

文章编号: 1000-4750(2012)01-0032-07

一种基于修正 SSPH 近似的 无网格局部 Petrov-Galerkin 法

肖毅华, 胡德安, 韩 旭, 龙述尧

(湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 湖南, 长沙 410082)

摘 要: 首先采用奇异权函数对对称光滑粒子流体动力学(SSPH)近似进行了修正, 使其构造的形函数近似满足 δ 函数性质, 方便无网格法中本质边界条件施加; 然后应用修正的 SSPH 近似法构造试函数, 结合以 Heaviside 函数为权函数的局部弱形式, 提出了一种新的求解弹性静力问题的无网格局部 Petrov-Galerkin 法; 最后应用新的无网格法计算了一系列数值算例, 结果表明: 该方法具有良好的精度和收敛性。

关键词: 弹性力学; 无网格局部 Petrov-Galerkin 法; SSPH 近似; 奇异权函数; Heaviside 函数

中图分类号: O343 **文献标志码:** A

A MESHLESS LOCAL PETROV-GALERKIN METHOD BASED ON MODIFIED SSPH APPROXIMATION METHOD

XIAO Yi-hua, HU De-an, HAN Xu, LONG Shu-yao

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: In this paper, the singular weight function is introduced to modify the symmetric smoothed hydrodynamics (SSPH) approximation method firstly, which makes the shape functions constructed satisfy the Dirac delta function properties approximatively and the enforcement of essential boundary conditions become easier. Then, a new meshless Petrov-Galerkin method is proposed for solving elasticity problems by using the modified SSPH approximation method to construct trial function in local weak form with Heaviside weight function. Finally, several plane problems are calculated with the presented method. Numerical results demonstrate that the new method can achieve quite good accuracy and convergence.

Key words: elasticity; meshless local Petrov-Galerkin method; SSPH approximation; singular weight function; Heaviside function

无网格局部 Petrov-Galerkin (MLPG)法^[1-2]在对场变量插值和局部弱形式积分时均不需要网格信息, 是一种真正的无网格法。它在热传导、断裂力学、板弯曲以及高速冲击等问题中都得到了应用^[3-6]。在 MLPG 法中, 试函数和权函数不需要来自相同的函数空间, 通过选择不同形式的试函数和权函数可以得到多种性能各异的 MLPG 法^[7]。对于

权函数的选择, 已有研究表明 Heaviside 函数是相当理想的, 能消除子域上的积分, 计算效率高、精度好。而对于试函数的构造, 目前虽已存在多种方法, 如移动最小二乘(MLS)法^[8]、径向基函数(RBF)法等, 但这些方法构造试函数的计算过程都比较复杂, 成为制约 MLPG 法高效计算的重要因素。并且, 这些方法得到的试函数的形函数一般不具有 δ 函

收稿日期: 2010-04-19; 修改日期: 2010-06-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902038, 10972075); 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主课题项目(60870003); 教育部长江学者与创新团队发展计划项目(531105050037)

通讯作者: 胡德安(1977-), 男, 江西吉安人, 副教授, 博士, 从事计算力学研究(E-mail: hudean@163.com).

作者简介: 肖毅华(1984-), 男, 湖南娄底人, 博士生, 从事无网格法理论与应用研究(E-mail: xyhtome@yahoo.com.cn);

韩 旭(1968-), 男, 河北张家口人, 教授, 博士, 博导, 院长, 从事计算力学研究(E-mail: hanxu@hnu.edu.cn);

龙述尧(1945-), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士, 博导, 从事计算力学研究(E-mail: sylong@hnu.cn).

数性质, 给本质边界条件的施加也带来一定困难。所以, 在 MLPG 法中引入和发展新的高效的方法来构造试函数对提高其计算效率和精度具有重要意义。

对称光滑粒子流体动力学(SSPH)法^[9-10]是一种新型的无网格近似法, 可用于构造试函数。它具有近似精度高、计算形函数导数时无需对形函数求导、计算效率高的特点, 但它构造的形函数不具有 δ 函数性质, 因而应用于无网格法时本质边界不能直接施加。目前, SSPH 法在无网格法中已得到初步应用。Batra 等^[9]用 SSPH 法构造近似函数, 提出了基于 SSPH 近似的配点法和 MLPG 法, 并求解了二维弹性静力问题。

本文首先对 SSPH 法进一步研究, 采用奇异权函数对其进行修正; 然后应用修正的 SSPH 法构造试函数, 并以 Heaviside 函数作为局部弱形式的权函数, 提出了一种新的求解弹性静力问题的 MLPG 法。新的方法利用了 SSPH 法计算形函数导数简单的优点, 而且因修正的 SSPH 法的形函数有 δ 函数性质而可以直接施加本质边界条件。另外, 它在无体力的情况下只需在子域边界上对弱形式进行积分。

1 SSPH 近似

以二维场函数的近似为例给出 SSPH 法近似公式的推导过程。场函数 $u(\mathbf{x})$ 在点 \mathbf{x} 处的 m 阶泰勒展开式可以表示为:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} \left[(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y} \right]^i u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1)$$

考虑 $m=2$, 忽略式(1)中三次及三次以上的导数项, $u(\mathbf{x})$ 可近似为:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}; \mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{p}(\mathbf{x}; \mathbf{x})$ 和 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 分别为基向量和系数向量, 其表达式为:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}; \mathbf{x}) = \left[1, \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}, \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})^2, \frac{1}{2}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^2, (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}) \right]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \left[u(\mathbf{x}), \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (4)$$

以式(2)作为 $u(\mathbf{x})$ 在点 \mathbf{x} 的邻域内的局部近似式, 根据加权最小二乘原理, 使近似式(2)与 $u(\mathbf{x})$ 间

的加权误差 $J(\mathbf{x})$ 在点 \mathbf{x} 的邻域内最小化, 可以得到系数向量 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 。 $J(\mathbf{x})$ 的定义为:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}_I) - u_I]^2 \quad (5)$$

其中: n 为离散节点的总数; I 为节点号; $w(\mathbf{x}_I, \mathbf{x})$ 为紧支权函数; $u^h(\mathbf{x}_I)$ 和 u_I 分别为节点 I 处的近似值和精确值。

将式(2)代入式(5), 并表示成矩阵形式有:

$$J(\mathbf{x}) = [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}]^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}] \quad (6)$$

其中矩阵 \mathbf{P} 、 \mathbf{W} 和向量 \mathbf{u} 的表达式分别为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) & p_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) & \mathbf{L} & p_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \\ p_1(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) & p_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) & \mathbf{L} & p_k(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ p_1(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) & p_2(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) & \mathbf{L} & p_k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} w(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & w(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \mathbf{L}, u_n]^T \quad (9)$$

式(7)~式(9)中: k 为基向量中基函数的数目; p_I 表示基向量中的第 I 个基函数。

为使 $J(\mathbf{x})$ 极小, 对式(6)关于 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 求极值得:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

式中: $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P}$; $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x})$ 。

求解关于 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 的线性方程组式(10)得到:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (11)$$

在式(11)中, 令 $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})$, 则 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 可以表示为:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (12)$$

由于 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 中的元素为场函数在点 \mathbf{x} 处的函数值及其相应的导数值, 故式(12)即为 SSPH 法对场函数及其导数的近似, 写为标量形式有:

$$\begin{cases} u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n C_{1I}(\mathbf{x})u_I \\ u^h_{,x}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n C_{2I}(\mathbf{x})u_I \\ u^h_{,y}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n C_{3I}(\mathbf{x})u_I \end{cases} \quad (13)$$

式中: C_{IJ} 表示矩阵 \mathbf{C} 中第 I 行 J 列的元素。由式(13)可知, 矩阵元素 C_{1I} 即为节点 I 的形函数, C_{2I} 和 C_{3I} 则分别为形函数对坐标 x 和 y 的一阶导数。

由上述推导过程可见, SSPH 法通过求解线性方程组(10)同时得到了形函数及其导数, 形函数导数的计算过程相当简单。而且, SSPH 法的权函数仅作为误差函数中的加权系数, 在计算过程中不需要对其求导。所以, 权函数只需满足以下条件即可: 连续; 非负; 在节点处取最大, 随着到节点距离的增大逐渐衰减; 在节点影响域外为 0。遵循上述原则, 本文取权函数为:

$$w(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) = \begin{cases} (1-r^2)^\alpha, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad \alpha=4.0 \quad (14)$$

式中: r 定义为 $r = \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}\| / d_I$, d_I 表示节点 I 的影响域半径。

2 修正的 SSPH 近似

SSPH 法构造的形函数不具有 δ 函数性质, 即 $C_{1I}(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ 。本文借鉴 Lancaster 等人^[3]修正 MLS 近似的思想, 通过构造奇异权函数对 SSPH 法修正。奇异权函数的形式如下:

$$\mathfrak{w}(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) = \frac{w(\mathbf{x}_I, \mathbf{x})}{(|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}| / d_I)^\beta + \varepsilon} \quad (15)$$

式中: β 为控制参数; ε 为一很小的正常数。参数 β 和 ε 的选择有一定的任意性, 可以通过数值研究来确定一个合理的取值。

奇异权函数在节点处具有奇异性, 权函数值很大。当近似计算点 \mathbf{x} 为某一节点时, 误差函数 $J(\mathbf{x})$ 的大小几乎完全由该节点处的误差控制, 这使得节点处的近似值必须与精确值非常接近, 从而使近似函数近似具有插值特性, 相应地, 其形函数近似满足 δ 函数性质。

以式(15)描述的奇异权函数 \mathfrak{w} 取代式(5)中的权函数 w , 按照上节中相同的推导过程可以得到修正的 SSPH 近似的形函数 \mathfrak{C}_{1I}^0 及其导数 \mathfrak{C}_{2I}^0 和 \mathfrak{C}_{3I}^0 。它们的计算表达式的形式分别与 C_{1I} 、 C_{2I} 、 C_{3I} 相同, 只需将其中的权函数 w 替换为奇异权函数 \mathfrak{w} 。修正的 SSPH 法的近似函数及其导数可以表示为:

$$\begin{cases} u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \mathfrak{C}_{1I}^0(\mathbf{x}) u_I \\ u_{,x}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \mathfrak{C}_{2I}^0(\mathbf{x}) u_I \\ u_{,y}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \mathfrak{C}_{3I}^0(\mathbf{x}) u_I \end{cases} \quad (16)$$

3 基于修正的 SSPH 近似的 MLPG 法

根据子域上的加权残量法, 以 Heaviside 函数

为权函数^[7,11], 可以得到一种在计算上简单、高效的弹性静力问题控制方程的局部弱形式:

$$-\int_{L_s} \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_{st}} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{b} d\Omega \quad (17)$$

式中: Ω_s 为局部子域; L_s 为子域边界 $\partial\Omega_s$ 在问题域 Ω 内的部分, $\Gamma_{su} = \partial\Omega_s \mathbf{I} \Gamma_u$, $\Gamma_{st} = \partial\Omega_s \mathbf{I} \Gamma_t$, 且 $\partial\Omega_s = L_s \mathbf{U} \Gamma_{su} \mathbf{U} \Gamma_{st}$, Γ_u 和 Γ_t 分别为位移边界和面力边界。另外, \mathbf{t} 为面力向量, $\bar{\mathbf{t}}$ 为 Γ_t 上给定的面力, \mathbf{b} 为给定的体力向量。

在平面问题中, 面力向量 $\mathbf{t} = [t_x \ t_y]^\top$ 。应用面力-应力关系以及弹性本构关系, \mathbf{t} 可表示为:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (18)$$

式中: 应力向量 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^\top$; 应变向量 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{xy}]^\top$; \mathbf{D} 为弹性矩阵。矩阵 \mathbf{n} 和 \mathbf{D} 的表达式为:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{平面应力}) \quad (19)$$

其中: n_x 、 n_y 为边界的单位外法向量的分量; E 、 μ 分别为弹性模量和泊松比。

在式(18)中代入应变-位移关系, 并用式(16)给出的修正 SSPH 法近似位移移函数的导数, 可以得到近似的面力向量:

$$\mathbf{t} = \sum_{J=1}^n \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \quad (20)$$

式中:

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}_{2J}^0 & 0 & \mathfrak{C}_{3J}^0 \\ 0 & \mathfrak{C}_{3J}^0 & \mathfrak{C}_{2J}^0 \end{bmatrix}^\top; \quad \mathbf{u}_J = \begin{bmatrix} u_{xJ} \\ u_{yJ} \end{bmatrix} \quad (21)$$

将式(20)代入式(17), 导出最终的无网格法求解公式:

$$\mathbf{K}_{2n \times 2n} \mathbf{U}_{2n \times 1} = \mathbf{F}_{2n \times 1} \quad (22)$$

其中: \mathbf{U} 为待求的位移向量; \mathbf{K} 和 \mathbf{F} 分别为刚度矩阵和载荷向量, 相应的计算表达式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{IJ} = -\int_{L_s} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{S} \mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Gamma \\ \mathbf{F}_I = \int_{\Gamma_{st}} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{b} d\Omega \\ \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}, \quad S_i = \begin{cases} 1, & u_i \text{ 被指定} \\ 0, & u_i \text{ 未指定} \end{cases} \quad i = x, y \end{cases} \quad (23)$$

式(23)中只有载荷向量的体力项涉及子域上的积分, 其余项均只需在子域边界上积分, 因而积分

的计算量小、计算效率高。在本文算例中，不涉及体力，完全不用计算子域上的积分。

对于本质边界条件，由于修正的 SSPH 法构造的形函数近似满足 δ 函数性质，所以可以直接施加。假设第 i 个自由度的位移指定为 $u_i = \bar{u}_i$ ，则通过下述操作可以直接施加边界条件：

$$\begin{cases} K_{ii}=1; F_i = \bar{u}_i \\ K_{ij} = K_{ji} = 0; F_j = F_j - K_{ji}\bar{u}_i, j=1, \dots, 2n, j \neq i \end{cases} \quad (24)$$

4 数值测试

4.1 修正的 SSPH 法的形函数

为检验奇异权函数对 SSPH 近似修正的有效性，首先对 SSPH 和修正的 SSPH 的形函数进行分析。在一维情况下，取插值区间为 $[0,1]$ ，采用 11 个等距分布的节点进行离散，节点间距为 $\Delta = 0.1$ ，每个节点的影响域半径为 $d_I = 3.0\Delta$ 。图 1 给出了采用 SSPH 和修正的 SSPH 构造的中心节点 ($x = 0.5$) 的形函数图。由该图可见，SSPH 的形函数不满足 δ 函数性质，而修正 SSPH 的形函数近似满足了 δ 函数性质。

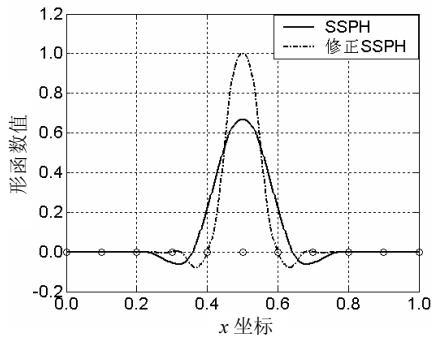


图 1 一维情况下中心节点的形函数(共 11 个节点)

Fig.1 1D shape function of the central node (11 nodes in total)

奇异权函数中的参数 β 和 ε 对修正的 SSPH 的形函数存在影响。表 1 分析了参数 ε 对形函数的影响。由该表可见， ε 越小，形函数的 δ 函数性质满足程度越好。但 ε 不能取得过小，否则容易导致矩阵 A 奇异，从而难以准确地对其求逆。图 2 给出了不同 β 值下的形函数图。参数 β 主要对形函数的光滑性存在影响， $\beta > 1$ 时形函数的光滑性较好。为使形函数能很好地满足 δ 函数性质、避免奇异性带

表 1 奇异权函数中参数 ε 的影响

Table 1 Influence of the parameter ε in singular weight function

ε	1×10^{-2}	1×10^{-4}	1×10^{-6}	1×10^{-8}	1×10^{-10}
$\max(\mathcal{C}_I^0(x_j) - \delta_{IJ})$	2.2×10^{-2}	2.4×10^{-4}	2.4×10^{-6}	2.4×10^{-8}	2.4×10^{-10}

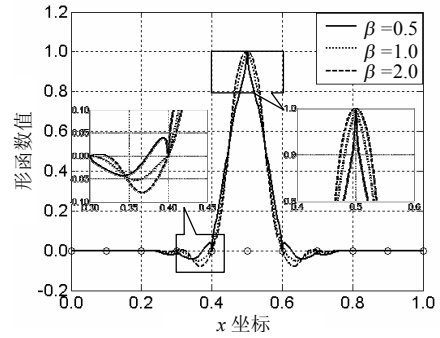


图 2 奇异权函数中参数 β 的影响

Fig.2 Influence of parameter β in singular weight function

来的数值计算困难，并使其具有较好的光滑性，本文在以下计算中取 $\varepsilon = 10^{-8}$ 和 $\beta = 2$ 。

4.2 修正的 SSPH 法的近似精度

近似方法的精度直接影响到最终的无网格法的求解精度。因此，我们需要对修正的 SSPH 法的近似精度进行分析。下面以曲面拟合来测试修正的 SSPH 法的近似精度及相关参数的影响。取测试函数为：

$$f(x, y) = \sin x \cos y \quad (25)$$

其定义域 Ω 为 $x \in [0.5, 1.5]$ ， $y \in [0.5, 1.5]$ 。曲面拟合结果的相对误差定义为：

$$E_f = \sqrt{\int_{\Omega} (f^h - f^e)^2 d\Omega} / \sqrt{\int_{\Omega} (f^e)^2 d\Omega} \quad (26)$$

其中： f^h 和 f^e 分别表示函数的近似值和精确值。域 Ω 采用 121 个均匀分布的节点离散，节点间距为 $\Delta = 0.1$ ，每个节点取相同的影响域半径 $d_I = \eta\Delta$ ，其中 η 为控制参数。图 3 给出了不同 η 值下修正的 SSPH 法的拟合结果的相对误差。由该图可见：

1) 相对误差在 10^{-4} 的量级，说明修正的 SSPH 法具有很高的近似精度；

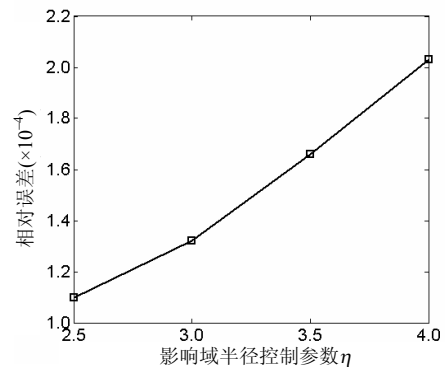


图 3 不同影响域半径下修正的 SSPH 法的近似误差

Fig.3 Approximation errors of modified SSPH method with different radii of influence domain

2) 随着影响域半径的增大，近似精度有所降低。所以，为得到更高的近似精度，节点影响域半径应尽可能取得小些，但同时也应使计算点领域内

有足够的节点以免矩阵 A 奇异。当近似式中采用二次基($m=2$)时, η 取 3.0 比较合理。

4.3 悬臂梁

如图 4 所示, 悬臂梁在自由端受按抛物线分布的面力作用。此问题存在精确解^[12], 我们以其来检验本文提出的无网格法的计算精度。

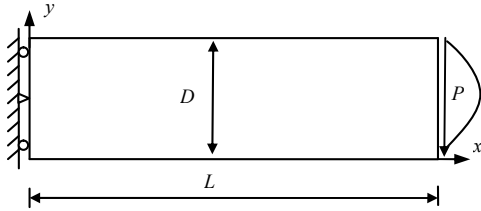


图 4 悬臂梁
Fig.4 A cantilever beam

计算时, 取悬臂梁的几何参数为 $L=48\text{m}$ 、 $D=12\text{m}$, 材料参数为弹性模量 $E=3\times 10^7\text{Pa}$ 、泊松比 $\mu=0.3$, 载荷 P 呈抛物线分布, 峰值大小为 -1000Pa ; 对悬臂梁采用 $175(25\times 7)$ 个均匀分布的节点离散, 每个节点的影响域半径取为该节点到与其相距第三近的节点间距离的 3 倍。本算例中确定影响域半径的方法同样应用在下面 2 个算例中。另外, 本文各算例中的各参数均采用国际标准单位。

图 5 给出了悬臂梁位于 x 轴上的各节点的挠度。图 6 为梁截面 $x=L/2$ 上的正应力和剪应力计算结果。可见, 本文方法计算得到的位移和应力均与精确解相符, 这说明本文方法具有良好的计算精度。

为研究本文方法的收敛性, 采用 9×3 、 17×5 、 25×7 和 33×9 这 4 种均匀分布的节点离散方案进行了计算, 图 7 给出了应力的相对误差随节点间距的变化。由该图可见, 本文方法的计算误差随节点间距的减小而单调减小, 具有良好的收敛性。

4.4 带圆孔的方板

考虑一无限大方板, 其中心有半径为 $a=1.0\text{m}$ 的圆孔, 在 x 方向受均匀拉应力 $\sigma_0=1.0\text{Pa}$ 作用。本问题也存在精确解^[12]。由于载荷和结构的对称性, 只取方板的四分之一分析。分析模型见图 8, 分析区域的大小为 $5a\times 5a$, 对其采用 121 个节点离散。边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上按精确解约束位移; 边界 $x=5a$ 和 $y=5a$ 上按精确解施加面力; 材料参数为弹性模量 $E=1.0\times 10^3\text{Pa}$ 、泊松比 $\mu=0.25$ 。

图 9 为本文方法求解得到的边界 $x=0$ 上的正应力(σ_{xx})分布。与精确解比较可见, 本文方法计算结果准确, 能很好地反映孔边的应力集中现象。

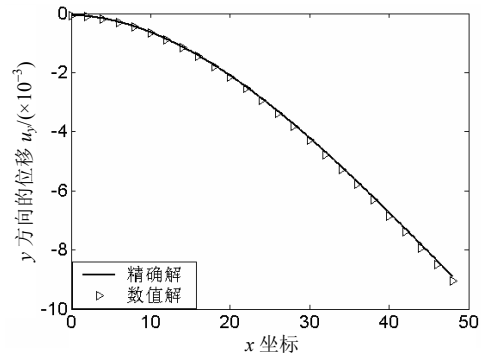


图 5 x 轴上节点沿 y 方向的位移

Fig.5 Displacements in y direction of nodes on the x -axis

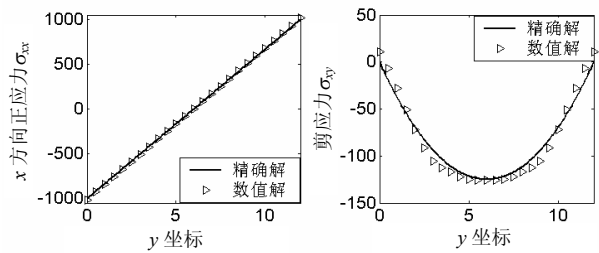


图 6 梁截面 $x=L/2$ 上正应力 σ_{xx} 和剪应力 σ_{xy} 的分布
Fig.6 Distribution of normal stress σ_{xx} and shear stress σ_{xy} on the section $x=L/2$

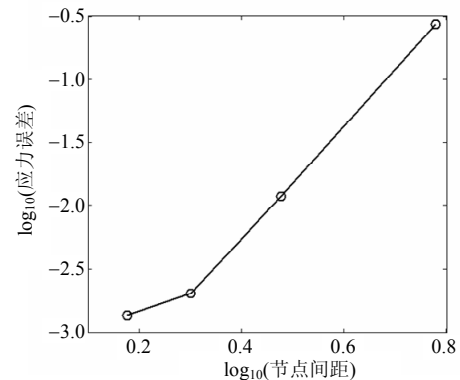


图 7 应力误差的收敛曲线

Fig.7 Convergence of stress error

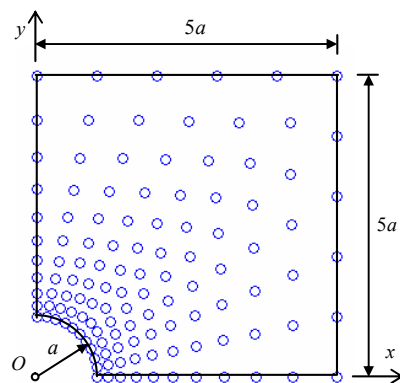


图 8 带中心圆孔的方板的节点离散方案
Fig.8 Nodal arrangement of a square plate with a central circular hole

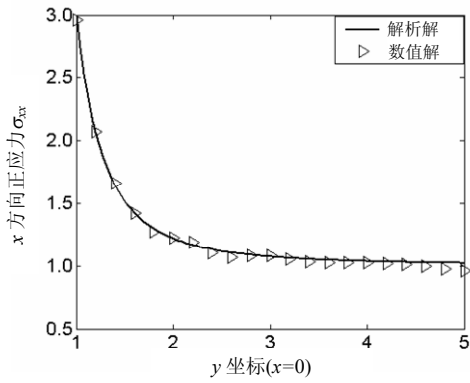


图9 方板的应力分析结果

Fig.9 Stress results of square plate

4.5 连杆

图 10(a)为一受单位轴向拉伸载荷的连杆, 假设其处于平面应力状态, 并根据问题的对称性取一半分析。连杆的材料考虑为纯钛, 材料参数参考文献[13], 弹性模量 $E=107 \times 10^9 \text{Pa}$ 、泊松比 $\mu=0.34$ 。分析时, 采用图 10(b)所示的 1146 个节点进行离散。图 11 给出了本文方法分析得到的连杆的应力 (σ_{xx}) 结果。该图表明, 连杆上的最大应力点出现在中心孔的孔边, 其坐标为(21.268, 3.490), 该点和孔中心的连线与水平轴间的夹角 $\theta=85.6^\circ$, 最大应力值为 2.921。文献[13]基于有限元法对本算例也进行了分析, 表 2 将其结果与本文方法结果进行了对比。两者计算的最大应力点的位置很相近, 最大应力值误差不到 1%。

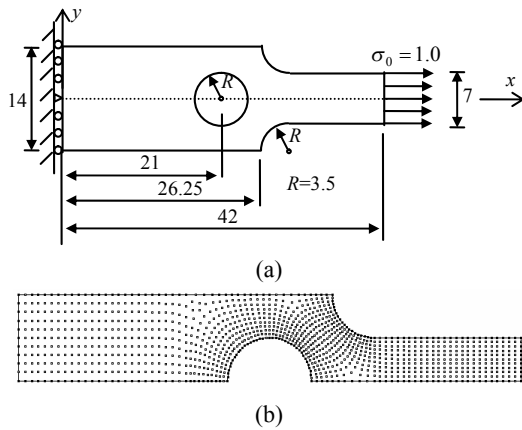


图 10 受轴向拉伸的连杆

Fig.10 A link bar under axial tension

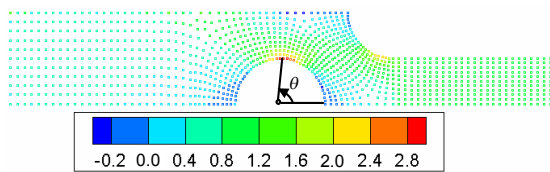


图 11 连杆应力分析结果

Fig.11 Stress result of the link bar

表 2 最大应力点的位置和最大应力的比较

Table 2 Comparison of maximum stress position and maximum stress amplitude

	最大应力点位置	最大应力值
本文方法	中心孔边, $\theta=85.6^\circ$	2.921
有限元法 ^[13]	中心孔边, $\theta=82^\circ$	2.908

5 结论

本文应用奇异权函数对 SSPH 近似进行了修正, 并基于修正的 SSPH 近似, 结合以 Heaviside 函数为权函数的局部 Petrov-Galerkin 离散方案, 提出了一种新的 MLPG 法。文中通过一系列数值算例对修正的 SSPH 近似和新的 MLPG 法进行了测试, 得到以下结论:

- (1) 修正的 SSPH 法构造的形函数近似满足 δ 函数性质, 其形函数的特性与奇异权函数中的 2 个参数 β 和 ε 有关。
- (2) 修正的 SSPH 法具有很高的近似精度, 影响域半径对近似精度有一定影响, 其规律是: 半径越大, 近似精度反而越低。
- (3) 悬臂梁算例的研究结果表明: 新的 MLPG 法具有良好的计算精度和收敛性。
- (4) 带圆孔的方板算例说明新的 MLPG 法能高精度地求解应力集中问题; 连杆算例说明新的 MLPG 法应用于更复杂的几何结构的应力分析是可行的。

新的 MLPG 法利用了 SSPH 法计算形函数导数简单的优点, 而且可以直接施加本质边界条件, 只需在子域边界上积分, 是一种简便通用的计算方法。它为工程问题的分析提供了一种有效的途径。

参考文献:

- [1] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. Computational Mechanics, 1998, 22: 117-127.
- [2] 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. 力学学报, 2001, 33(4): 508-518. Long Shuyao. A local Petrov-Galerkin method for the elasticity problem [J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 33(4): 508-518. (in Chinese)
- [3] Lin H, Atluri S N. Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for convection-diffusion problems [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2000, 1(2): 45-60.
- [4] Ching H K, Batra R C. Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the meshless local Petrov-

- Galerkin (MLPG) method [J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, 2(2): 273–290.
- [5] Long S, Atluri S N. A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for solving the bending problem of a thin plate [J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2002, 3(1): 53–63.
- [6] Han Z D, Atluri S N. A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for 3-Dimensional elasto-dynamics [J]. *Computer, Materials & Continua*, 2004, 1(2): 129–140.
- [7] Atluri S N, Shen S P. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the Finite Element and Boundary Element methods [J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2002, 3(1): 11–51.
- [8] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least-squares methods [J]. *Mathematics of Computation*, 1981, 37: 141–158.
- [9] Batra R C, Zhang G M. SSPH basis functions for meshless methods, and comparison of solutions with strong and weak formulations [J]. *Computational Mechanics*, 2008, 41: 527–545.
- [10] Zhang G M, Batra R C. Symmetric smoothed particle hydrodynamics (SSPH) method and its application to elastic problems [J]. *Computational Mechanics*, 2009, 43: 321–340.
- [11] Xiao J R. Local Heaviside weighted MLPG meshless method for two-dimensional solids using compactly supported radial basis functions [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 117–138.
- [12] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity* [M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [13] Kim J H, Paulino G H. Isoparametric graded finite element for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2002, 69: 502–514.

(上接第 31 页)

- [6] 胡亚元. 饱和多孔微极介质的波动方程及其势函数方程[J]. *地球物理学报*, 2005, 48(5): 1132–1140.
Hu Yayuan. Pragmatic wave equations and their potential equations of a saturated porous micropolar medium [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48(5): 1132–1140. (in Chinese)
- [7] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated soil [J]. *Journal of Acoustic Society of America*, 1956(28): 168–191.
- [8] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1962(33): 1482–1498.
- [9] Tejchman J, Niemunis A. FE-studies on shear localization in an anisotropic micro-polar hypoplastic granular material [J]. *Granular Matter*, 2006(8): 205–220.
- [10] Arslan H, Sture S. Finite element analysis of localization and micro-macro structure relation in granular materials. Part II: Implementation and simulations [J]. *Acta Mechanica*, 2008(197): 153–171.
- [11] 张洪武, 钟万勰, 钱令希. 饱和土动力固结分析中的变分原理[J]. *岩土工程学报*, 1992, 14(3): 20–28.
Zhang Hongwu, Zhong Wanxie, Qian Lingxi. Variational principle for dynamic consolidation analysis of saturated soil [J]. *Chinese Journal of Geotechnics*, 1992, 14(3): 20–28. (in Chinese)