

文章编号: 1000-4750(2012)11-0295-07

轮轨摩擦接触下钢轨多裂纹相互作用研究

李 伟, 温泽峰, 金学松, 吴 磊

(西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 成都 610031)

摘 要: 利用热机耦合有限元法, 建立了轮轨摩擦接触时钢轨表面多裂纹的热弹性平面应变有限元模型。数值模型中, 考虑轮轨摩擦温升对轮轨材料参数的影响, 通过移动载荷和热源来模拟运动车轮对钢轨的作用。分析了轮轨滑动接触时多裂纹相互作用和表面裂纹数量对钢轨疲劳裂纹扩展特性的影响。计算结果表明: 与单个裂纹相比, 多裂纹有降低钢轨疲劳裂纹扩展的作用; 钢轨裂纹尖端应力强度因子 K_1 和应力强度因子范围 ΔK_2 均随裂纹数的增多而减小; 钢轨表面裂纹数为 5 条时可以反映更多裂纹时的裂纹扩展特性。

关键词: 轮轨摩擦接触; 表面多裂纹; 应力强度因子; 热机耦合; 有限元法

中图分类号: TH117 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.04.0237

A STUDY OF MULTIPLE CRACK INTERACTION IN RAIL UNDER WHEEL-RAIL FRICTION CONTACT

LI Wei, WEN Ze-feng, JIN Xue-song, WU Lei

(State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: A thermo-elastic plane strain finite element model incorporating multiple surface cracks in rail is established by using a thermo-mechanical coupling finite element method. In the numerical model, the temperature-dependent material properties are considered. The movement of wheel-rail contact forces and fictional heat resource is used to simulate the wheel sliding on the rail. The effect of multiple crack interaction and number of cracks on the crack growth behavior in rail is investigated during wheel-rail full slip contact. The results indicate that comparing to the single crack, the multiple crack interaction can reduce the possibility of crack growth. The stress intensity factor K_1 and stress intensity factor range ΔK_2 of cracks in rail decrease with increasing the number of cracks. Only five cracks in rail can reveal the interaction among many cracks.

Key words: wheel-rail friction contact; multiple surface cracks; stress intensity factor; thermo-mechanical coupling; finite element method

轮轨滚动接触疲劳裂纹和轮轨磨损是铁路轮轨伤损问题中的两个主要问题, 而目前对钢轨裂纹扩展特性的研究主要考虑的是单个裂纹情况^[1-5]。而事实上, 在钢轨接触表面的裂纹是成群出现且相互影响, 如图 1 所示。通常, 由于多裂纹(两条裂纹和两条以上的裂纹)出现时裂纹与裂纹之间有一定

的距离, 而这些裂纹间的相互作用会影响其裂纹附近的应力场分布, 从而会影响裂纹的扩展特性。一些学者对多裂纹或多裂纹之间的相互作用导致材料疲劳失效作了相关研究。

Lam 和 Phua^[6]通过刃型位错的分布来替代裂纹计算的一种数值方法, 计算分析了平面应变问题的

收稿日期: 2011-04-22; 修改日期: 2011-09-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(50821063); 国家重点基础研究发展计划项目(2007CB714702); 霍英东教育基金会青年教师基金项目(114028); 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-08-0824)

通讯作者: 金学松(1956—), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士, 博导, 从事轮轨关系研究(E-mail: xsjin@home.swjtu.edu.cn).

作者简介: 李 伟(1985—), 男, 湖北监利人, 博士生, 从事轮轨滚动接触疲劳研究(E-mail: 1022liwei@163.com);

温泽峰(1976—), 男(壮), 广西南宁人, 副研究员, 博士, 从事轮轨接触力学研究(E-mail: zfwen@home.swjtu.edu.cn);

吴 磊(1981—), 男, 贵州毕节人, 博士生, 主要从事轮轨热力耦合研究(E-mail: leiwulanxia@163.com).

多裂纹间相互作用对裂尖应力强度因子的影响。Wang 等^[7]调查了多个密集的小裂纹的结合和扩展情况,实验表明这些裂纹尖端的扩展方向随着裂纹间的距离变小而发生改变,并发展了一种模型可预测这些裂纹扩展方向的变化。Noda 等^[8]研究了二维表面多裂纹在拉伸载荷作用下的扩展特性,并计算分析了裂纹长度、裂纹间的距离和裂纹角度对裂尖应力强度因子的影响。Noda 等的研究工作比较适用于轮轨接触的裂纹扩展分析。Fletcher 等^[9]利用边界元方法,分析了轮轨接触时钢轨的多个长裂纹在弯曲应力作用下的扩展特性。其结果表明多个裂纹可以相互起到保护和降低扩展速率作用。Tillberg 等^[10]研究了轮轨滚动接触时钢轨表面的短裂纹群(head checks)的扩展特性,分析了在轮轨滚动接触时几何参数(包括裂纹角度、裂纹长度、裂纹间的距离和轮轨接触斑的长度)和材料参数(轮轨间摩擦系数)对多裂纹相互作用的影响。



图1 钢轨表面斜裂纹

Fig.1 Oblique cracks in rail

上述的研究工作忽略了列车制动或牵引时轮轨摩擦热的影响。本文考虑轮轨摩擦接触时摩擦热对裂纹的影响,基于热机耦合的方法,建立有限元模型,计算分析在机械载荷和热载荷共同作用下钢轨表面多条裂纹相互作用下的裂纹尖端应力强度因子的变化情况,分析钢轨表面裂纹数量和裂纹间相互作用对应力强度因子的影响。

1 数值计算模型

1.1 轮轨摩擦接触模型

轮轨经一段时间磨损和变形后,轮轨接触斑变得细长,可将轮轨接触视为二维问题^[11]。轮轨接触斑上的法向压力分布由 Hertz 接触理论给出^[12]:

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (1)$$

式中: $p_0 (=2P/\pi ab^*)$ 为接触斑上的最大接触压力; $b^* (=4b/3)$ 为接触斑横向等效长度,如图 2 所示; a 和 b 分别表示椭圆接触斑沿 x 方向、 z 方向的宽度

之半,即长半轴和短半轴; x 和 z 分别表示局部纵向和横向坐标; P 表示轮重。

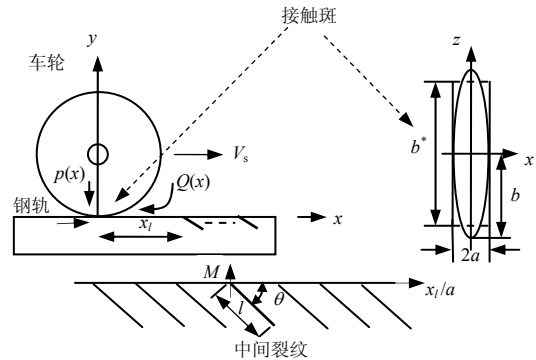


图2 带有多条斜裂纹的轮轨滑动接触和接触斑

Fig.2 Wheel-rail in sliding contact with multiple cracks and slim contact area

本文假设轮轨制动时列车车轮以常速 V_s 在钢轨上滑动,则在轮轨接触斑上的切向力为 $q(x) = \mu p(x)$,故在轮轨接触区内任意一点的单位时间单位面积的热通量为^[13]:

$$Q(x) = \mu V_s p(x) \quad (2)$$

式中, μ 表示轮轨间的摩擦系数。假设轮轨摩擦过程中摩擦损失的机械能全部转换为了热能,且转换过程没有能量损失,且假设热流分配系数为 0.5,即轮轨摩擦产生的热流平均分配给钢轨和车轮,则轮轨摩擦热传给钢轨的热通量为 $Q(x)/2$ 。

1.2 有限元模型

为了考虑轮轨摩擦接触产生的温度场和应力场的相互影响,本文采用一种热机完全耦合的求解方法。这样机械载荷和热载荷产生的效应可以同时求解,达到温度场和应力场的耦合,其中,温度通过向后差分方法求得,且此非线性的耦合系统通过牛顿法求得^[14]。

牛顿法的求解涉及到一个非对称雅克比矩阵,其表示的热机耦合的求解矩阵表达式如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uT} \\ \mathbf{K}_{Tu} & \mathbf{K}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \mathbf{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_T \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式中: $\Delta \mathbf{U}$ 和 $\Delta \mathbf{T}$ 分别表示位移和温度的修正后的增量; \mathbf{K}_{ij} 表示完全耦合雅克比矩阵的子矩阵; \mathbf{R}_u 和 \mathbf{R}_T 分别表示与机械载荷和热载荷相关残差向量。

为了研究轮轨滑动接触(图 2 为二维轮轨接触的示意图)时钢轨多裂纹相互作用的影响,利用有限元软件 ABAQUS 建立了带有多条表面斜裂纹钢轨的热机耦合线弹性有限元模型,如图 3 所示。由于考虑到热流密度与车轮滚动速度有关,因而在

ABAQUS 的分析步中选用热机完全耦合的瞬态分析方法, 采用的分析单元类型为平面应变热耦合单元 CPE8T, 从而来实现热机完全耦合分析。为了体现裂纹尖端附近应力场的 $1/\sqrt{r}$ 阶的奇异性, 裂尖附近单元采用了 1/4 节点法的奇异单元。为了简化问题的分析计算, 忽略边界条件对多裂纹尖端应力分布的影响, 模型中钢轨用高 50mm, 宽 190mm 的矩形来模拟, 钢轨工作顶面所有斜裂纹长度 $l=0.2a$, 角度 $\theta=45^\circ$, 裂纹间的距离 $d=2.8\text{mm}$, 令接

触斑中心到裂纹嘴 M 的距离为 x_l (如图 2 所示)。考虑裂纹表面间的接触, 接触算法采用拉格郎日乘子法。为了计算轮轨摩擦热影响和在钢轨表面裂纹尖端的特性, 在钢轨表层和裂纹尖端附近采用较细的网格单元(见图 3), 且通过计算裂纹尖端应力强度因子来计算钢轨表面裂纹的扩展特性并分析裂纹间相互作用的影响。模型中考虑轮轨自由表面(轨面非接触区)与环境热对流的影响, 也考虑温度对材料参数的影响。

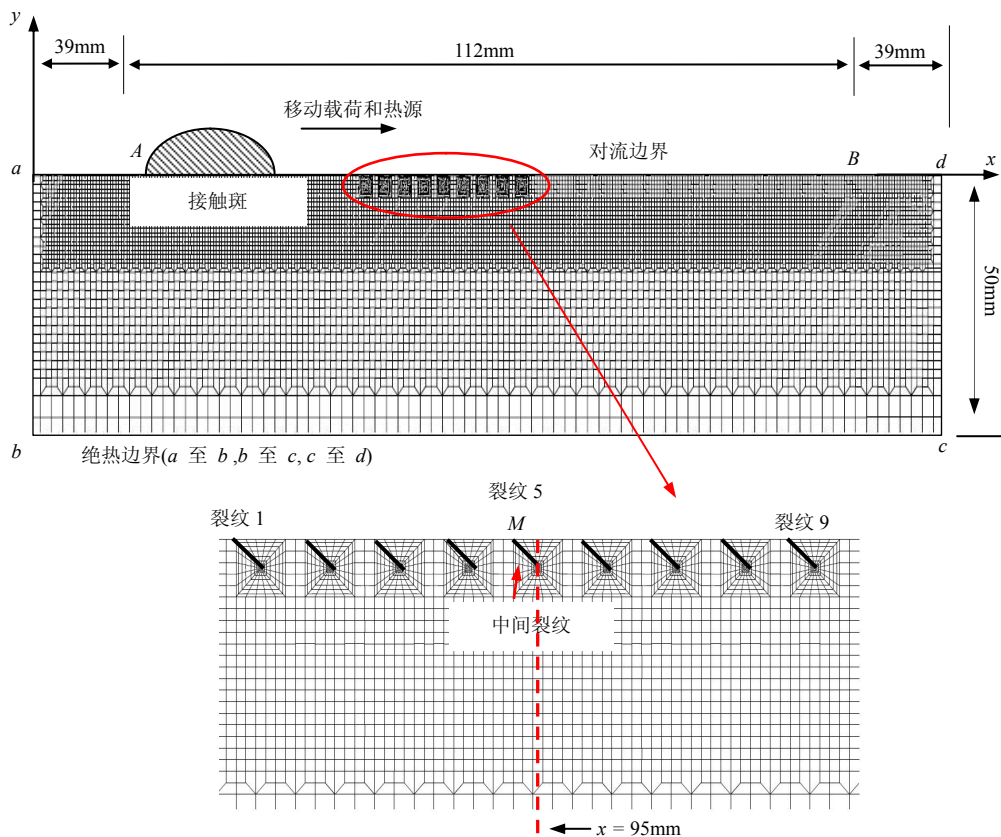


图 3 含多裂纹的钢轨有限元模型

Fig.3 Finite element model of rail with multiple cracks under wheel-rail contact

假设钢轨的两端和底部为绝热边界和零位移边界, 列车车轮在钢轨上滑动时摩擦热源、接触力的加载和接触区的移动从 A 到 B , 见文[15]。

图 3 为轮轨接触时含多裂纹(9 条裂纹)的钢轨有限元模型。 x_l/a 表示用无量纲表示的轮轨接触斑中心与裂纹族中间裂纹嘴 M 间的距离, 如图 3 所示。

2 计算结果与分析

本文计算对象选取机车轮对轴重为 23t, 轮径为 1.05m, 踏面为 JM1 磨耗型; 钢轨为 60kg/m。其对应的接触斑沿钢轨纵向的斑长 $2a=14\text{mm}$, 最大接触压力为 $P_0=878\text{MPa}$ [16]。车轮为完全滑动且滑动

速度为 $V_s=1\text{m/s}$; 材料密度 $\rho=7790\text{kg/m}^3$; 环境温度 $T_0=20^\circ\text{C}$; 换热系数 $h=20\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。轮轨间摩擦系数和裂纹面间的摩擦系数 $\mu=f=0.3$ 。其他与温度相关材料参数见表 1 和表 2。

表 1 随温度变化的材料参数[17]

Table 1 Temperature-dependent material properties

温度/ $^\circ\text{C}$	弹性模量/GPa	泊松比	热膨胀系数/ $(\times 10^{-6}\text{K}^{-1})$
24	213	0.295	9.97
230	201	0.307	10.82
358	193	0.314	11.15
452	172	0.32	11.27
567	102	0.326	11.31
900	43	0.345	11.25

表 2 随温度变化的比热和热导率^[17]

Table 2 Temperature-dependent specific heat and thermal conductivity

温度/(°C)	比热/(J/(kg·K))	热导率/(W/(m·K))
0	419.5	59.71
350	629.5	40.88
703	744.5	30.21
710	652.9	30.00
800	657.7	25.00
950	665.2	27.05
1200	677.3	30.46

文[18-19]利用有限元法计算分析了轮轨摩擦接触时热耦合作用下单个裂纹的钢轨表面斜裂纹的扩展特性,研究了考虑热载荷影响时轮轨接触面的摩擦系数、裂纹面间的摩擦系数和裂纹角度对单个钢轨疲劳裂纹的影响情况,对比分析考虑摩擦热影响和没有考虑摩擦热影响时钢轨表面斜裂纹的扩展特性;也计算研究了钢轨两个裂纹间相互作用时裂纹间距离对裂纹扩展特性的影响。为了模拟与实际更相近的裂纹族情况,本文基于文[18-19],计算分析了轮轨滑动接触时钢轨表面多裂纹相互作用对裂纹扩展特性的影响,计算分析了钢轨表面含 3 条、5 条、7 条和 9 条裂纹时的裂尖应力强度因子 K_1 和 K_2 的情况。

2.1 钢轨表面裂纹数量对裂纹扩展特性的影响

为得到更多真实裂纹的扩展情况,计算分析了不同数量裂纹相互作用时的裂纹扩展特性。为了消除边界条件的影响,并真实反映裂纹间的相互影响,结果给出了中间裂纹的计算结果。图 4(a)和图 4(b)分别给出了只有机械载荷作用和热耦合作用时的裂纹族(多条裂纹)中间裂纹的裂尖应力强度因子 K_1 随车轮位置的变化情况。从图 4 可知,随着裂纹数的增大,两种工况下的应力强度因子 K_1 的最大值均减小,且热耦合作用下 3 条、5 条、7 条和 9 条裂纹的 K_1 的最大值的减小率分别为 22.7%、4.79%、2.29%和 1.77%,因而可以看出 K_1 的减小率随着裂纹数的增大而减小,而当裂纹条数为 7 条或 9 条或更多时, K_1 的值基本稳定。这是由于随着裂纹数的增多,裂纹间的屏蔽效应增强,导致裂纹尖端材料的应力得到释放,裂尖附近的相对位移减小。对比图 4(a)和图 4(b)可知,只有机械载荷作用时的 K_1 值与热耦合作用时有着相同的变化趋势,且在考虑热影响(热耦合作用)时的应力强度因子 K_1 值比只有机械载荷作用时的小。

图 5(a)和图 5(b)分别给出了只有机械载荷作用和热耦合作用时的裂纹族中间裂纹的裂尖应力

强度因子 K_2 随车轮位置的变化情况。从图 5 可以看出,裂尖应力强度因子范围 ΔK_2 随着裂纹数的增加而减小,而当裂纹数大于或等于 5 条时, ΔK_2 的值变化很微小。而裂纹数对只有机械载荷作用时的 K_2 值影响比热耦合作用时的明显,这是因为考虑热

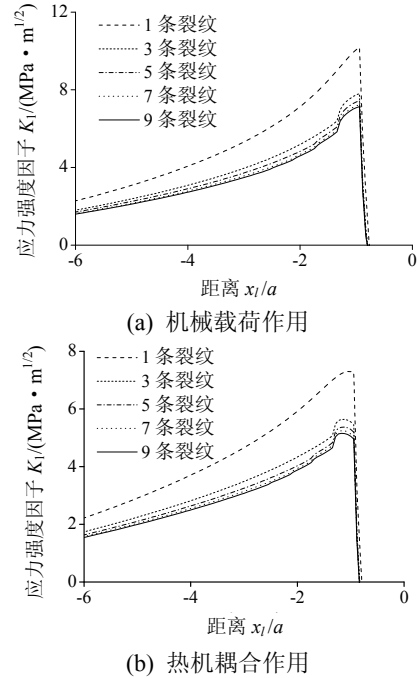


图 4 裂纹数对裂尖应力强度因子 K_1 的影响 (裂纹族中的中间裂纹)

Fig.4 Influence of the number of cracks on stress intensity factor K_1

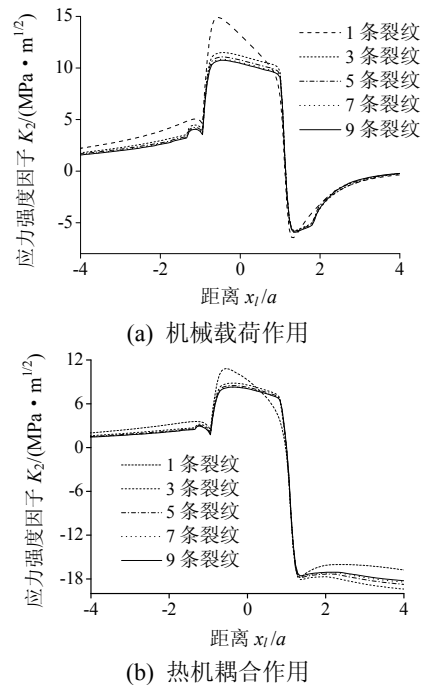


图 5 裂纹数对裂尖应力强度因子 K_2 的影响 (裂纹族中的中间裂纹)

Fig.5 Influence of the number of cracks on stress intensity factor K_2

机耦合作用时,相对于纯机械载荷作用,裂尖附近温升产生的应力对裂纹扩展占主导,而裂纹数的增加对中间裂纹的裂尖温度的分布基本没有影响。因而,相对于单个裂纹,热机耦合作用和只有机械载荷作用的多裂纹有降低裂纹扩展的作用;而当热机耦合作用和只有机械载荷作用的裂纹数增加到5条以上时可以基本反映更多裂纹时的裂尖扩展特性情况,在裂纹角度和裂纹间距离对裂纹扩展影响明显的范围内,本文与文[9-10]研究多裂纹时的结论相似。关于不同裂纹长度、裂纹角度和裂纹间的距离交互作用下的多裂纹扩展特性在下一步的研究中进行分析。而关于钢轨弯曲应力、列车速度和轴重等因素对多裂纹扩展特性的影响也将在下步的研究中得到考虑。

2.2 多条钢轨表面裂纹相互作用的影响

图6和图7中分别给出了轮轨滑动接触过程中钢轨含3条表面裂纹的裂尖应力强度因子 K_1 和 K_2 的变化情况,图6和图7中裂纹1、裂纹2和裂纹3分别表示车轮在钢轨上先后滚过的第1条、第2条和第3条裂纹时 K_1 和 K_2 变化过程。从图6(a)和图6(b)可以看出,考虑热机耦合作用和只有机械载荷作用时,由于中间裂纹(裂纹2)受到前裂纹(裂纹1)和后裂纹(裂纹3)的影响,其裂尖应力强度因子 K_1 值比其前裂纹(裂纹1)和其后裂纹(裂纹3)的 K_1 值小;裂纹3的 K_1 值比裂纹1和裂纹2大的多,而相对于单个裂纹,其值在只有机械载荷作用和热机耦合作用时分别小3.06%和0.52%。对比裂纹1和裂纹3的应力强度因子的值可知:多裂纹间相互作用对最后裂纹扩展特性的影响比最前面裂纹小。从图7(a)和图7(b)可以看出,热机耦合作用和只有机械载荷作用时,由于中间裂纹(裂纹2)受到前后裂纹的影响,其应力强度因子范围 ΔK_2 的值比其前裂纹(裂纹1)和其后裂纹(裂纹3)的 ΔK_2 值小。因而,多裂纹间的相互作用对中间裂纹(裂纹2)的影响比最前面裂纹(裂纹1)和最后面裂纹(裂纹3)的影响大。比较热机耦合作用和只有机械载荷作用的结果可知:多裂纹间的相互作用的影响有相似的结论。

图8和图9分别给出了车轮滚过的第1条裂纹(裂纹1)的应力强度因子 K_1 和 K_2 随裂纹数变化的情况。从图8和图9可以看出,只有机械载荷作用和考虑热机耦合作用时,多裂纹(≥ 3 条)间的相互作用对应力强度因子范围 ΔK_1 和 ΔK_2 的值有减小的作用。从图8和图9可知,当裂纹数大于3时,裂纹数对

第1条裂纹(裂纹1)的应力强度因子 K_1 和 K_2 影响很小,可以忽略。由于裂纹相互作用对最后1条裂纹的影响微小,这里没有给出结果图。

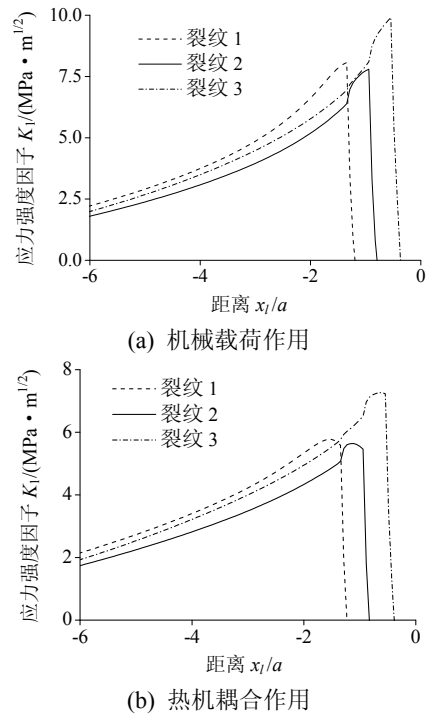


图6 裂纹间相互作用对应力强度因子 K_1 的影响(3条裂纹的情况)

Fig.6 Interference effects on the variation of K_1 with wheel position (the model of three cracks)

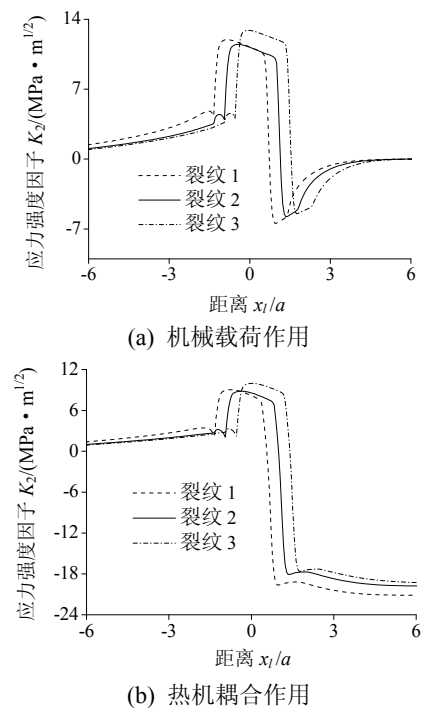


图7 裂纹间相互作用对应力强度因子 K_2 的影响(3条裂纹的情况)

Fig.7 The effect of cracks interaction on stress intensity factors K_2 (the model of three cracks)

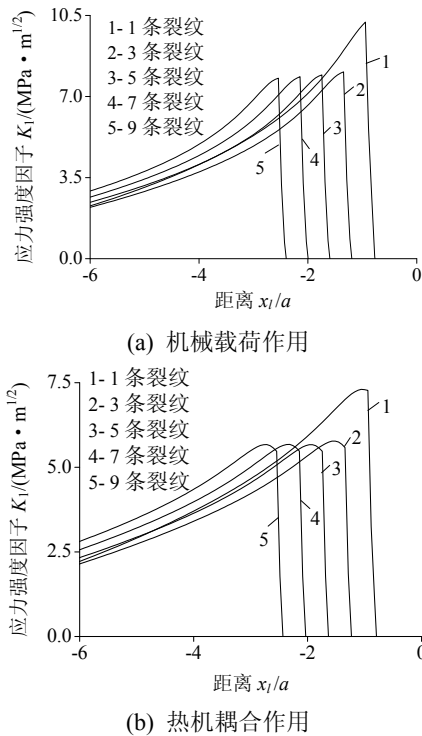


图 8 裂纹间相互作用对最前面裂纹(裂纹 1)的应力强度因子 K_1 的影响

Fig. 8 Effect of crack interaction on stress intensity factor K_1 of the first crack

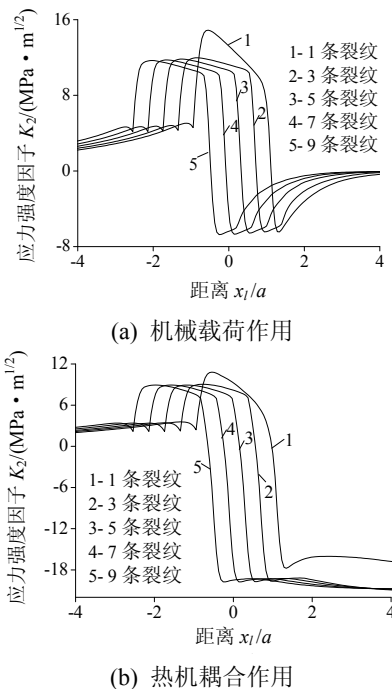


图 9 裂纹间相互作用对最前面裂纹(裂纹 1)的应力强度因子 K_2 的影响

Fig.9 Effect of crack interaction on stress intensity factor K_2 of the first crack

3 结论

(1) 热机耦合作用和只有机械载荷作用两种工况下的钢轨表面裂纹应力强度因子 K_1 的最大值和

裂尖应力强度因子范围 ΔK_2 均随着裂纹数的增大而减小。

(2) 相对单个裂纹, 两种工况下的多裂纹有降低裂纹扩展的作用; 在裂纹角度和裂纹间距离对其裂纹扩展影响明显的范围(这里取 $\theta=45^\circ$ 和 $d=2.8\text{mm}$), 两种工况下的裂纹数增加到 5 条时可以基本反映更多裂纹时的裂尖扩展特性情况。

(3) 多裂纹间的相互作用对中间裂纹的影响比车轮通过的最前面裂纹和车轮通过的最后面裂纹影响的大。而多裂纹(≥ 3 条)间的相互作用对应力强度因子范围 ΔK_1 和 ΔK_2 的值有减小的作用; 而裂纹数大于 3 条时, 裂纹数对车轮通过的第 1 条裂纹的应力强度因子 K_1 和 K_2 影响很小。

参考文献:

- [1] Olzak M, Stupnicki J, Wjick R. Investigation of crack propagation during contact by a finite element method [J]. Wear, 1991, 146: 229—240.
- [2] Olzak M, Stupnicki J, Wjick R. Numerical analysis of 3D cracks propagating in rail-wheel contact zone [C]. Proceeding of the International Conference on Rail Quality and Maintenance for Modern Railway Operation, The Netherlands, June, 1992: 385—393.
- [3] Bogdanski S, Olzak M, Stupnicki J. Numerical stress analysis of rail rolling contact fatigue cracks [J]. Wear, 1996, 191: 14—24.
- [4] Bogdanski S, Brown M W. Modelling the three dimensional behavior of shallow rolling contact fatigue cracks in rails [J]. Wear, 2002, 253(1/2): 17—25.
- [5] Akama M, Mori T. Boundary element analysis of surface initiated rolling contact fatigue cracks in wheel/rail contact system [J]. Wear, 2002, 253: 35—41.
- [6] Lam K Y, Phua S P. Multiple crack interaction and its effect on stress intensity factor [J]. Engng Fracture Mechanics, 1991, 40(3): 585—592.
- [7] Wang Y Z, Atkinson J D, Akid R, Parkins R N. Crack interaction, coalescence and mixed mode fracture mechanics [J]. Fatigue Fracture Engineering Materials and Structures, 1996, 19(4): 427—439.
- [8] Noda N A, Tsuru M, Oda K. Stress intensity factors of double and multiple edge cracks [J]. Japan Society of Mechanical Engineers International Journal A, 1997, 40(1): 1—7.
- [9] Fletcher D I, Hyde P, Kapoor A. Growth of multiple rolling contact fatigue cracks driven by rail bending modeled using a boundary element technique [J]. Proceedings of IMechE Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2004, 218(F3): 243—253.
- [10] Tillberg J, Larsson F, Runesson K. A study of multiple crack interaction at rolling contact fatigue loading of rails [J]. Proceedings of IMechE Part F: Journal of Rail and

- Rapid Transit, 2009, 223: 319—330.
- [11] Carter F W. On the action of a locomotive driving wheel [J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1926, A112: 151—157.
- [12] Johnson K L. Contact mechanics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 90—104.
- [13] Tanvir M A. Temperature rise due to slip between wheel and rail — An analytical solution for Hertzian contact [J]. Wear, 1980, 61: 295—308.
- [14] Hibbitt D, Karlsson B, Sorensen P: ABAQUS/ Standard User's Manual, version 6.7 [M]. ABAQUS, Inc., Pawtucket, RI, 2007.
- [15] 李伟, 温泽峰, 吴磊, 金学松. 车轮滑动时钢轨热弹塑性有限元分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(10): 95—101.
Li Wei, Wen Zefeng, Wu Lei, Jin Xuesong. Thermo-Elasto-plastic Finite Element Analysis of Rail during Wheel Sliding [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(10): 95—101. (in Chinese)
- [16] 金学松, 刘启跃. 轮轨摩擦学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2004: 47—63.
Jin Xuesong, Liu Qiyue. Tribology between wheel and rail [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2004: 47—63. (in Chinese)
- [17] Brandon T, Jeff G, Perlman A B. Investigations of effects of sliding on wheel tread damage [C]. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 5-11, 2005, Orlando, Florida USA.
- [18] Li W, Wen Z F, Wu L, Du X, Jin X S. Finite element analysis of thermo-mechanical contact fatigue cracks in rail [C]. Proceedings of the 3rd ICMEM International Conference on Mechanical Engineering and Mechanics, October 21-23, 2009, Beijing, P. R. China, 1: 268—273.
- [19] Guo J, Li W, Wen Z F, Wu L, Jin X S. Mutual interaction of two rail surface cracks under thermo-mechanical contact loading [J]. Advanced Materials Research, 2010, 97/98/99/100/101: 543—546.

(上接第 276 页)

- [7] 易登军, 韩晓林. 损伤结构的实验曲率模态研究[J]. 振动、测试与诊断, 2004, 24(3): 234—237.
Yi Dengjun, Han Xiaolin. Experimental curvature modal analysis of damaged structures [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2004, 24(3): 234—237. (in Chinese)
- [8] 彭华, 游春华, 孟勇. 模态曲率差法对梁结构的损伤诊断[J]. 工程力学, 2006, 23(7): 49—53, 7.
Peng Hua, You Chunhua, Meng Yong. Damage diagnosis of beam structures by modal curvature difference method [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(7): 49—53, 7. (in Chinese)
- [9] Li Fanchun, Li Cheng, Zhang Aifeng. Curvature modal analysis and numerical simulation in diverse structural damage identification [J]. Journal of Ship Mechanics, 2006, 10(6): 115—121.
- [10] 胡业平, 张成海, 屠义强. 基于曲率模态的结构损伤定位[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2009, 10(增刊): 57—63.
Hu Yeping, Zhang Chenghai, Tu Yiqiang. Curvature mode-based structure damage localization [J]. Journal of PLA University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2009, 10(Suppl): 57—63. (in Chinese)
- [11] 殷志祥, 丁涛. 基于模态曲率差参数的网壳结构损伤定位[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2007, 26(6): 859—861.
Yin Zhixiang, Ding Tao. Nondestructive tests of reticulated dome based on parameter of mode curvature [J]. Journal of Liaoning Technical University, 2007, 26(6): 859—861. (in Chinese)
- [12] 尚高峰, 嵇春艳, 张强, 陈明璐. 基于模态曲率法的海洋平台结构损伤识别与定位研究[J]. 船舶力学, 2010, 14(5): 502—508.
Shang Gaofeng, Ji Chunyan, Zhang Qiang, Chen Minglu. Damage identification and localization of offshore platforms based on mode curvature method [J]. Journal of Ship Mechanics, 2010, 14(5): 502—508. (in Chinese)
- [13] 张勇, 静行, 袁海庆. 基于曲率模态变化率指标的结构损伤识别[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2010, 27(2): 82—85.
Zhang Yong, Jing Hang, Yuan Haiqing. Structural damage detection based on change rate of curvature mode [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Urban Science Edition), 2010, 27(2): 82—85. (in Chinese)
- [14] 克雷格. 结构动力学[M]. 常岭, 李振邦, 译. 北京: 人民交通出版社, 1996: 143—146.
Craig Roy R Jr. Fundamentals of structure dynamics [M]. Translated by Chang Ling, Li Zhenbang. Beijing: China Communications Press, 1996: 143—146. (in Chinese)