文章编号: 1000-5641(2010)01-0006-04

双圈图的 Laplace spread

李 平, 施劲松, 李瑞林

(华东理工大学 数学系, 上海 200237)

摘要: 图的 Laplace spread 定义为图的最大 Laplace 特征值与次小 Laplace 特征值之差. 利用多项式函数的性质, 得到了具有最大 Laplace spread 的双圈图.

关键词: Laplace 特征值; 双圈图; Laplace spread

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

Laplacian spread of bicyclic graphs

LI Ping, SHI Jin-song, LI Rui-lin

(*Department of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai* 200237, *China*)

Abstract: The Laplacian spread of a graph is defined to be the difference between the largest and the second-smallest Laplacian eigenvalues of the graph. Using properties of polynomial, we characterized the graphs with the maximal Laplacian spread among all bicyclic graphs.

Key words: Laplacian eigenvalue; bicyclic graph; Laplacian spread

0 引 言

$G=(V,E)$ 是 n 个结点的简单无向图, 结点集合为 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(G)$ 是图 G 的邻接矩阵, 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以它的特征值一般可记作 $\lambda_1(G)\geqslant\lambda_2(G)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(G)$. 记 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}(d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n))$（其度序列是递减的）是图 G 的度对角矩阵, 则称 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 为图 G 的 Laplace 矩阵, 其特征多项式记为 $\Phi(\boldsymbol{L}(G))$. 由于 Laplace 矩阵 $\boldsymbol{L}$ 是对称的半正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{L}$ 的特征值非负, 不妨记作 $\mu_1(G)\geqslant\mu_2(G)\geqslant\ldots\geqslant\mu_n(G)=0$. 特别地, $\mu_{n-1}(G)>0$ 当且仅当图 G 是连通图. 图 G 的 spread 被定义为 $S_L(G)=\lambda_1(G)-\lambda_n(G)$, 而图的 Laplace spread 被定义为 $\varphi_L(G)=\mu_1(G)-\mu_{n-1}(G)$. 1983 年, Petrovic[1] 第一次提出 spread 的概念, 并研究了所有 spread 不超过 4 的极小图的特征；2001 年, Gregory, Hershkowitz 和 Kirkland[2] 研究了图的 spread 的上下界, 并证明了路是

收稿日期: 2009-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(10771069)

第一作者: 李平, 女, 硕士, 研究方向为图论.

通讯作者: 施劲松, 男, 副教授, 研究方向为图论、运筹学. E-mail: jsshi@ecust.edu.cn.

具有最小 spread 的给定结点的图；2008 年, Fan 等人[3] 证明了星是具有最大 spread 的给定结点的图；2009 年, Bao 等人[4] 证明了 $G(3,0,n)$ 是具有最大 Laplace spread 的单圈图. 本文通过对多项式性质的研究, 给出了具有最大 Laplace spread 的双圈图. 双圈图是指边数等于点数加 1 的连通图, 记 $B(n)$ 为 n 阶双圈图的集合.

1　基本引理

从双圈图的定义容易看出, 双圈图可以看成是由树增加两条新边得到的.

引理 1.1[5]　G 是至少包含一条边的连通图, $\Delta(G)$ 是图 G 的最大度, 则有 $\mu_1(G) \geqslant \Delta(G)+1$, 等号成立当且仅当 $\Delta(G)=n-1$.

引理 1.2[6]　对于阶数 $n \geqslant 2$ 的连通图 G, 有 $\mu_1(G) \leqslant n$, 等号成立当且仅当 G 的补图不连通.

引理 1.3[7]　G 是 n 阶且含有一个割点 v 的连通图, 则 $\mu_{n-1}(G) \leqslant 1$, 等号成立当且仅当 v 与 G 的其余所有点都邻接.

引理 1.4[8]　对于 $B(n)\backslash\{G_1, G_1', G_2, G_3, G_4, G_4'\}$ 中任意一双圈图 G, 有 $\mu_1(G) \leqslant n-1$.

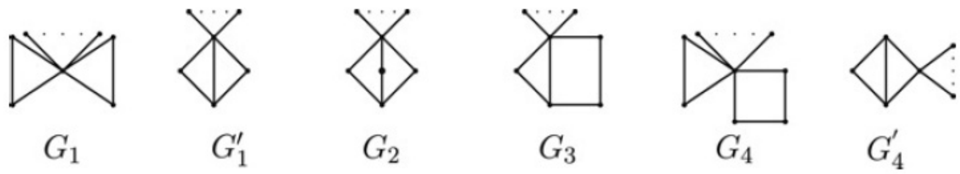

图 1　双圈图 G_1 到 G_4, G_1' 和 G_4'

Fig.1　Bicyclic graphs G_1 to G_4, G_1' and G_4'.

结合引理 1.3 和 1.4, 可以得到:

注 1.5　对于 $B(n)\backslash\{G_1, G_1', G_2, G_3, G_4, G_4'\}$ 中的任意一个双圈图 G, 都有 $\varphi_L(G) < n-1$, 所以双圈图的最大 Laplace spread 必定在图 1 中取到.

由引理 1.1 或引理 1.2 知, $\mu_1(G_1)=\mu_1(G_1')=n$; 由引理 1.3 知, $\mu_{n-1}(G_1)=\mu_{n-1}(G_1')=1$; 所以 $\varphi_L(G_1)=\varphi_L(G_1')=n-1$.

2　主要定理

定理 2.1　对任意阶数 $n \geqslant 7$ 的双圈图 G, 有 $\varphi_L(G) < \varphi_L(G_1)=\varphi_L(G_1')$.

我们将定理分解为以下几个引理来证明.

引理 2.2　当 $n \geqslant 7$ 时, 有 $\varphi_L(G_2) < \varphi_L(G_1)=\varphi_L(G_1')$.

证　明　将 $\mu_1(G_2)$, $\mu_{n-1}(G_2)$ 分别简记为 μ_1, μ_{n-1}, $\boldsymbol{L}(G_2)$ 的特征多项式为

$$\Phi(\boldsymbol{L}(G_2)) = x(x-1)^{n-6}(x-2)^2\left[x^3-(n+4)x^2+(5n-2)x-3n\right].$$

令 $f_1(x)=x^3-(n+4)x^2+(5n-2)x-3n$, 由引理 1.1 与 1.2 知, $n-1<\mu_1 \leqslant n$, 由引理 1.3 知 $0<\mu_{n-1}<1$, 所以 μ_1, μ_{n-1} 都是 $f_1(x)=0$ 的根. 因为

$$f_1(n-\tfrac{2}{3}) = (n-\tfrac{2}{3})^3-(n+4)(n-\frac{2}{3})^2+(5n-2)(n-\tfrac{2}{3})-3n=\tfrac{9n^2-57n-20}{27}>0,$$

$$f_1(5)=-5-3n<0,\quad f_1(1)=n-5>0,\quad f_1(\tfrac{1}{3})=-\frac{13n+10}{9}+\frac{1}{27}<0.$$

所以 $f_1(x)=0$ 的三个根分别在区间 $(\frac{1}{3},1)$, $(1,5)$, $(5,n-\frac{2}{3})$ 内, 且 $\mu_1(G_2)\in(5,n-\frac{2}{3})$, $\mu_{n-1}(G_2)\in(\frac{1}{3},1)$, 因此有 $\varphi_L(G_2)=\mu_1-\mu_{n-1}<n-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=n-1$. 所以, 引理得证.

引理 2.3 $n\geqslant 7$ 时, 有 $\varphi_L(G_3)<\varphi_L(G_1)=\varphi_L(G_1')$.

证 明 同样将 $\mu_1(G_3)$, $\mu_{n-1}(G_3)$ 分别记为 μ_1, μ_{n-1}, $\boldsymbol{L}(G_3)$ 的特征多项式为

$$\Phi(\boldsymbol{L}(G_3))=x(x-1)^{n-6}\left[x^5-(n+8)x^4+(9n+18)x^3-(6+27n)x^2+(31n-10)x-11n\right].$$

令 $f_2(x)=x^5-(n+8)x^4+(9n+18)x^3-(6+27n)x^2+(31n-10)x-11n$, 由引理 1.1 与 1.2 知, $n-1<\mu_1\leqslant n$, 由引理 1.3 知, $0<\mu_{n-1}<1$, 所以 μ_1, μ_{n-1} 都是 $f_2(x)=0$ 的根. 又

$$f_2{}'(x)=5x^4-4(n+8)x^3+3(9n+18)x^2-2(6+27n)x+31n-10.$$

经计算可知, $f_2{}'(x)$ 在 $(n-1,n)$ 上单调递增. 而$\varphi_L(G_1)-\varphi_L(G_3)=(n-1)-(\mu_1-\mu_{n-1})=(n-\mu_1)-(1-\mu_{n-1})$, 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(\mu_1,n)$ 使得

$$\begin{aligned} n-\mu_1 &= \frac{f_2(n)-f_2(\mu_1)}{f_2'(\xi)}=\frac{n^4-9n^3+25n^2-21n}{f_2'(\xi)}>\frac{n^4-9n^3+25n^2-21n}{n^4-5n^3+19n-10}\\ &= 1-\frac{4n^3-25n^2+40n-10}{n^4-5n^3+19n-10}>1-\frac{4n^2-25n+40}{n^3-5n^2}. \end{aligned}$$

记 $g(x)=\dfrac{4x^2-25x+40}{x^3-5x^2}$, 则容易算出 $g(x)$在 $[7,+\infty)$ 上单调递减, 所以

$$(n-\mu_1)-(1-\mu_{n-1})>\mu_{n-1}-\frac{4n^2-25n+40}{n^3-5n^2}>\mu_{n-1}-\frac{61}{98}.$$

经过计算, $f_2(x)$在区间$(0,1)$内单调递增, 且有 $f_2(\frac{61}{98})<0$, 所以 $\mu_{n-1}>\frac{61}{98}$. 因此有 $(n-\mu_1)-(1-\mu_{n-1})>0$.

于是, 引理得证.

引理 2.4 $n\geqslant 7$ 时, 有 $\varphi_L(G_4)=\varphi_L(G_4')<\varphi_L(G_1)=\varphi_L(G_1')$.

证 明 同样, 将 $\mu_1(G_4)$, $\mu_1(G_4')$, $\mu_{n-1}(G_4)$, $\mu_{n-1}(G_4')$ 分别记为 μ_1, μ_1', μ_{n-1}, μ_{n-1}'; $\boldsymbol{L}(G_4)$, $\boldsymbol{L}(G_4')$ 的特征多项式分别为

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{L}(G_4)) &= x(x-1)^{n-6}(x-2)(x-3)\left[x^3-(n+3)x^2+(4n-2)x-2n\right],\\ \Phi(\boldsymbol{L}(G_4')) &= x(x-1)^{n-5}(x-4)\left[x^3-(n+3)x^2+(4n-2)x-2n\right]. \end{aligned}$$

令 $f_3(x)=x^3-(n+3)x^2+(4n-2)x-2n$, 由引理 1.1 与 1.2 知, $n-1<\mu_1\leqslant n$, $n-1<\mu_1'\leqslant n$, 由引理 1.3 知 $0<\mu_{n-1}<1$, $0<\mu_{n-1}'<1$, 所以 $\mu_1(\mu_1')$, $\mu_{n-1}(\mu_{n-1}')$ 分别是 $f_3(x)=0$ 的最大根与最小根. 因此有, $\varphi_L(G_4)=\mu_1-\mu_{n-1}=\mu_1'-\mu_{n-1}'=\varphi_L(G_4')$. 因为

$$f_3(n-\frac{2}{3})=\frac{9n^2-48n-8}{27}>0,\quad f_3(4)=-2n+8<0,$$

$$f_3(1)=n-4>0,\quad f_3(\frac{1}{3})=-\frac{7n}{9}-\frac{26}{27}<0.$$

所以 $f_3(x)=0$ 的三个根分别在区间 $(\frac{1}{3},1)$, $(1,4)$, $(4,n-\frac{2}{3})$ 内, 且有 $\mu_1\in(4,n-\frac{2}{3})$, $\mu_{n-1}\in(\frac{1}{3},1)$. 因此,

$$\varphi_L(G_4)=\mu_1-\mu_{n-1}<n-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=n-1.$$

进而有 $\varphi_L(G_4)=\varphi_L(G_4')<\varphi_L(G_1)$. 引理得证.

综合引理 2.2, 引理 2.3, 引理 2.4以及注 1.5, 知定理 2.1 得证.

当 $n=6$ 时, 我们也计算出结果, 见表 1.

表 1　$n=6$ 时的 Laplace spread

Tab. 1　Laplacian spread with $n=6$

	G_1	G_1'	G_2	G_3	G_4	G_4'
μ_1	6	6	5.514 1	5.268 8	5.236 1	5.236 1
μ_{n-1}	1	1	0.913 9	0.881 7	0.763 9	0.763 9
$\varphi_L(G)=\mu_1(G)-\mu_{n-1}(G)$	5	5	4.600 2	4.387 1	4.472 2	4.472 2

即对于 $n=6$ 时, 仍有 $\varphi_L(G)<\varphi_L(G_1)=\varphi_L(G_1')$.

所以定理 2.1 对于阶数 $n=6$ 时也成立.

[参　考　文　献]

[1] PETROVIC M. On graph whose spectral spread does not exceed 4 [J]. Publ Inst Math, 1983, 34(48): 169-174.

[2] GREGORY D, HERSHKOWITZ D, KIRKLAND S. The spread of the spectrum of a graph [J]. Linear Algebra Appl, 2001, 332-334: 23-35.

[3] FAN Y Z, XU J, WANG Y, et al. The Laplacian spread of a tree [J]. Discrete Math Theory Comput Sci, 2008, 10(1): 79-86.

[4] BAO Y H, TAN Y Y, FAN Y Z. The Laplacian spread of unicyclic graphs [J]. Applied Mathematic Letter, 2009, 22: 1011-1015.

[5] GRONE R, MERRIS R. The Laplacian spectrum of a graph [J]. SIAM J Discrete Math, 1994(7): 221-229..

[6] ANDERSON W N, MORELY T D. Eigenvalues of the Laplacian of a graph [J]. Linear Multilinear Algebra, 1985, 18: 141-145.

[7] KIRKLAND S. A bound on the algebraic connectivity of a graph in the terms of the number of cutpoints[J]. Linear Multilinear Algebra, 2000, 47: 193-103.

[8] HE C X, SHAO J Y, HE J L. On the Laplacian spectral radii of bicyclic graphs [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308: 5981-5995.