

文章编号: 1000-4750(2012)04-0072-05

斜卷边冷弯薄壁槽钢轴压柱弹性畸变屈曲计算

罗洪光^{1,2}, 郭耀杰¹, 马石城³

(1. 武汉大学土木建筑工程学院, 武汉 430072; 2. 邵阳学院城市建设系, 邵阳 422000; 3. 湘潭大学建筑工程系, 湘潭 411105)

摘 要: 畸变屈曲是冷弯薄壁卷边槽钢的一种重要屈曲模式, 弹性畸变屈曲临界应力是目前一些主要规范计算畸变屈曲的关键。该文首先推导出畸变屈曲模式下, 构件纵向翘曲位移的显式计算公式, 从而简化计算过程; 然后基于经典的薄板理论, 计算平面内位移, 确定构件平面内的变形, 在现有研究基础上得到斜卷边冷弯薄壁槽钢轴压柱弹性畸变屈曲计算公式; 最后与有限条法、近似模型算法进行对比, 验证了该文计算方法的正确和有效性。该文中的弹性畸变屈曲计算公式简单, 便于手算, 可供工程设计人员参考。

关键词: 冷弯薄壁型钢; 斜卷边槽钢; 弹性畸变屈曲; 轴压柱; 翘曲; 分析计算式

中图分类号: TU391; TU392.5 **文献标志码:** A

CALCULATION OF THE ELASTIC DISTORTIONAL BUCKLING FOR COLD-FORMED THIN-WALLED CHANNEL COLUMNS WITH INCLINED SIMPLE EDGE STIFFENERS UNDER AXIAL PRESSURE

LUO Hong-guang^{1,2}, GUO Yao-jie¹, MA Shi-cheng³

(1. School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. Department of Urban Construction, Shaoyang University, Shaoyang 422000, China;

3. Department of Architectural Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

Abstract: The Distortional buckling is an important buckling mode governing the stability design of cold-formed lipped channel columns. The elastic distortional critical stress is the key point for the distortional buckling calculation according to current main design codes and specifications. The explicit formulae for the longitudinal warping displacement calculation of members in a distortional buckling mode are derived. And the calculation course is simplified. Based on the classical plate theory, the formulae of in-plane displacements are deduced. And the plane deformation of a cross-section is thusly determined. On the base of the existing research results, the formulae of the elastic distortional buckling for cold-formed thin-walled channel columns with inclined simple edge stiffeners under axial pressure are presented. The presented formulae predict good results, compared with the finite strip method and approximation model method. The results demonstrate the validity and efficiency of the method presented in this paper. Being simply and usable, it is a manual method which can give reference to the research and design.

Key words: cold-formed thin-walled steel; channels with inclined simple edge stiffeners; elastic distortional buckling; columns under axial pressure; warping; analytical formulae

收稿日期: 2010-06-28; 修改日期: 2010-11-03

基金项目: 湖南省高等学校科学研究项目(11C1132)

通讯作者: 罗洪光(1974—), 男, 湖南隆回人, 工程师, 博士, 从事钢结构稳定研究(E-mail: 92602@163.com).

作者简介: 郭耀杰(1962—), 男, 湖北武汉人, 教授, 博士, 博导, 从事钢结构稳定研究(E-mail: whuguoyaojie@163.com);

马石城(1963—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士, 副院长, 从事结构工程研究(E-mail: trigamist@163.com).

畸变屈曲是与整体屈曲和局部屈曲不同的一种屈曲模式,在某些情况下畸变屈曲可能成为冷弯薄壁构件承载力的控制因素。目前,北美规范^[1]和澳洲/新西兰规范 AS/NZS 4600:2005^[2]采用直接强度法(DSM)计算畸变屈曲,DSM 设计公式中,弹性畸变屈曲临界应力 σ_{cr} 的求解是畸变屈曲计算的关键,可利用近似模型算法、有限条法及广义梁理论(GBT)等计算 σ_{cr} 。近似模型算法已被 AS/NZS 4600:2005 采纳。近似模型算法适用于手算,不过其计算过程比较复杂,往往需迭代计算^[3]。GBT 能将畸变屈曲从其他屈曲模式分离开来^[4]。有限条法及 GBT 一般需借助相关程序。Silvestre N 和 Camotim D^[5]给出一种简便的计算薄壁铰支轴压构件弹性畸变屈曲 σ_{cr} 的方法,针对直角卷边槽钢,提出 σ_{cr} 的具体计算式。本文研究斜卷边冷弯薄壁槽钢铰支轴压柱弹性畸变屈曲计算,提出简便的具体计算式。

1 纵向翘曲位移

Silvestre N 和 Camotim D^[5]以经典薄板理论为基础,围绕翘曲位移建立平面内外位移之间的关系式,利用能量原理得到弹性畸变屈曲临界应力 σ_{cr} 的计算式:

$$\sigma_{cr} = \frac{2E\sqrt{I_\delta B / (1-\nu^2)} + GJ_\delta}{K_g} \quad (1)$$

对于普通直角卷边槽钢,式(1)中各参数按下列公式确定:

$$I_\delta = \frac{ct}{3\Delta u_s}(u_s^3 - u_f^3) + \frac{bt}{3\Delta u_f}(u_f^3 - u_o^3) + \frac{ht}{2}u_o^2 \quad (2)$$

$$B = \frac{\Delta u_s^2 t^3}{6b^2 c^2 h} \quad (3)$$

$$J_\delta = \frac{\Delta u_s^2 t^3}{3b^2 c^2} \left(c + b + \frac{h}{6} \right) \quad (4)$$

$$K_g = t \left[\frac{\Delta u_s^2}{c} + \frac{\Delta u_f^2}{b} + \frac{c}{3b^2} (\Delta u_s^2 - 3\Delta u_f \Delta u_s + 3\Delta u_f^2) + \frac{b}{3c^2} \Delta u_s^2 + \frac{h}{60b^2 c^2} \cdot (\Delta u_s^2 h^2 - 10\Delta u_f \Delta u_s hc + 30\Delta u_f^2 c^2) \right] \quad (5)$$

$$\Delta u_f = u_f - u_o, \quad \Delta u_s = u_s - u_f \quad (6)$$

式中: b 为翼缘宽度; t 为板材厚度; c 为卷边宽度; h 为腹板高度; ν 为泊松比; E 为材料弹性模量; G

为材料剪切模量; u_o 、 u_f 和 u_s 分别是腹板翼缘交点、翼缘卷边交点和卷边自由端点在构件纵向的翘曲位移。如图 1 所示,卷边槽钢各板件的翘曲位移是线性变化的^[5-7]:

$$\partial u_w(s) / \partial s = 0, \quad \partial u_f(s) / \partial s = \Delta u_f / b,$$

$$\partial u_s(s) / \partial s = \Delta u_s / c$$

图 1 中, x 、 s 和 z 是板件坐标, u 、 v 和 w 分别是 x 、 s 和 z 方向的板件位移。

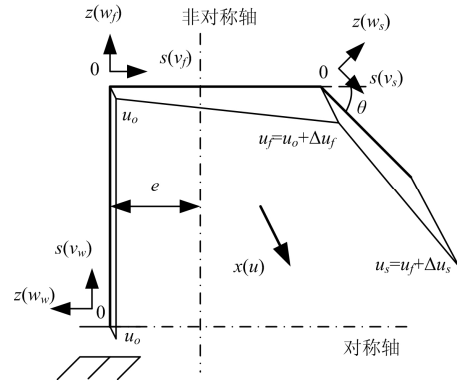


图 1 结构模型与翘曲位移

Fig.1 Structural model and warping displacements

由式(1)~式(6)可知,计算 σ_{cr} 必须先确定翘曲位移。文献[5]首先任意选取一个与各力学模式均独立的翘曲位移分布;然后根据各力学模式之间的正交性得到畸变屈曲模式下的 u_o 、 u_f 和 u_s 。

计算卷边槽钢轴压柱畸变屈曲翘曲位移 U_D , 利用截面的对称性,可只考虑轴压和绕截面非对称轴弯曲两种模式下的翘曲位移 U_A 、 U_{II} , 尽管如此, 仍需进行四次积分计算, 比较复杂。

如果推导出 u_o 、 u_f 和 u_s 的显式计算式, 将简化计算过程。以下计算是针对斜卷边槽钢的。

由于式(1)~式(6)中各中间计算参数均为无量纲量, 因此可任意假定 u_o 、 u_f 和 u_s 中的某一变量:

为简便起见, 令 U_D 中的

$$u_f = 1 \quad (7)$$

U_A 中的 $u_f = u_o = u_s = 1$, U_{II} 中的 $u_o = -1$ 。由材料力学的构件压、弯计算式和图 1 可得:

$$U_D = [u_s(s) \quad u_f(s) \quad u_w(s)] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{s}{c}(u_s - 1) & u_o + \frac{s}{b}(1 - u_o) & u_o \end{bmatrix},$$

$$U_A = [u_s(s) \quad u_f(s) \quad u_w(s)] = [1 \quad 1 \quad 1],$$

$$U_{II} = [u_s(s) \quad u_f(s) \quad u_w(s)] = \begin{bmatrix} \frac{b-e}{e} + \frac{s \cos \theta}{e} & \frac{s-e}{e} & -1 \end{bmatrix}.$$

U_D 与 U_A 、 U_{II} 是正交的^[5]:

$$\int_s U_A U_D ds = 0, \int_s U_{II} U_D ds = 0$$

将 U_D 、 U_A 与 U_{II} 代入以上两式, 求解 u_o 、 u_s 。

如图 1, 其中: e 是截面非对称轴与腹板之间的距离; θ 是斜卷边与翼缘的夹角, 斜卷边偏向腹板时为钝角。考虑截面的对称性, 只计算对称轴上半部截面, 则:

$$\begin{aligned} \int_s U_A U_D ds &= \int_0^c \left[1 + \frac{s}{c} (u_s - 1) \right] ds + \\ &\int_0^b \left[u_o + \frac{s}{b} (1 - u_o) \right] ds + \int_0^{\frac{h}{2}} u_o ds = 0 \\ \int_s U_{II} U_D ds &= -\int_0^{\frac{h}{2}} u_o ds + \int_0^b \frac{s-e}{e} \left[u_o + \frac{s}{b} (1 - u_o) \right] ds + \\ &\int_0^c \left[1 + \frac{s}{c} (u_s - 1) \right] \left[\frac{b-e}{e} + \frac{s \cos \theta}{e} \right] ds = 0 \end{aligned}$$

解得:

$$u_o = -\frac{b^2 + 2bc \cos \theta + c^2 \cos \theta}{2b^2 + 3hb + 2ch \cos \theta + 2cb \cos \theta} \quad (8)$$

$$u_s = -\frac{b+c}{c} - \frac{b+h}{c} u_o \quad (9)$$

式(7)~式(9)是显式计算式, 便于计算 σ_{cr} 。运用式(7)~式(9)计算文献[5]算例中直角卷边冷弯薄壁槽钢轴压柱的 σ_{cr} , 结果与文献[5]一致, 验证了本文推导的纵向翘曲位移计算式的正确性。

2 平面内位移

各板件必须严格满足剪应变为零的 Vlasov's 薄板理论假设^[6-7], 即 $\gamma_{xs} = \partial u / \partial s + \partial v / \partial x = 0$, 因此翼缘在局部坐标 s_f 方向的位移 $v_f = -\Delta u_f / b$, 卷边在局部坐标 s_s 方向的位移 $v_s = -\Delta u_s / c$, 见图 1、图 2。槽钢发生畸变屈曲后的翼缘卷边交点位置可由 v_f 和 v_s 确定, 该点位置确定后, 根据翼缘和卷边仅作刚体转动的假设^[5], 以及腹板与翼缘夹角保持不变, 可确定构件平面内变形, 如图 2 粗虚线所示。

由图 3, 翼缘卷边交点在翼缘局部坐标 z_f 方向的位移为:

$$w_{fs} = \frac{\Delta u_s}{c \sin \theta} - \frac{\Delta u_f}{b \tan \theta} \quad (10)$$

采取与文献[5]相同的简化处理方式, 翼缘和卷边的刚体转动角大小为 w_{fs} / b 。

各板件在局部坐标 z 方向的位移:

$$w_s = w_{fs} \cos \theta + \frac{w_{fs} s}{b} - \frac{\Delta u_f \sin \theta}{b} \quad (11a)$$

$$w_f = \frac{w_{fs} s}{b} \quad (11b)$$

$$w_w = \frac{\Delta u_f}{b} - \frac{w_{fs} h}{4b} \left(1 - \frac{4s^2}{h^2} \right) \quad (11c)$$

各板件局部坐标 s 方向的位移 V 形式上与文献[5]的 s 方向的位移相同:

$$V = [v_s(s) \quad v_f(s) \quad v_w(s)] = [-\Delta u_s / c \quad -\Delta u_f / b \quad 0] \quad (12)$$

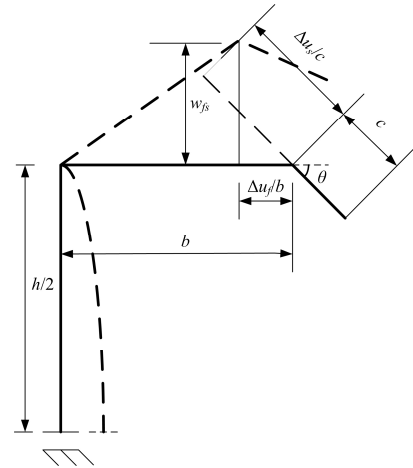


图 2 平面内位移

Fig.2 In-plane displacements

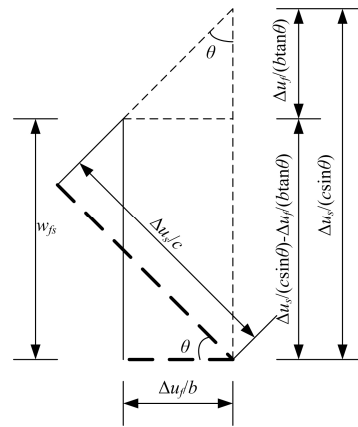


图 3 w_{fs} 的计算

Fig.3 The calculation of w_{fs}

3 相关计算参数

引入斜角 θ 后, 由于位移表达式发生改变, 与应变能有关的计算参数 B 、 J_δ 以及与外力势能相关的参数 K_g 的表达式也会随之相应改变, 需重新推导上述 3 个参数的计算表达式。根据文献[5], 有:

$$\begin{aligned} B &= \frac{t^3}{12} \int_{\Gamma} \mathbf{V}^T \mathbf{V} ds = \frac{t^3}{12} \int_0^{h/2} \mathbf{V}^T \mathbf{V} ds = \\ &\frac{t^3}{12} \int_0^{h/2} \left(\frac{2w_{fs}}{bh} \right)^2 ds = \frac{t^3 w_{fs}^2}{6b^2 h} \quad (13) \end{aligned}$$

$$J_{\delta} = \frac{t^3}{3} \int_{\Gamma} V V^T ds = \frac{t^3}{3} \left(\int_0^c w_s w_s^T ds + \int_0^b w_f w_f^T ds + \int_0^{h/2} w_w w_w^T ds \right) = \frac{t^3}{3} \left(\int_0^c \frac{w_{fs}^2}{b^2} ds + \int_0^b \frac{w_{fs}^2}{b^2} ds + \int_0^{h/2} \frac{4w_{fs}^2 s^2}{b^2 h^2} ds \right) = \frac{t^3 w_{fs}^2}{3b^2} \left(c + b + \frac{h}{6} \right) \quad (14)$$

$$K_g = t \int_{\Gamma} (V V^T + W W^T) ds = t \left(\int_{\Gamma} V V^T ds + \int_0^{h/2} w_w w_w^T ds + \int_0^b w_f w_f^T ds + \int_0^c w_s w_s^T ds \right)$$

将式(11a)、式(11b)、式(11c)、式(12)代入 K_g 得:

$$K_g = t \left[\frac{\Delta u_s^2}{c} + \frac{\Delta u_f^2}{b} + \frac{c}{3b^2} (w_{fs}^2 c^2 - 3\Delta u_f w_{fs} c \cdot \sin\theta + 3\Delta u_f^2 \sin^2\theta + 3w_{fs}^2 b^2 \cos^2\theta + 3w_{fs}^2 b c \cos\theta - 6\Delta u_f w_{fs} b \sin\theta \cos\theta) + \frac{b}{3} w_{fs}^2 + \frac{h}{60b^2} (w_{fs}^2 h^2 - 10\Delta u_f w_{fs} h + 30\Delta u_f^2) \right] \quad (15)$$

翘曲位移采用式(7)~式(9)计算,那么与应变能有关的计算参数 I_{δ} 的计算式(2)适用于斜卷边计算。

至此,斜卷边槽钢较支轴压柱弹性畸变屈曲可通过式(1)计算,式(1)中各参数由下列公式确定:式(2)、式(6)~式(10)、式(13)~式(15)。值得指出的是,本文的 h 、 b 和 c 是截面中心尺寸。

4 与有限条法计算对比

文献[8]利用有限条程序 THIN-WALL^[9]计算卷边槽钢轴压柱的 σ_{cr} 。本文选取其中 $h/b=2$ 的 3 组构件,每一组构件的名义 θ 分别为: 30°、45°、60°、90°、120°、135°、140°。本文和文献[8]均采用构件实际几何尺寸计算,本文公式畸变屈曲计算值 σ_{crd} 与文献[8] σ_{cr} 数据对比如图 4。

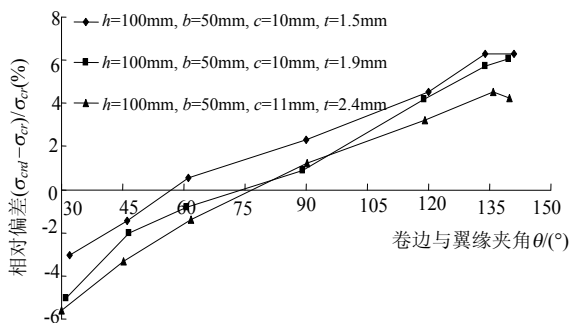


图 4 θ 与 $(\sigma_{cr,d} - \sigma_{cr}) / \sigma_{cr}$ 变化关系

Fig.4 θ vs. $(\sigma_{cr,d} - \sigma_{cr}) / \sigma_{cr}$

从图 4 可见 $\sigma_{cr,d}$ 与 σ_{cr} 吻合较好,相对偏差基本在 $\pm 6\%$ 以内。

5 算例

参考文献[10]的算例:冷弯薄壁卷边槽钢轴压柱板材厚度 $t=1.5\text{mm}$,腹板高度 h 、翼缘宽度 b 、卷边宽度 c 分别为 100.5mm、74.5mm、15.25mm,弹性模量 $E=203.4\text{GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,剪切模量 $G=77.9\text{GPa}$ 。分别计算倾斜角 $\theta=45^\circ$ 和 $\theta=90^\circ$ 卷边槽钢轴压柱的弹性畸变屈曲临界应力 σ_{cr} 。

解:首先计算 $\theta=45^\circ$ 的槽钢轴压柱,将截面相关几何尺寸代入式(7)~式(9),可得:

$$u_o = -0.1961, u_f = 1, u_s = -3.635$$

$$\text{由式(6)、式(10)得: } w_{fs} = -0.4459$$

由式(6)、式(2)、式(13)~式(15)得:

$$I_{\delta} = 114.935, J_{\delta} = 4.2917 \times 10^{-3},$$

$$B = 2.0049 \times 10^{-7}, K_g = 13.9048$$

$$\text{代入式(1)得: } \sigma_{cr} = 171.4\text{MPa}$$

$\theta=90^\circ$ 对应直角卷边,既可参照上述斜卷边计算步骤,也可直接由式(1)~式(9)得:

$$\sigma_{cr} = 249\text{MPa}$$

将有关计算参数代入文献[5]的畸变屈曲半波长计算式得:

$$L_{cr,45^\circ} = \pi \sqrt{I_{\delta} (1 - \nu^2) / B} = 474.8\text{mm}$$

$$L_{cr,90^\circ} = \pi \sqrt{I_{\delta} (1 - \nu^2) / B} = 574.6\text{mm}$$

本文方法与文献[10]的近似模型算法对比见表 1。

表 1 畸变屈曲应力和半波长
Table 1 Distortional buckling stresses and critical half wavelengths

数据来源	σ_{cr}/MPa		L_{cr}/mm	
	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=90^\circ$
本文	171.4	249.0	474.8	574.6
文献[10]	170.4	245.5	474.0	569.3
相对偏差(%)	0.57	1.43	0.17	0.93

表 1 中,本文方法的 σ_{cr} 和 L_{cr} 计算结果与文献[10]吻合很好,相对偏差在 1.5% 以内。

6 结论

本文在文献[5]的研究基础上,推导出斜卷边槽钢较支轴压柱弹性畸变屈曲的具体计算式。由于本文提出了翘曲位移的显式表达式,计算过程较文献[5]更简便。本文计算方法与有限条法、近似模型

算法进行了对比分析, 结果表明本文计算公式具有较高工程精度。

本文方法有以下特点: 计算公式均为显式表达式, 不需迭代计算, 所有中间计算变量均为无量纲量。计算过程简单, 便于手算或编程, 可供工程设计人员参考。

参考文献:

- [1] AISI S100-2007, North American specification for the design of cold-formed steel members [S]. American Iron and Steel Institute, 2007.
- [2] AS/NZS 4600: 2005, Australian/New Zealand Standard: Cold-Formed Steel Structures [S]. Jointly published by Standards Australia and Standards New Zealand, 30 December, 2005.
- [3] Lau Sammy C W, Hancock Gregory J. Distortional buckling formulas for channel columns [J]. Journal of Structural Engineering, 1987, 113(5): 1063—1078.
- [4] Goncalves R, Dinis P B, Camotim D. GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections [J]. Thin-Walled Structures, 2009, 47(5): 583—600.
- [5] Silvestre N, Camotim D. On the mechanics of distortion in thin-walled open sections [J]. Thin-Walled Structures, 2010, 48(7): 469—481.
- [6] Silvestre N, Camotim D. Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members: Part I—derivation [J]. Thin-Walled Structures, 2004, 42(11): 1567—1597.
- [7] Silvestre N, Camotim D. First-order generalized beam theory for arbitrary orthotropic materials [J]. Thin-Walled Structures, 2002, 40(9): 755—789.
- [8] Young Ben, ASCE M, Hancock Gregory J. Compression tests of channels with inclined simple edge stiffeners [J]. Journal of Structural Engineering, 2003, 129(10): 1403—1411.
- [9] Papangelis J P, Hancock G J. Computer analysis of thin-walled structural members [J]. Computers & Structures, 1995, 56(1): 157—176.
- [10] 陈骥. 冷弯薄壁槽钢斜卷边对截面畸变屈曲的影响和构件的稳定承载力[C]. 中国钢协结构稳定与疲劳分会 2004 年学术交流会议论文集. 钢结构(增刊), 2004: 76—87.
- Chen Ji. Effect of sloping lip on section distortional buckling and stability capacity of cold-formed channel member [C]. Proceeding of 2004 Colloquium Institute of Structural Stability and Fatigue China Steel Construction Society. Steel Construction (Suppl), 2004: 76—87. (in Chinese)

(上接第 71 页)

- [8] Zhang W, Jiang Y, Ye Z. Two better loosely coupled solution algorithms of CFD based aeroelastic simulation [J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2007, 1(4): 253—262.
- [9] Borland C J, Rizzetta D P. Nonlinear transonic flutter analysis [J]. AIAA Journal, 1982, 20(11): 1606—1614.
- [10] Robinson B A, Batina J T, Yang H. Aeroelastic analysis of wings using the Euler equations with a deforming mesh [R]. NASA: NASA TM-102733, 1990.
- [11] 蒋跃文, 张伟伟, 叶正寅. 基于 CFD 技术的流场/结构时域耦合求解方法研究[J]. 振动工程学报, 2007, 20(4): 396—400.
- Jiang Yuewen, Zhang Weiwei, Ye Zhengyin. The study of time-marching method for fluid/structure coupling solution based on CFD technique. Journal of Vibration Engineering, 2007, 20(4): 396—400. (in Chinese)
- [12] 蒋跃文. 柔性结构/流场耦合的高效高精度求解方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2009.
- Jiang Yuewen. High efficient and accurate solution of flexible structure and fluid interactions [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnic University, 2009. (in Chinese)