的第二类图, 并且对任意边 $e\in E(G)$, 都有 $\chi'(G-e)<\chi'(G)$, 则称G是一个临界图. 最大度为Δ的临界图, 称为Δ-临界图.

引理 1.1[2] 设 G 是一个 Δ -临界图, $u,v\in V(G)$ 且 u, v 相邻接, $d(v)=k$ 那么

(1) 若 $k<\Delta$, 则 u 至少邻接于 $\Delta-k+1$ 个度为 Δ 的顶点;

(2) 若 $k=\Delta$, 则 u 至少邻接于两个度为 Δ 的顶点;

(3) $d(v)+d(u)\geqslant\Delta+2$.

引理 1.2[3] 设 G 是一个 Δ -临界图, $xy\in E(G)$ 使得 $d(x)+d(y)=\Delta+2$, 那么

(1) 每个 $v\in N(\{x,y\})\setminus\{x,y\}$ 是 Δ -点;

(2) 每个 $v\in N(N(\{x,y\}))\setminus\{x,y\}$ 满足 $d(v)\geqslant\Delta-1$;

(3) 如果 $d(x)<\Delta, d(y)<\Delta$, 则每个 $v\in N(N(\{x,y\}))\setminus\{x,y\}$ 是 Δ -点.

引理 1.3[4] 如果图 G 存在 3 个不同的顶点 $x,\ y,\ z$ 满足下列 2 个条件, 那么 G 不是 Δ -临界图:

(1) $xy\in E(G), xz\in E(G), d(z)<2\Delta-d(x)-d(y)+2$;

(2) xz 包含在至少 $d(x)+d(y)-\Delta-2$ 个不包含顶点 y 的三角形中.

2 任意 3-圈与任意 4-圈不相邻接或任意 3-圈与任意 5-圈不相邻接的可平面图

定理 2.1 最大度是 5 且任意一个 3 -圈和任意一个 4 -圈不相邻接, 或任意一个 3 -圈和任意一个 5 -圈不相邻接的可平面图 G 是第一类图.

证 明 假设定理不成立, 即 G 是第二类图. 不失一般性, 可以假设 G 是 5 -临界图, 显然 G 是 2 -连通的. 因此 G 的每个面的边界是一个圈, 且每条边位于 2 个不同面的边界上. 将

Euler 公式进行简单变形可得

$$\sum_{x\in V}(d(x)-4)+\sum_{x\in F}(d(x)-4)=-8.$$

对任意 $x\in V(G)\cup F(G)$, 定义初值 $ch(x)$ 为$ch(x)=d(x)-4$. 下面根据给出的交换规则 (Discharging rules), 对每一个 $x\in V(G)\cup F(G)$ 的 $ch(x)$ 进行调整, 从而得到新的值 $ch'(x)$. 因为所作的调整始终保证不影响其和式的值, 所以有

$$\sum_{x\in V\cup F}ch(x)=\sum_{x\in V\cup F}ch'(x)=-8.$$

如果可以证明对于每一个 $x\in V(G)\cup F(G)$, 都有 $ch'(x)\geqslant 0$, 则与上式矛盾, 从而定理得证.

情况1 最大度是5且任意一个3-圈和任意一个4-圈不相邻接的可平面图G是第一类图.

定义规则如下.

R1 对每个5-点v, v分值如下.

R1-1 v 分值1给其邻接的 2 -点, 分值 $\frac{1}{3}$ 给与其邻接的每个 3 -点;

R1-2 设 v 与 4 -点 u邻接, 如果 u与 3-点 x邻接, 则 v 分值 $\frac{4}{15}$ 给 u,若不然, v 分值 $\frac{1}{5}$ 给 u;

R1-3 v 分值 $\frac{1-d_2(v)}{5}$ 给与其关联的每个 3 -面.

R2 对 4 -点 v, v 分值 $\frac{1}{3}$ 给与其邻接的每个 3 -点, 分值 $\frac{1}{5}$ 给与其关联的每个 3 -面.

R3 设 f 为 5^+ -面. 若 f 与 $(2,5,5)$ 面 f' 邻接, 且 $|E(f)\cap E(f')|=2$ 时, 由于 G 中任意 3 圈与任意 4 圈不相邻接, 所以, f 必为 6^+ -面, 此时, f 分值 1 给 f', 分值 $\frac{1}{5}$ 给与其邻接的除 f' 之外的每个 3 -面. 若不然, f 分值 $\frac{1}{5}$ 给与其相邻接的每个 3 -面.

对每个 $v\in V(G)$, 有 $d(v)\geqslant 2$. 设 $d(v)=2$, 则 $ch(v)=-2$. 由引理 1.1, v 相邻两个 5 -点, 由 R1-1, $ch'(v)=-2+1\times 2=0$.

设 $d(v)=3$, 则 $ch(v)=-1$. 由引理 1.1, v 相邻 3 个 4^+ -点, 由 R1-1 和 R2, 有 $ch'(v)=-1+\frac{1}{3}\times 3=0$.

设 $d(v)=4$, 则 $ch(v)=0$. 由引理 1.1, $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}\geqslant 3$ 且至多有 1 个 3 -点, 至少有两个 5 -点与 v 邻接, 因 G 中任意 3 圈与任意 4 圈不相邻接, 所以至多存在两个度为 3 的面与 v 关联.

当 $d_3(v)=1$ 时, 由引理 1.2, 有 $d_5(v)=3$. 由 R1-2, v 从邻接的5-点共得值 $\frac{4}{15}\times 3$, 由R2, v 分值 $\frac{1}{3}$ 给其邻接的3-点, 至多分值 $\frac{1}{5}\times 2$ 给与其关联的3 -面. 所以 $ch'(v)\geqslant\frac{4}{15}\times 3-\frac{1}{5}\times 2-\frac{1}{3}>0$.

当 $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}\geqslant 4$ 时, 由引理 1.1, 有 $d_4(v)\leqslant 2, d_5(v)\geqslant 2$. 由 R1-2, v 从邻接的 5 -点至少得值 $\frac{1}{5}\times 2$, 由 R2, v 至多分值 $\frac{1}{5}\times 2$ 给与其关联的 3 -面, 所以 $ch'(v)\geqslant\frac{1}{5}\times 2-\frac{1}{5}\times 2=0$.

设 $d(v)=5$, 则 $ch(v)=1$. 由引理 1.1, $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}\geqslant 2$ 且至多有一个 2 -点, 至少有 2 个 5 -点与 v 邻接. 因 G 中任意 3 圈与任意 4 圈不相邻接, 所以至多存在两个度为 3 的面与 v 关联.

当 $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}=2$ 时, 由引理 1.2, 有 $d_5(v)=4$. 由 R1-1和R1-3, 有 $ch'(v)=1-1=0$.

当 $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}=3$ 时, 由引理 1.1, 有 $d_3(v)\leqslant 2$, $d_5(v)\geqslant 3$. 若 $d_3(v)=2$, 由引理 1.3, v 至多关联 1 个 3 -面, 由 R1-1 和 R1-3, 有 $ch'(v)\geqslant 1-\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{5}>0$. 若 $d_3(v)=1$,

由引理 1.1, 有 $d_4(v) \leqslant 1$, $3 \leqslant d_5(v) \leqslant 4$. 由 R1-1, R1-2, R1-3, v 至多分值 $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}\times 2$, 所以$ch'(v) \geqslant 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}\times 2\right)=0$.

当 $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}\geqslant 4$ 时, 由引理 1.1, 有 $d_4(v)\leqslant 3, d_5(v)\geqslant 2$. 若 $d_4(v)\geqslant 2$, 由引理 1.2, v 的邻接 4 -点 u 满足: $\min\{d(w)\,|w\in N(u)\}\geqslant 4$, 由 R1-2, v 至多分值 $\frac{1}{5}\times 3$ 给其邻接的 4 -点, 由 R1-3, v 至多分值 $\frac{1}{5}\times 2$ 给其关联的 3 -面, 所以 $ch'(v)\geqslant 1-\frac{1}{5}\times 3-\frac{1}{5}\times 2=0$. 若 $d_4(v)=1$, 则 $d_5(v)=4$, 由 R1-2和R1-3, v 至多分值 $\frac{4}{15}$ 给其邻接的 4 -点, 至多分值 $\frac{1}{5}\times 2$ 给与其关联的 3 -面, 所以 $ch'(v)\geqslant 1-\frac{4}{15}-\frac{1}{5}\times 2>0$.

设 $f\in F(G)$, 则 $d(f)\geqslant 3$. 如果 $d(f)=4$, 则 $ch(f)=0$, 取 $ch'(f)=0$.

如果 $d(f)\geqslant 5$, 则 $ch(f)\geqslant 1$. (1) 当 f 与 $(2,5,5)$ -面 f' 邻接且 $|E(f)\cap E(f')|=2$ 时, 由于 G 中任意 3 圈与任意 4 圈不相邻, 所以 $d(f)\geqslant 6$. 由引理 1.1和引理 1.2, 在 f 的边界上至多存在 $\left[\frac{d(f)}{4}\right]$ 个 2 -点, 则 f 至多与 $\left[\frac{d(f)}{4}\right]$ 个 $(2,5,5)$ -面相邻接. 除此之外, f 至多还与 $d(f)-2\left[\frac{d(f)}{4}\right]$ 个其它的 3 -面相邻接. 根据 R3, f 给其邻接的 3 -面至多分值 $\frac{1}{5}\left(d(f)-2\left[\frac{d(f)}{4}\right]\right)+\left[\frac{d(f)}{4}\right]\times 1$, 所以,

$$ch'(f)\geqslant d(f)-4-\frac{1}{5}\left(d(f)-2\left[\frac{d(f)}{4}\right]\right)-\left[\frac{d(f)}{4}\right]\times 1.$$

当 $d(f)=6, 7$ 时, 经验证有 $ch'(f)>0$; 当$d(f)\geqslant 8$时, 有

$$ch'(f)\geqslant \frac{4}{5}d(f)-\frac{3}{5}\times\left[\frac{d(f)}{4}\right]-4\geqslant\frac{13}{5}\left[\frac{d(f)}{4}\right]-4>0.$$

(2) 当 f 不满足 (1) 的条件时, 则 f 至多邻接 $d(f)$ 个 3 -面. 由 R3, f 至多分值 $\frac{1}{5}d(f)$ 给其相邻接的 3 -面, 所以 $ch'(f)\geqslant d(f)-4-\frac{1}{5}d(f)=4[\frac{1}{5}d(f)-1]\geqslant 0$.

如果 $d(f)=3$, 则 $ch(f)=-1$, 令 x, y, z 是与 f 关联的三个不同的顶点且 $d(x)\leqslant d(y)\leqslant d(z)$, 根据引理 1.1–1.3, f 只能是下面几种形式之一: $(2,5,5)$ -面, $(3,4,5)$ -面, $(3,5,5)$ -面, $(4,4,4)$ -面, $(4,4,5)$ -面, $(4,5,5)$ -面, $(5,5,5)$ -面. 当 f 是 $(2,5,5)$ -面时, 令 f' 是 2 -点关联的另一面, 由于 G 中任意 3 圈与任意 4 圈不相邻接, 所以 $d(f')\geqslant 6$, 由 R3, $ch'(f)=-1+1=0$. 当 f 是其它 6 种 3 -面时, 因为 G 中任意一个 3 圈与任意一个 4 圈不相邻接, 所以 f 必与 3 个 5^+ -面相邻接. 由 R3, f 得值 $\frac{1}{5}\times 3$. 若 f 是 $(5,5,5)$ -面, 由引理 1.2, x, y, z 中至多有一个点与 2 -点邻接, 不妨设其为 x, 由 R1-3, f 从 y, z 分别得值 $\frac{1}{5}$, 所以, 有 $ch'(f)\geqslant -1+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times 2=0$; 若 f 是 $(3,4,5)$ -面, $(3,5,5)$ -面, $(4,4,4)$ -面, $(4,4,5)$ -面, $(4,5,5)$ -面, 由 R1-3和 R2, 顶点 x, y, z 中, 至少有两个点分别分值 $\frac{1}{5}$ 给 f, 所以, $ch'(f)\geqslant -1+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times 2=0$. 情况 1 得证.

情况 2　最大度是 5 且任意一个 3 -圈和任意一个 5 -圈不相邻接的可平面图 G 是第一类图.

令 s 是顶点 v 所关联的 3 -面的个数, 由于 G 中任意一个 3 -圈和任意一个 5 -圈不相邻接, 所以, 有下面的断言.

断言 2.1　G 中每个 4 -点 v 至多关联 2 个 3 -面, 即 $s\leqslant 2$. 当 $s\geqslant 1$ 时, v 还关联 2 个 6^+ -面.

断言 2.2　G 中每个 5 -点 v 至多关联 3 个 3 -面, 即 $s\leqslant 3$. 当 v 与 2 -点邻接时, 若 $s=3$, 则 v 还关联 1 个 7^+ -面和1个 6^+ -面, 若$1\leqslant s\leqslant 2$, 则 v 还关联 2 个 6^+ -面; 当 v 不与2-点邻接时, 若$s\geqslant 1$, 则 v 至少还关联2个 6^+ -面.

定义规则如下.

R1 对 G 中每个 5 -点 v, v 分值如下.

R1-1 v 分值 1 给其邻接的 2 -点;

R1-2 设 v 与 3 -点 x 邻接, 若 x 又与 4 -点邻接, 则 v 分值 $\frac{1}{2}$ 给 x, 若不然, v 分值 $\frac{1}{3}$ 给 x;

R1-3 若 v 邻接 5 -点 u, u 与 2 -点 x 邻接, 而 v 与 x 不邻接, 则 v 分值 $\frac{1}{7}$ 给 u;

R1-4 设 5 -点 u 与 3 -点 x 和 4 -点 y 邻接, 且 u 关联 $(3,4,5)$ -面、$(k,5,5)$ -面、$(5,5,5)$ -面3个3-面, 其中 $k=3$, 4 或 5. 由于 G 中任意一个 3 -圈和任意一个 5 -圈不相邻接, 所以, y 的邻接 5 -点中至少存在一个 5 -点不与 (3, 4, 5) -面关联, 设此邻接 5 -点是 v, 则 v 通过 y 分值 $\frac{1}{3}$ 给 u.

R2 对每个度为 3 的面 f, 设 x, y, z 是 f 的三个不同顶点, 且 $d(x)\leqslant d(y)\leqslant d(z)$

R2-1 若 f 是 $(k,5,5)$ -面, $k=2,3$, 则 y, z 分别分值 $\frac{1}{2}$ 给 f;

R2-2 若 f 是 $(3,4,5)$ -面, 则 y 分值 $\frac{1}{3}$, z 分值 $\frac{2}{3}$ 给 f;

R2-3 若 f 的顶点的度至少为 4, 则 x, y, z 分别分值 $\frac{1}{3}$ 给 f.

R3 设 f 是度至少为 5 的面, 则 f 分值 $\frac{d(f)-4}{d(f)}$ 给与其关联的每个顶点.

设 $f\in F(G)$, 则 $d(f)\geqslant 3$. 若 $d(f)=4$, 则 $ch(f)=0$, 取 $ch'(f)=0$. 如果 $d(f)\geqslant 5$, 则 $ch(f)=d(f)-4\geqslant 1$, 由 R3, $ch'(f)=d(f)-4-\frac{d(f)-4}{d(f)}\times d(f)=0$.

如果 $d(f)=3$, $ch(f)=-1$. 由于 $\Delta=5$, 根据引理 1.1–1.3, f 必为下列 3 -面之一: $(2^{+},5,5)$ 面, $(3,4,5)$ -面, $(4,4,4)$ -面, $(4,4,5)$ -面, 由 R2-1, R2-2, R2-3, 有 $ch'(f)=-1+1=0$.

对 $v\in V(G)$, 有 $d(v)\geqslant 2$. 设 $d(v)=2$, 则 $ch(v)=-2$. 由引理 1.1, v 与两个 5 -点邻接, 由 R1-1, $ch'(v)=-2+1\times 2=0$.

设 $d(v)=3$, 则 $ch(v)=-1$. 由引理 1.1, v 至少与 2 个 5 -点, 至多与 1 个 4 -点邻接. 由 R1-2, 当 $d_4(v)=1$ 时, v 得值 $\frac{1}{2}\times 2$; 当 $d_5(v)=3$ 时, v 得值$\frac{1}{3}\times 3$, 所以, $ch'(v)=-1+\min\left\{\frac{1}{2}\times 2,\frac{1}{3}\times 3\right\}=0$.

设 $d(v)=4$, 则 $ch(v)=0$. 由引理 1.1, v 至多与 1 个 3 -点、至少与两个 5 -点邻接. 由断言 2.1, 有 $s\leqslant 2$. 当 $s\geqslant 1$ 时, 由断言 2.1及 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 2$, 由 R2-2, R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{3}\times 2$ 给其邻接的 3 -面, 所以, $ch'(v)\geqslant\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 2=0$; 当 $s=0$ 时, 取 $ch'(v)=0$.

设 $d(v)=5$, 则 $ch(v)=1$. 由引理 1.1, $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}\geqslant 2$ 且至多有一个2-点, 至少有 2 个 5 -点与 v 邻接. 由断言 2.2, 有 $s\leqslant 3$.

首先, 设 v 按 R1-4分值给不与其邻接的 5 -点 u, 则由引理 1.2, 有 $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}=4$, $d_5(v)=4$. 按 R1-4的分值要求, u 关联 $(3,4,5)$ -面、$(k,5,5)$-面、$(5,5,5)$-面, k=3, 4, 或 5. 由于 G 中任意 1 个 3 -圈与任意 1 个 5 -圈不相邻接, 当 k=3, 或 5 时, 这样的 u 点至多有 2 个, 当 $k=4$ 时, 这样的 u 点只有一个. 令 t 为 u 点的个数, 则 $1\leqslant t\leqslant 2$.

若 $t=2$, 则 v 的邻接 4 -点 y 关联 2 个 $(3,4,5)$ -面. 由断言 2.1, vy 关联 2 个 6^{+} -面, 即 v 关联 2 个邻接的 6^{+} -面. 由于 G 中任意 3 -圈与 5 -圈不邻接, 此时, v 至多关联 2 个 3 -面, 且 $1\leqslant s\leqslant 2$ 时, v 至少关联 3 个 6^{+} -面. 因此, $1\leqslant s\leqslant 2$ 时, 由 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 3$. 由引理 1.2, v 的邻接 5 -点中至多有 3 个点满足 R1-3 的分值, 由 R1-3, R1-4, R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{3}\times 4+\frac{1}{7}\times 3$ 给与其邻接的及不邻接的 5 -点和关联的 3 -面, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 3-\left(\frac{1}{3}\times 4+\frac{1}{7}\times 3\right)>0$. $s=0$ 时, 由 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 2$. 由引理 1.2, v 的邻接 5 -点中至多有 4 个点满足 R1-3的分值, 由 R1-3, R1-4, v 至多分出值 $\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{7}\times 4$, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{7}\times 4\right)>0$.

若 $t=1$, 则 v 的邻接 4 -点 y 关联1个 $(3,4,5)$ -面. 由断言 2.2及 R3, v 至多关联 3 个 3 -面,

且 $s \geqslant 1$时, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 2$. $s=3$ 时, 由引理 1.2, v 的邻接 5 -点中至多有 2 个点满足 R1-3 的分值, 由 R1-3, R1-4, R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{3}\times 4+\frac{1}{7}\times 2$, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{3}\times 4+\frac{1}{7}\times 2\right)>0$; 若 $1\leqslant s\leqslant 2$, 由引理 1.2, v 的邻接 5 -点中至多有 3 个点满足 R1-3 的分值, 由 R1-3, R1-4, R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{3}\times 3+\frac{1}{7}\times 3$, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{3}\times 3+\frac{1}{7}\times 3\right)>0$; 若$s=0$, 由引理 1.2, v 的邻接 5 -点中至多有 4 个点满足 R1-3 的分值, 由 R1-3, R1-4, 有 $ch'(v)\geqslant 1-\left(\frac{1}{7}\times 4+\frac{1}{3}\right)>0$.

因此, 在下面的讨论中, 可以假设 v 只分值给与其邻接的顶点及与其关联的 3 -面.

当 v 与 2 -点 x 邻接时, 由引理 1.2, 有 $d_5(v)=4$, 且 v 的邻接 5 -点中至少有 3 个点与 x 不邻接, 由 R1-3, v 至少得值 $\frac{1}{7}\times 3$. (1) $s=3$ 时, 由断言 2.2及 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}+\frac{3}{7}$, 由 R1-1, R2-1, R2-3, v 至多分值 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 2$ 给其关联的 3 -面及邻接的 2 -点, 所以 $ch'(v)\geq 1+\frac{1}{7}\times 3+\frac{1}{3}+\frac{3}{7}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 2\right)>0$; (2) $1\leqslant s\leqslant 2$ 时, 由断言 2.2及 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 2$, 由 R1-1, R2-1, R2-3, v 至多分值 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 给其关联的 3 -面及邻接的 2 -点, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{7}\times 3+\frac{1}{3}\times 2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)>0$. (3) $s=0$ 时, v 至多分值1给与其邻接的 2 -点, 所以, $ch'(v)\geqslant 1-1=0$.

当 $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}=3$ 时, 由引理 1.1, v 至多与 2 个 3 -点, 至少与 3 个 5 -点邻接. 若 $s=0$, 无论 v 与 2 个 3 -点还是 1 个 3- 点相邻接, 由 R1-2, v 至多分值 $\frac{1}{2}\times 2$, 所以, $ch'(v)\geqslant 1-\frac{1}{2}\times 2=0$. 若 $1\leqslant s\leqslant 3$, 可按下面情况讨论:

假如 $d_3(v)=2$, 由引理 1.3, v 至多关联 2 个 3 -面, 皆为 $(5,5,5)$ -面. 由断言 2.2及 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 2$, 由 R1-2和 R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 2$ 给其关联的 3 -面及邻接的 3 -点, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{2}{3}\right)=0$.

假如 $d_3(v)=1$ 且 $d_4(v)=1$, 由引理1.2, 有$d_5(v)=3$. 由断言 2.2及 R3, v 至少得值$\frac{1}{3}\times 2$. $1\leqslant s\leqslant 2$ 时, 由 R1-2, R2-1, R2-2, R2-3, v 至多分值 $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)>0$. $s=3$ 时, 若 v 关联 $(3,4,5)$ -面,$(k,5,5)$ -面, $(5,5,5)$ -面, 其中 k=3, 或 4, 或 5, 由 R1-4, v 至少得值 $\frac{1}{3}$, 由 R1-2, R2-1, R2-2, R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=0$. 若 v 关联的 3 -面中不含 $(3,4,5)$ -面, 由 R1-2, R2-1, R2-2和R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 2$, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 2\right)=0$.

假如 $d_3(v)=1$, $d_5(v)=4$, 由断言 2.2及 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 2$. 若 $s=3$, 则 v 至少关联 1 个 $(3,5,5)$ -面. (1) v 关联的 3 个 3 -面中, 若有 2个 $(3,5,5)$ -面, 由 R1-2, v 分值 $\frac{1}{3}$ 给其邻接的 3 -点, 由 R2-1和 R2-3, v 分值 $\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}$ 给其邻接的 3 -面, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 2\right)=0$; (2) v 关联的 3 个 3 -面中, 若有 1 个 $(3,5,5)$ -面, 则由 R1-2, v 至多分值 $\frac{1}{2}$ 给其邻接的 3 -点, 由 R2-1和 R2-3, v 分值 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 2$ 给其邻接的 3 -面, 所以, 有 $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 2\right)=0$. 若$1\leqslant s\leqslant 2$, 由 R1-2, R2-1, R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{2}$ 给其邻接的 3 -点, 至多分值 $\frac{1}{2}\times 2$ 给其关联的 3 -面, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{2}\times 3>0$.

当 $\min\{d(u)\,|u\in N(v)\}\geqslant 4$ 时, 由引理 1.1, 有 $d_5(v)\geqslant 2$, $d_4(v)\leqslant 3$. 当 $1\leqslant s\leqslant 3$ 时, 由断言 2. 2及 R3, v 至少得值 $\frac{1}{3}\times 2$, 由 R2-3, v 至多分值 $\frac{1}{3}\times 3$ 给其关联的 3 -面, 由 R1-3及引理 1.2, v 至多分值 $\frac{1}{7}\times 4$ 给其邻接的 5 -点, 所以, $ch'(v)\geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\left(\frac{1}{3}\times 3+\frac{1}{7}\times 4\right)>0$; 当 $s=0$ 时, 由 R1-3 及引理 1.2, v 至多分值 $\frac{1}{7}\times 5$ 给其邻接的 5-点, 所以, 有 $ch'(v)\geqslant 1-\frac{1}{7}\times 5>0$. 情况 2 得证.

由情况 1和情况 2的证明可知, 定理 2.1 成立. 即最大度是 5 且任意一个 3 -圈和任意一个 4 -圈不相邻接, 或任意一个 3 -圈和任意一个 5 -圈不相邻接的可平面图 G 是第一类图.

[参 考 文 献]

[1] VIZING V G. On an estimate of the chromatic index of a p-graph[J]. Diskret Analiz, 1964(3): 25-30.

[2] VIZING V G. Critical graphs with given chromatic class[J]. Diskret Analiz 1965(5): 9-17.

[3] ZHANG L. Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1 [J]. Graphs Combin, 2000(4): 467-495.

[4] SANDERS D P, ZHAO Y. Planar graphs of maximum degree seven are class 1[J]. J Combin Theory Ser B, 2001, 83(2): 201-212.

[5] ZHOU G. A note on graphs of class 1 [J]. Discrete Math, 2003, 262(123): 339-345.

[6] BU Y, WANG W. Some sufficient conditions for a planar graph of maximum degree six to be class 1 [J]. Discrete Math, 2006, 306(13): 1440-1445.

[7] WANG W, CHEN Y. A sufficient conditions for a planar graph to be class 1 [J]. Theoretical Computer Science, 2007, 385: 71-77.

[8] LI X, LUO R. Edge coloring of embedded graphs with large girth[J]. Graphs Combin, 2003, 19(3): 393-401.

[9] 吴玉文. 关于平面图的边剖分的若干结果[D]. 山东: 山东大学, 2007.
WU Y W. Some results on edge partitions of planar graphs[D]. Shandong: shandong University, 2007.

[10] 陈永珠, 王维凡. 第一类平面图的一个充分条件[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2007, 30(4): 416-420.
CHEN Y Z, WANG W F. A sufficient condition for a planar graph to be of class I[J]. Journal of Zhejiang Normal Unniversity (Natural Sciences), 2007, 30(4): 416-420.

[11] 倪伟平. 最大度是4的可平面图是第一类图的充分条件[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2010(3): 85-91.
NI W P. Some sufficient conditions for a planar graph of maximum degree four to be Class 1[J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2010(3):85-91.

[12] 倪伟平. 最大度是6不含相邻k-圈的可平面图的边染色[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2010(5): 20-26.
NI W P. Edge coloring of planar graphs for maximum degree six without adjacent k-cycles[J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2010(5): 20-26.

(上接第 16 页)

[6] 仉志余, 王晓霞, 林诗仲, 等. 非线性二阶中立型时滞微分方程的振动和非振动准则[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(3): 325-334.
ZHANG Z Y, WANG X X, LIN S Z, et al. Oscillation and nonoscillation criterla for second order nonlinear neutral delay differentlal equations[J]. Jounnal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2006, 26(3): 325-334.

[7] Manojlovic J, Shoukaku Y, Tanigawa T, Yoshida N. Oscillation criteria for second order differential equations with positive and negative coefficients[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181(2): 853-863.

[8] 李秀云, 刘召爽, 俞元洪. 具有正负系数的二阶中立型时滞微分方程的振动性[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 1028-1030.
LI X Y, LIU Z S, YU Y H. Oscillation of second-order neutral delay differential equations with positive and negative coefficients[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(6): 1028-1030.

[9] 何宏庆, 仉志余. 二阶非线性中立型时滞微分方程的振动准则[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(23): 130-134.
HE H Q, ZHANG Z Y. Oscillation criteria for the second-order nonlinear neutral delay differential equations[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2007, 37(23): 130-134.

[10] 杨甲山. 具有正负系数的二阶非线性中立型方程的非振动准则[J]. 工程数学学报, 2010, 27(1): 118-124.
YANG J S. Nonoscillation criteria for second order nonlinear neutral equations with positive and negative coefficients [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2010, 27(1): 118-124.

[11] LUO H, ZHUANG R K, GUO X M. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equation with damping [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(4): 441-448.