

文章编号: 1000-4750(2012)03-0252-05

# 刹车系统的摩擦自激振动和控制

贾尚帅<sup>1,2</sup>, 丁 千<sup>1,2</sup>

(1. 天津大学力学系, 天津 300072; 2. 天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300072)

**摘 要:** 研究刹车系统的摩擦自激振动和控制问题。采用 LuGre 模型计算摩擦力, 建立了两自由度盘式刹车系统的动力学模型。通过平衡点的稳定性分析, 给出 Hopf 分岔失稳的临界速度。应用基于微分几何法和线性二次型最优控制相结合的方法, 设计单输入单输出的非线性系统控制器, 以便通过推迟系统的分岔临界速度, 减少减速型刹车过程中的摩擦颤振, 避免刹车啸叫。最后分析了控制器和系统参数对控制效果的影响。仿真表明, 该控制器能有效的抑制刹车系统中的摩擦自激振动。

**关键词:** 非线性控制; 刹车系统; 自激振动; 颤振; Hopf 分岔; LuGre 摩擦力

**中图分类号:** O322; TH113.1 **文献标志码:** A

## FRICION-INDUCED SELF-EXCITED VIBRATION AND CONTROL OF A BRAKE SYSTEM

JIA Shang-shuai<sup>1,2</sup>, DING Qian<sup>1,2</sup>

(1. Department of Mechanics, Tianjin 300072, China; 2. Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** The non-linear dynamics and control of friction-induced vibration in a brake system are investigated. Adopting the LuGre friction model, the dynamical equations of a 2-DOF disc brake system are derived by considering the friction force between the disc and the pad. The critical speed of Hopf bifurcation of the equilibrium is obtained through stability analysis. The design method based on differential geometry and linear quadratic optimal control for SISO nonlinear system controller is used to reduce the chatter phenomena during deceleration-type braking by postponing the critical speed of Hopf bifurcation. At last, the influences of the controller and the system parameters are analyzed. The simulation result shows that the method based on differential geometry and linear quadratic optimal is effective to control the self-excited vibration.

**Key words:** nonlinear control; brake system; self-excited vibration; chatter; Hopf bifurcation; LuGre friction

干摩擦会引起部件的振动和失稳, 例如机床刀具和钻杆的颤振、刹车啸叫等。这种振动现象往往会引起加工精度降低、机械部件磨损、噪声, 对工作效率和生活环境造成负面影响等<sup>[1-4]</sup>。刹车系统是保障车辆安全行驶的重要装置, 但摩擦盘、块之间的摩擦力常常导致结构产生刹车啸叫。Giannini 通过实验发现刹车块的面外自激振动是产生啸叫的重要因素<sup>[5]</sup>, 而这种自激振动实际上是接触摩擦界面间的相对运动速度达到一定值时, 由 Hopf 分岔导致的系统失稳现象<sup>[6]</sup>。

虽然目前还没有消除刹车噪声的通用方法, 但引入主动控制被认为是一种有效的手段, 其中控制器的设计是主动控制中的重要部分。Chatterjee<sup>[7]</sup>介绍了控制摩擦自激振动的方法, 主要是通过 Lyapunov 第二方法得到其控制率。Lignon 等通过比较初始系统和受控系统的不稳定区域得到了一些控制策略, 并证明  $\mu$ -synthesis 控制方法能够有效抑制刹车系统的自激振动<sup>[8]</sup>。对于非线性系统, 分岔控制主要是指通过一定的控制手段, 有目的的引入控制器来改变动力系统分岔现象的各种特征。常

收稿日期: 2010-07-09; 修改日期: 2010-11-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(10632040, 10972154); 天津市自然科学基金项目(08JCZDJC20200)

通讯作者: 丁 千(1963-), 男, 安徽人, 教授, 博士, 博导, 从事非线性动力学、振动与控制研究(E-mail: qding@tju.edu.cn).

作者简介: 贾尚帅(1982-), 男, 河北唐山人, 博士生, 从事非线性动力学研究(E-mail: jiashangshuai@163.com).

用的控制手段包括 wash-out 滤波器方法, 线性和非线性反馈法, 频域分析和数值逼近方法, 以及基于规范性和不变集的分岔控制等。文[9]针对机翼的颤振问题, 研究了应用 wash-out 滤波器技术进行的主动控制。

文中采用 LuGre 摩擦力模型, 建立两自由度刹车系统的动力学模型。首先求得平衡点并进行稳定性分析, 得到系统发生 Hopf 分岔的条件。然后应用基于微分几何法和线性二次型最优控制相结合的单输入单输出非线性系统控制器的设计方法, 对刹车系统进行分岔控制, 推迟刹车系统出现自激振动的临界速度, 尽可能地避免刹车啸叫现象。

### 1 摩擦力模型

在摩擦动力学研究中, 摩擦力具有 Stribeck 特性、时间依赖性和记忆特性等。LuGre 动态摩擦模型不仅考虑了粘性摩擦、库仑摩擦, 而且考虑了静态摩擦以及 Stribeck 效应, 能充分反映摩擦运动机理, 是目前较完善的摩擦模型之一<sup>[10]</sup>。

LuGre 模型认为接触面在微观上是粗糙、不规则的, 只有部分接触, 即可以假设成弹性鬃毛之间的接触, 如图 1,  $z$  为鬃毛的平均变形量:

$$\dot{z} = v_r - \frac{\sigma_0 v_r}{g(v_r)} z \quad (1)$$

摩擦力由鬃毛的挠曲产生, 可以描述为:

$$F = \frac{N}{N_0} (\sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v_r) \quad (2)$$

其中:  $v_r$  为系统的相对速度;  $N$  为相对于参考状态  $N_0$  的法向载荷;  $N_0$  为单位力;  $\sigma_0$ 、 $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为鬃毛刚度、微观阻尼器系数和粘性摩擦系数。函数  $g(v_r)$  描述了 Stribeck 效应:

$$g(v_r) = F_c + (F_s - F_c) e^{-(v_r/v_s)^2} \quad (3)$$

式中:  $F_c$  为库仑摩擦力;  $F_s$  是最大静摩擦力;  $v_s$  为 Stribeck 速度。当鬃毛的平均变形处于稳态滑动, 并且忽略粘性摩擦项时,  $\dot{z} = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ , 稳态情况下的摩擦力为:

$$F = \frac{N}{N_0} g(v_r) \quad (4)$$

稳态滑动时, 摩擦力为相对速度的函数, 如图 2,  $g(v) + \sigma_2 v$  为 LuGre 摩擦力,  $1 + \sigma_2 v$  和  $g(v)$  分别为 LuGre 摩擦力中的粘性摩擦和 Stribeck 效应。从图 2 中可以看出, 稳态滑动时的 LuGre 摩擦力在低速时具有负斜率, 即 Stribeck 效应。

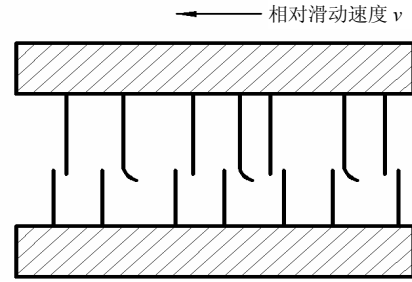


图 1 LuGre 摩擦力模型  
Fig.1 LuGre friction model

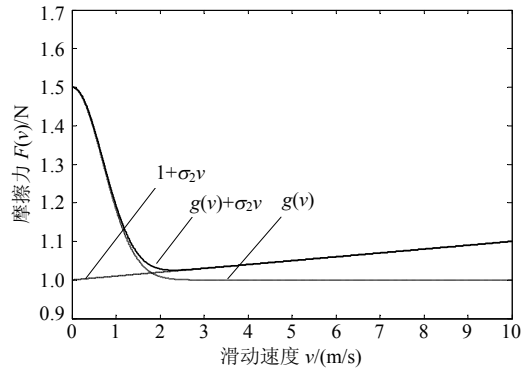


图 2 稳态滑动的摩擦力  
Fig.2 Friction force vs. steady sliding speed

### 2 刹车系统动力学分析

#### 2.1 动力学模型

盘式刹车系统动力学模型如图 3, 将刹车系统简化为一个两自由度模型, 即考虑其面内运动( $y$  方向)和面外运动( $x$  方向), 两个方向运动通过摩擦盘和摩擦块之间的摩擦面倾角  $\theta$  耦合。

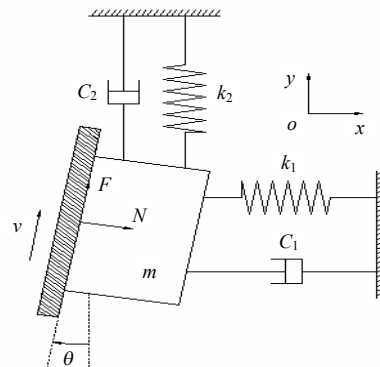


图 3 刹车系统模型  
Fig.3 Braking model

运动微分方程:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + c_2\dot{y} + k_2y = -N \sin \theta + F \cos \theta \\ m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x = N \cos \theta + F \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $F$  为摩擦力;  $N$  为摩擦盘和摩擦块之间的法向压力。面内和面外运动之间的几何约束为:

$$x = y \tan \theta \quad (6)$$

$\theta$  为小量, 则  $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$  和  $\cos\theta \approx 1$ 。考虑稳态滑动下的 LuGre 摩擦力, 由式(5)可得到:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -(k'_1 + k'_2\sigma_0 y_3)y_1 - (c'_1 + c'_2\sigma_0 y_3)y_2 \\ \dot{y}_3 = v - y_2 - \frac{\sigma_0 \times (v - y_2)}{g(v - y_2)} y_3 \end{cases} \quad (7)$$

式中:

$$y_1 = y; \quad y_2 = \dot{y}; \quad y_3 = z; \quad c'_1 = \frac{c_1\theta^2 + c_2}{m(1+\theta^2)};$$

$$c'_2 = \frac{c_2\theta - c_1\theta}{m(1+\theta^2)}; \quad k'_1 = \frac{k_1\theta^2 + k_2}{m(1+\theta^2)}; \quad k'_2 = \frac{k_2\theta - k_1\theta}{m(1+\theta^2)}.$$

## 2.2 平衡点稳定性

式(7)的平衡点对应一个稳定的相对滑动速度, 可以令  $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{y}_3 = 0$ , 得到系统的平衡点:

$$y_{10} = 0, \quad y_{20} = 0, \quad y_{30} = \frac{g(v)}{\sigma_0}$$

令

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (y_1 - y_{10}, y_2 - y_{20}, y_3 - y_{30})^T$$

在平衡点处将式(7)中的第3式进行泰勒级数展开, 得到:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_3 + a_4x_2x_3 \\ \dot{x}_3 = b_1x_2 + b_2x_3 \end{cases} \quad (8)$$

式中:

$$a_1 = -(k'_1 + k'_2g(v)); \quad a_2 = -(c'_1 + c'_2g(v));$$

$$a_3 = -k'_2\sigma_0; \quad a_4 = -c'_2\sigma_0; \quad b_1 = -\frac{vg'(v)}{g(v)};$$

$$b_2 = -\frac{\sigma_0v}{g(v)}; \quad g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-(v/v_s)^2};$$

$$g'(v) = -2\frac{v}{v_s^2}(F_s - F_c)e^{-(v/v_s)^2}.$$

式(8)的 Jacobi 矩阵的特征值满足下列特征方程:

$$\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (9)$$

式中:  $\alpha_2 = -(a_2 + b_2)$ ;  $\alpha_1 = a_2b_2 - a_1$ ;  $\alpha_0 = a_1b_2$ 。

平衡点的稳定性由特征方程式(9)的特征根决定, 由于  $\alpha_0 = a_1b_2 > 0$ , 在满足条件式(10)时, 式(9)存在一对纯虚特征根为  $\lambda_{1,2} = \pm i\Omega = \pm i\sqrt{a_1}$ 。

$$\alpha_0 - \alpha_1\alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0 \quad (10)$$

此时的另外一个特征根  $\lambda_3 = b_2 < 0$ 。由式(10)的等式解出摩擦盘的临界速度  $v = v_c$ , 由 Routh 定理可知, 在  $v = v_c$  时刻, 平衡点处于临界稳定状态。当  $v > v_c$  时, 平衡点处于稳定状态; 当  $v \leq v_c$  时, 摩

擦块的平衡点将失稳。结合式(10), 可以推导出 Hopf 分岔的条件<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} c'_1 + c'_2g(v_c) = 0, k'_1 + k'_2g(v_c) > 0 \\ c = d(\text{Re}(\lambda(v_c)))/dv = -\frac{1}{2}c'_2g'(v_c) \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

若系统满足条件式(11), 则当  $v \leq v_c$  时, 平衡点转变一个极限环, 产生摩擦自激振动, 也就是刹车啸叫。

## 3 Hopf 分岔控制

### 3.1 控制器设计

单输入单输出的受控非线性系统为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ \xi = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $u$  为控制量;  $\xi$  为系统输出; 其他表达式:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_1(\mathbf{x}) = x_2, \quad f_3(\mathbf{x}) = b_1x_2 + b_2x_3, \quad \xi = h(\mathbf{x}) = x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_3 + a_4x_2x_3.$$

应用微分几何法, 通过非线性状态反馈和坐标变换, 将非线性系统精确线性化:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1 = \mu_2 \\ \dot{\mu}_2 = v^* \\ \dot{\psi} = \mu_2 + b_1\mu_2 + b_2(-1 + \psi - \mu_1) \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2]^T = [x_1 \quad x_2]^T$ ;  $v^*$  为待定输入;  $\psi$  为系统零动态状态变量。

系统的零动态  $\dot{\psi} = b_2(-1 + \psi)$ , 由于  $b_2 < 0$ , 可知零动态渐进稳定, 因此精确线性化系统式(13)满足二次型最优控制的控制率为:

$$v^* = -k_1^*\mu_2 - k_0^*\mu_1 = -k_1^*x_2 - k_0^*x_1 \quad (14)$$

对应原系统的控制率为<sup>[12]</sup>:

$$u = -\dot{x}_2 - k_1^*x_2 - k_0^*x_1 \quad (15)$$

受控系统为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5[(a_1 - k_0^*)x_1 + (a_2 - k_1^*)x_2 + a_3x_1x_3 + a_4x_2x_3] \\ \dot{x}_3 = b_1x_2 + b_2x_3 \end{cases} \quad (16)$$

基于二次型最优控制, 系统的状态反馈矩阵满足:

$$v^* = -R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}^*\boldsymbol{\mu}(t) = -\mathbf{K}^*\boldsymbol{\mu}(t) \quad (17)$$

$P^*$ 为满足 Riccati 方程的解:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (18)$$

式中:  $Q$ 、 $R$  分别为状态量的权矩阵和控制量的权系数,  $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2)$ ;  $B$  为系统式(13)对应的控制矩阵  $B = [0 \ 1]^T$ ; 最优反馈增益矩阵  $K^* = [k_0^* \ k_1^*]$ 。

### 3.2 控制结果

系统参数为:  $m=0.01\text{kg}$ ,  $c_1=10\text{N} \cdot \text{s/m}$ ,  $c_2=1\text{N} \cdot \text{s/m}$ ,  $k_1=1 \times 10^5\text{N/m}$ ,  $k_2=2 \times 10^5\text{N/m}$ ,  $\theta=0.1\text{rad}$ ,  $F_c=1\text{N}$ ,  $F_s=1.5\text{N}$ ,  $v_s=1\text{m/s}$ ,  $\sigma_0=1 \times 10^5\text{N/m}$ ,  $\sigma_2=0.01\text{N} \cdot \text{s/m}$ 。

未受控和受控系统响应的模拟计算中, 初始条件取为:  $x_{10}=10^{-4}\text{m}$ ,  $x_{20}=0.1\text{m/s}$ ,  $x_{30}=10^{-8}\text{m}$ , 结果见图 4、图 5。由图 4 可见,  $v=0.8\text{m/s} < v_c=0.9006\text{m/s}$  时, 系统产生超临界 Hopf 分岔, 响应是一个较大的极限环。对于受控系统, 取  $v=0.8\text{m/s} > v_c^*=0.7654\text{m/s}$ , 虽然未受控系统已经失稳并产生极限环运动, 但受控系统的平衡点仍为渐进稳定的, 如图 5 所示。从这个意义来说, 通过控制器的作用, 原来的颤振得到了抑制。

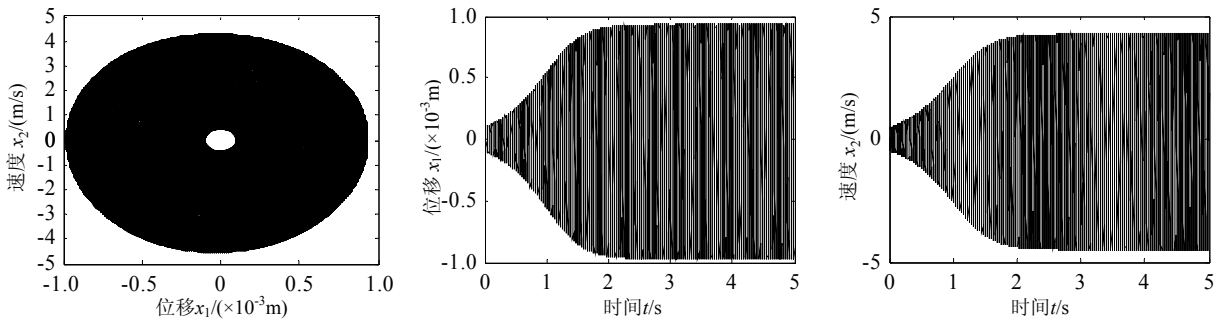


图 4 未控系统动力学响应

Fig.4 Dynamic response of un-controlled system

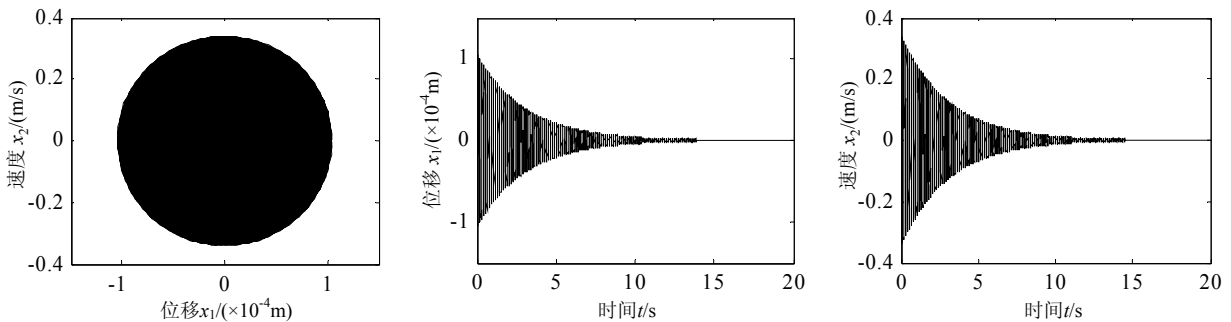


图 5 控制系统动力学响应

Fig.5 Dynamic response of controlled system

由前面的分析可见, 通过改变状态权矩阵  $Q$  和控制权系数  $R$ , 可以改变状态反馈矩阵中的系数  $k_1^*$  和  $k_2^*$ , 进一步推迟分岔点, 减少啸叫现象。图 6 显示临界速度与  $Q$ 、 $R$  和系统阻尼比的关系, 表明

增大  $Q$ , 减小  $R$  和增大系统阻尼比值, 均能降低分岔临界速度。当阻尼比达到一定的值时, 分岔临界速度甚至减小到 0, 避免了颤振啸叫的发生。

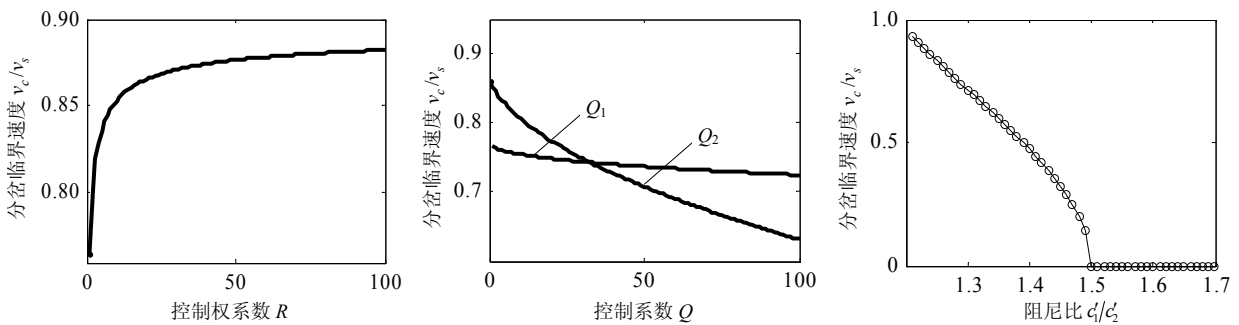


图 6 分岔临界速度与控制和结构参数

Fig.6 Bifurcation critical speed vs. control and structural parameters

## 4 结论

研究两自由度盘式刹车系统的干摩擦自激振动,应用基于微分几何法和二次型最优控制相结合的方法,设计了 Hopf 分岔控制器。研究表明:

(1) 刹车系统的干摩擦自激振动是由 Hopf 分岔引起的。当摩擦盘转速小于临界速度时,平衡点失稳,产生摩擦自激振动,引起刹车啸叫。

(2) 基于微分几何法和二次型最优控制相结合的非线性控制器,不会改变系统 Hopf 分岔的性质(亚临界、超临界),但可以减小系统的分岔临界速度,从而减少减速型刹车过程的啸叫现象。

(3) 控制中的状态权矩阵、状态权系数和系统阻尼比对临界速度均有影响。而通过增大系统阻尼比,甚至可以降低分岔临界速度至 0,理论上能避免颤振啸叫的发生。

### 参考文献:

- [1] Armstrong-Helouvry B, Dupont P, Canudas de Wit C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction [J]. *Automatica*, 1994, 30(7): 1083—1138.
- [2] Chatterjee S. Time-delayed feedback control of friction-induced instability [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, 42(9): 1127—1143.
- [3] Kinkaid N M, O'Reilly O M, Papadopoulos P. Automotive disc brake squeal [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267(1): 105—166.
- [4] 李博, 丁千, 陈艳. 刹车系统摩擦自激振动的数值研究[J]. *科技导报*, 2007, 25(23): 28—32.  
Li Bo, Ding Qian, Chen Yan. Numerical study on the self-excited vibration of disc brake system [J]. *Science and Technology Review*, 2007, 25(23): 28—32. (in Chinese)
- [5] Giannini O, Akay A, Massi F. Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 292(1/2): 1—20.
- [6] Awrejcewicz J, Yuriy P. Dynamics of a two-degrees-of-freedom system with friction and heat generation [J]. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2006, 11(5): 635—645.
- [7] Chatterjee S. Nonlinear control of friction-induced self-excited vibration [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, 42(3): 459—469.
- [8] Lignon S, Sinou J J, Jezequel L. Stability analysis and  $\mu$ -synthesis control of brake systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 298(4/5): 1073—1087.
- [9] 丁千, 陈予恕. 机翼颤振的非线性动力学和控制研究[J]. *科技导报*, 2009, 27(2): 53—61.  
Ding Qian, Chen Yushu. Nonlinear dynamics and control of flutter of airfoil [J]. *Science and Technology Review*, 2009, 27(2): 53—61. (in Chinese)
- [10] Canudas de Wit C, Olsson H, Astrom K J, Lischinsky P. A new model for control of systems with friction [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1995, 40(3): 419—425.
- [11] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.  
Chen Yushu. Bifurcation and chaos theory of nonlinear vibration systems [M]. Beijing: Higher Education Press, 1993. (in Chinese)
- [12] Jean-Jacques E Slotine, Li Weiping. 应用非线性控制[M]. 程代展, 译. 北京: 机械工业出版社, 2006.  
Jean-Jacques E Slotine, Li Weiping. Applied nonlinear control [M]. Translated by Cheng Daizhan. Beijing: Mechanical Industry Press, 2006. (in Chinese)