

文章编号: 1000-4750(2012)08-0340-06

# PVC 涂层膜材料不同应力下 非线性蠕变特性的预测

张伍连<sup>1,2</sup>, 丁 辛<sup>1</sup>, 杨旭东<sup>1</sup>

(1. 东华大学纺织学院, 上海 201620; 2. 惠州学院服装系, 广东 516007)

**摘 要:** 对方平组织为基布的 PVC (polyvinylchloride) 涂层膜材料进行了经、纬两方向五种应力条件下的拉伸蠕变试验。利用七参数(四个蠕变柔量与三个推迟时间)广义 Kelvin-Voigt 线性粘弹性蠕变模型对试验数据进行了分析, 从中发现: 对于单个应力, 线性粘弹性蠕变模型具有很好的拟合效果, 而对于多个应力, 三个推迟时间参数保持不变, 并以此为基础, 将七参数广义 Kelvin-Voigt 线性粘弹性蠕变模型修改为适合膜材料的七参数(四个蠕变柔量与三个推迟时间)非线性粘弹性和十四参数(八个蠕变柔量与六个推迟时间)非线性粘弹塑蠕变模型, 并把十四参数非线性粘弹塑蠕变模型合并为四个蠕变柔量与三个推迟时间的七参数非线性模型, 再将这两种非线性模型中的三个推迟时间设定为与线性粘弹性蠕变模型相同, 同时还设定非线性部分均来自于四个蠕变柔量, 最后借助四阶多项式对不同应力与对应的蠕变柔量进行了拟合, 结果发现: 该方法可以很好预测其他应力的蠕变特性。

**关键词:** PVC 涂层膜材料; 蠕变; 多项式函数; 非线性; 数据拟合

中图分类号: TS01 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.11.0802

## A PREDICTION METHOD OF NONLINEAR CREEP BEHAVIOR OF PVC COATED FABRIC MEMBRANE AT DIFFERENT STRESSES

ZHANG Wu-lian<sup>1,2</sup>, DING Xin<sup>1</sup>, YANG Xu-dong<sup>1</sup>

(1. College of Textiles, Donghua University, Shanghai 201620, China; 2. Department of Clothing, Huizhou College, Guangdong 516007, China)

**Abstract:** The uniaxial tension creep tests for PVC (polyvinylchloride) coated fabric membranes of 2/2 plain weave were carried out along the warp and weft directions at five different stresses states. By mean of the generalized Kelvin-Voigt linear viscoelastic creep model with seven parameters (four compliance components and three retarded time), the experimental data were analyzed. The results revealed that there had been good fitting effect for the linear model at single stress and three retarded time had been maintained at multiple stresses. On these bases, the linear viscoelastic model was modified into a nonlinear viscoelastic model with seven parameters (four compliance components and three retarded time) and a nonlinear visco-elastic-plastic model with fourteen parameters (eight compliance components and six retarded time). The latter was amalgamated into a nonlinear model with seven parameters (four compliance components and three retarded time). Considering that the three retarded time of the nonlinear models were the same as the linear model, that the nonlinear factors were come from four compliance components, the experiment data was analyzed with the aid of 4th degree polynomial. The result showed that the method could give better prediction at other stresses.

**Key words:** PVC coated fabric membrane material; creep; polynomial function; nonlinear; data fitting

收稿日期: 2010-11-05; 修改日期: 2011-01-10

通讯作者: 张伍连(1966—), 男, 安徽人, 副教授, 博士, 主要从事产业用纺织品结构与性能研究(E-mail: zhangwulian@hzu.edu.cn).

作者简介: 丁 辛(1954—), 男, 福建人, 教授, 博士, 博导, 主要从事纺织复合材料的制备及性能研究(E-mail: xding@dhu.edu.cn);

杨旭东(1976—), 男, 内蒙古人, 副教授, 博士, 主要从事产业用纺织品结构与性能研究(E-mail: xdyang@dhu.edu.cn).

PVC 涂层膜材料是一种常用的建筑性膜材料,可看成一种柔性复合材料,增强材料常为聚酯类织物,而基体为处于织物两侧的 PVC 涂层。由于膜材料在使用过程中长期处于一定的拉伸应力状态,因此,充分理解与掌握膜材料在不同的拉伸应力条件下的蠕变性能,对膜结构的设计与控制具有重要的现实意义。目前,关于织物类产品的蠕变性能研究主要集中在单纯的蠕变实验<sup>[1]</sup>或在单个应力条件下线性粘弹性模型<sup>[2-4]</sup>的模拟上,而如何由有限量的不同应力条件下的蠕变实验,来预测其他未知常应力的蠕变特性是本文想要达到的目的。

### 1 试验部分

材料为德国产商用方平组织 PVC 涂层膜材料,基布为高强度低纱聚酯丝,织造丝的规格为 1670dtex,经纬织造的密度为 1050/1050 根纱/m,基布的重量为 365g/m<sup>2</sup>,涂层后总重量为 1200g/m<sup>2</sup>,涂层后的总厚度为 0.00078m。

试验仪器选择德国产多功能 Zwick/Roell Z020 拉伸仪,最大载荷为 20kN,测量精度值按应变计算为 0.5%。试验样片的规格为 0.3m×0.05m。两个夹头的夹持长度均为 0.05m,夹持隔距为 0.2m,拉伸速率为: 0.8×10<sup>-3</sup>m/s,试验的温度为 20℃±3℃;相对湿度为 65%±4%。

先对样片进行拉伸断裂强度试验,经向 5 个样片的断裂强度值分别为: 86.337kN/m、86.896kN/m、88.234kN/m、90.751kN/m 和 91.642kN/m; 纬向 5 个样片的断裂强度值分别为: 50.786kN/m、51.191kN/m、51.372kN/m、52.346kN/m 和 55.735kN/m。

再对试验样片进行蠕变试验,为避免样片在夹头处产生的剪切变形,采用了引伸器测量出中间间隔 0.1m 位移量,按  $\varepsilon = l/l_0(\%)$  来计算应变。式中,  $l_0$  为原尺寸,  $l$  为引伸器测量出的位移量。共包括两种蠕变类型: 一种是用来确定适合膜材料的非线性蠕变模型,其经向应力选择为: 25.64MPa、38.46MPa、51.28MPa、66.67MPa 和 79.49MPa,纬向应力选择为 7.69MPa、17.95MPa、28.21MPa、38.46MPa 和 48.71MPa,作用时间为 9000s,其结果如图 1 所示; 另一种是用来检验所使用的预测方法是否正确,经向应力选择为: 23.08MPa、46.15MPa 和 76.92MPa,纬向应力选择为 26.92MPa、37.18MPa 和 47.44MPa,作用时间为 1200s,其结果如图 2 所示。

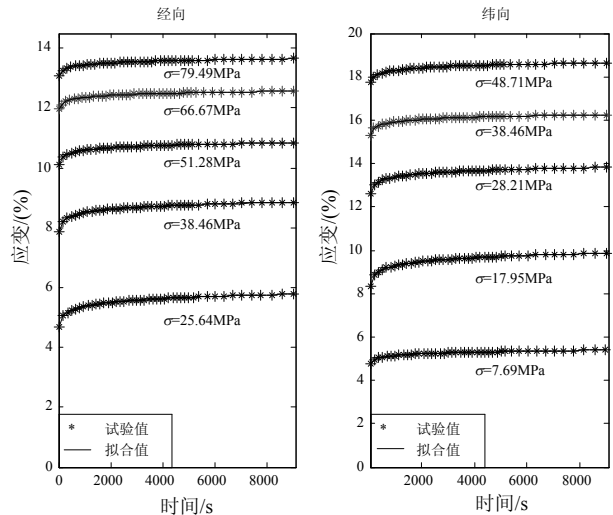


图 1 模型 A 在经纬向 5 种不同应力与作用时间为 9000s 的蠕变试验与拟合效果

Fig.1 The creep tests and fitting effect of the model A at five different stresses for 9000s along the warp and weft directions

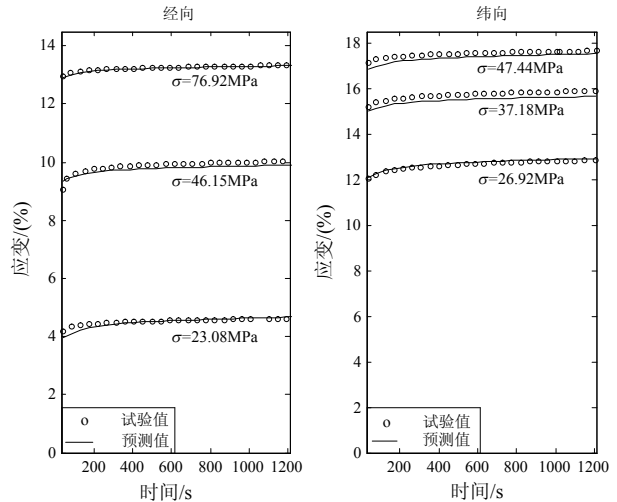


图 2 经纬向在 3 种不同应力与作用时间为 1200s 的蠕变试验与预测效果

Fig.2 The creep tests and prediction effect at three different stresses for 1200s along the warp and weft directions

从蠕变试验结果可以看出: 在各个应力作用下,试验样片不但会产生瞬时变形,同时还会产生与时间有关的推迟变形。

### 2 线性粘弹性模型的拟合

广义 Kelvin-Voigt 固体线性粘弹性模型<sup>[5]</sup>常用来模拟不同材料的蠕变性能,本文选用了七参数广义 Kelvin-Voigt 模型(简称模型 A),如图 3(a)所示,具体蠕变方程:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{1}{E_{e0}} + \sigma_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_{ei}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ei}}{\eta_{ei}} t\right) \right] \quad (1)$$

式中： $\sigma_0$ 为应力； $E_{ei}(i=0,1,2,3)$ 为弹簧的弹性模量； $\eta_{ei}(i=1,2,3)$ 为粘壶的粘性系数； $\eta_{ei}/E_{ei}$ 为推迟时间。

若令：

$$\lambda_i = E_{ei} / \eta_{ei}, J_0 = \frac{1}{E_{e0}}, J_i = \frac{1}{E_{ei}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ei}}{\eta_{ei}}t\right) \right] \quad (2)$$

式(1)可分别简化为：

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J_0 + \sigma_0 \sum_{i=1}^n J_i(t) \quad (3)$$

式中， $J_i(i=0,1,2,3)$ 为蠕变柔量。

$E_{e0}$ 的存在表明材料具有瞬时弹性变形，单个 $E_{ei}$ 与 $\eta_{ei}$ 并联在一起组织 Kelvin 的模型，其表明材料具有对应的一个推迟时间 $\eta_{ei}/E_{ei}(i=1,2,3)$ ，利用式(2)、式(3)，对经纬两方向、作用时间为 9000s、各自五个不同应力条件下的蠕变试验数据进行拟合(注：为简化计算，采用了文献[6-8]提供的方法，

将 $\lambda_i$ 直接选择为 $10^{-1}$ 与 $10^{-1}$ 相乘的连续参数系列，即把参数 $\lambda_1、\lambda_2$ 与 $\lambda_3$ 选定为 0.000001, 0.00001, 0.0001; 0.00001, 0.0001, 0.001; 0.0001, 0.001, 0.01; 0.001, 0.01, 0.1; 0.01, 0.1, 1 等序列，而把 $J_0、J_1、J_2、J_3$ 看成为可变参数)，其结果如图 3 所示。而具体的各参数与拟合效果列表于表 1 与表 2。

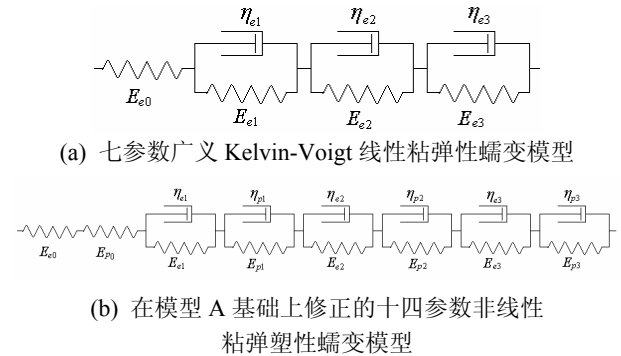


图 3 线性粘弹性与非线性粘弹塑性蠕变模型  
Fig.3 The linear visco-elastic and the nonlinear visco-elastic-plastic creep model

表 1 经向 5 种不同应力条件下模型 A 的拟合参数与拟合效果

Table 1 The fitting parameters and effect of the model A at five different stresses along the warp direction

应力/MPa	拟合参数							和方差	确定系数
	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$		
25.64	0.1737	0.0213	0.01541	0.02382	0.0001	0.001	0.01	$7.061 \times 10^{-4}$	0.9997
38.46	0.1996	0.01215	0.008748	0.01468	0.0001	0.001	0.01	0.000521	0.9997
51.28	0.1946	0.006271	0.004847	0.008296	0.0001	0.001	0.01	0.0004758	0.9994
66.67	0.1775	0.003889	0.003198	0.005452	0.0001	0.001	0.01	0.000359	0.9994
79.49	0.1628	0.003719	0.002344	0.004443	0.0001	0.001	0.01	0.0002205	0.9996

表 2 纬向 5 种不同应力条件下模型 A 拟合参数与拟合效果

Table 2 The fitting parameters and effect of the model A at five different stresses along the weft direction

应力/MPa	拟合参数							和方差	确定系数
	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$		
7.69	0.602	0.04643	0.02845	0.04359	0.0001	0.001	0.01	0.0002585	0.9997
17.95	0.4492	0.04154	0.03135	0.04414	0.0001	0.001	0.01	0.001131	0.9998
28.21	0.4391	0.01959	0.01623	0.02279	0.0001	0.001	0.01	0.00061	0.9997
38.46	0.3925	0.01067	0.009218	0.01447	0.0001	0.001	0.01	0.000496	0.9997
48.71	0.3603	0.008914	0.0073	0.009669	0.0001	0.001	0.01	0.0004779	0.9997

从上述的结果上看，对于单个应力而言，七参数广义 Kelvin-Voigt 线性粘弹性蠕变模型 A 可以很好拟合试验数据，同时还可以看出，各不同应力中的拟合参数 $\lambda_i$ 相对固定，即： $\lambda_1、\lambda_2、\lambda_3$ 取值分别为：0.0001、0.001、0.01。

### 3 非线性蠕变模型

从表 1 与表 2 可以看出，无论是经向还是纬向，不同应力间的蠕变柔量 $J_i(i=0,1,2,3)$ 在同一个作用时间条件下并不能对应相等，这说明 $J_i(i=0,1,2,3)$

是应力的非线性函数(注：对于线性粘弹性，其各应力条件下各自的蠕变柔量必须对应相当)，但此时，若将 $E_{ei}(i=0,1,2,3)$ 看成非线性弹簧( $J_i(i=0,1,2,3)$ 是应力的函数)，而三个推迟时间保持不变，则线性粘弹性模型 A 便可较为容易地转化为非线性粘弹性模型(简称模型 B)(模型 B 示意图同模型 A)。其相关的一些方程同模型 A 的相关方程式(1)~式(3)，只是将模型上线性弹簧看成非线性弹簧、线性 Kelvin 的模型看成非线性 Kelvin 的模型而已。但实际上，当拉伸应力增加到一定值时，其材料还会产生一定量

的瞬时塑性变形与推迟塑性变形,这说明仅用非线性粘弹性模型 B 仍不能很好地涵盖这两种塑性变形;为此,对于瞬时塑性变形,可在模型 B 基础上再串联一个类似非线性弹簧的元件,并规定:当材料处于拉伸时,其作用同非线性弹簧,当材料处于回复时,其变形保持不变;而对推迟塑性变形,可在模型 B 串联一个非线性弹簧的基础上再串联三个类似 Kelvin 的模型,并规定:当材料处于拉伸时,其作用同非线性 Kelvin 的模型,当材料处于回复时,其变形保持不变,模型 C 是模型 B 上修正的模型(简称模型 C)如图3(b)。同时还要求保持模型 B 中的三个推迟时间不变,即要求:非线性 Kelvin 的模型中的  $E_{ei} / \eta_{ei}$  与非线性类似 Kelvin 的模型中的  $E_{pi} / \eta_{pi}$  对应相等。模型 C 蠕变方程:

$$\varepsilon(t, \sigma) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E_{e0}} + \frac{1}{E_{p0}} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_0}{E_{ei}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{ei}}{\eta_{ei}} t\right) \right] + \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_0}{E_{pi}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_{pi}}{\eta_{pi}} t\right) \right] \quad (4)$$

令:

$$\frac{E_{ei}}{\eta_{ei}} = \frac{E_{pi}}{\eta_{pi}} = \lambda_i \quad (5)$$

$$\varepsilon(t, \sigma) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E_{e0}} + \frac{1}{E_{p0}} \right) + \sum_{i=1}^3 \sigma_0 \left( \frac{1}{E_{ei}} + \frac{1}{E_{pi}} \right) [1 - \exp(-\lambda_i t)] \quad (6)$$

令:

$$J_0(\sigma) = \frac{1}{E_{e0}} + \frac{1}{E_{p0}},$$

$$J_i(t, \sigma) = \left( \frac{1}{E_{ei}} + \frac{1}{E_{pi}} \right) [1 - \exp(-\lambda_i t)] \quad (7)$$

式(6)可简化为:

$$\varepsilon(t, \sigma) = \sigma_0 J_0 + \sum_{i=1}^3 \sigma_0 J_i \quad (8)$$

式中,  $J_i (i=0,1,2,3)$  为蠕变柔量。

利用式(6)~式(8)对试验数据进行拟合,拟合后的各参数与拟合效果见表 1 与表 2 中的模型 A。

#### 4 不同应力间的非线性蠕变柔量的拟合

从上述分析可见,蠕变模型 A、模型 B、模

型 C 中的参数  $\lambda_i (i=1,2,3)$  均不随应力大小而变化,线性蠕变模型 A 认为参数  $J_i (i=0,1,2,3)$  也不随应力的变化而变化,但这与材料实际情况不相符,非线性蠕变模型 B 认为参数  $J_i (i=0,1,2,3)$  是应力的非线性函数,其中,瞬时蠕变柔量  $J_0$  的大小取决于非线性弹簧,推迟蠕变柔量  $J_i (i=1,2,3)$  的大小取决于非线性 Kelvin 模型,这适合膜材料在较小应力条件下,此时,膜材料没有塑性变形的产生,非线性蠕变模型 C 认为参数  $J_i (i=0,1,2,3)$  也是应力的非线性函数,但瞬时蠕变柔量  $J_0$  的大小取决于非线性弹簧与类似非线性弹簧,即  $J_0$  包括瞬时弹性与瞬时塑性两部分,推迟蠕变柔量  $J_i (i=1,2,3)$  的大小取决于非线性 Kelvin 模型与类似非线性 Kelvin 模型,即  $J_i (i=1,2,3)$  包括推迟弹性与推迟塑性两部分,这适合膜材料在较高应力条件下,此时,膜材料存在塑性变形。

尽管非线性蠕变模型 B、模型 C 中参数  $J_0$  的来源并不相同,但二者均可统一地看成是应力的非线性函数,假设  $J_0$  是应力的多项式函数<sup>[9-10]</sup>,这里选择为四阶多项式,将经纬两方向的各自五个应力与对应瞬时蠕变柔量  $J_0$  进行拟合,其拟合的效果与拟合方程如图 4 所示。

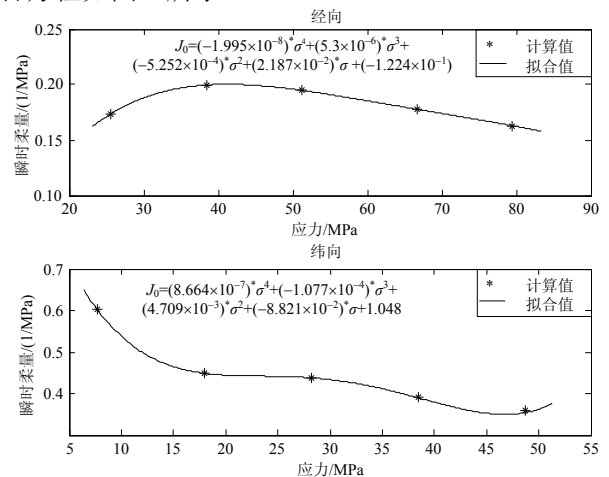


图 4 经纬向的瞬时柔量  $J_0$  与应力之间的拟合效果与拟合方程

Fig.4 The fitting effect and equation of the instantaneous compliance component  $J_0$  and stress along the warp and weft directions

非线性蠕变模型 B、模型 C 中参数  $J_i (i=1,2,3)$  不但是应力的函数,也是时间的函数,为得到参数  $J_i (i=1,2,3)$  与应力之间的相互关系,可将时间选择一个固定值,这里选定时间为无限长,模型 B 中的参数  $J_i (t = +\infty) = 1 / E_{ei} (i=1,2,3)$ ,模型 C 中的参数  $J_i (t = +\infty) = 1 / E_{ei} + 1 / E_{pi} (i=1,2,3)$ ,二者均可统

一地看成是应力的非线性函数，同样选择为四阶多项式，将经纬两方向的各自 5 个应力与对应推迟蠕变柔量  $J_i (i=1,2,3)$  进行拟合，其拟合的效果与拟合方程如图 5 和图 6 所示。

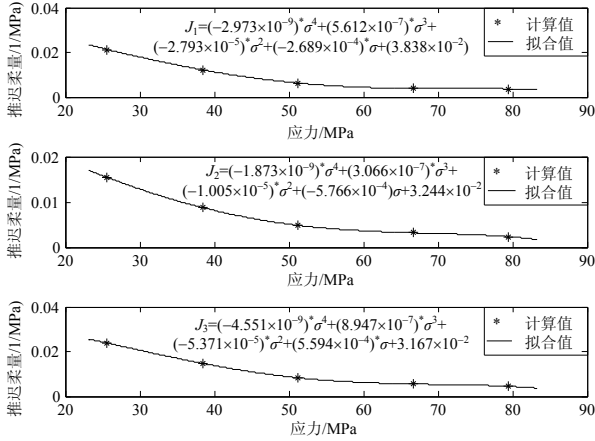


图 5 经向的推迟柔量  $J_i (i=1,2,3)$  与应力之间的拟合效果与拟合方程

Fig.5 The fitting effect and equation of the transient compliance component  $J_i (i=1,2,3)$  and stress along the warp direction

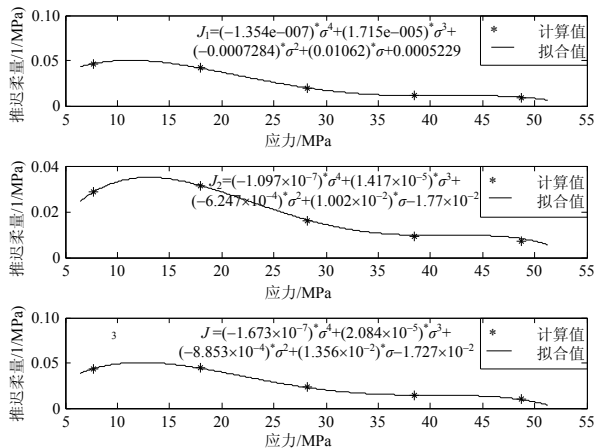


图 6 纬向瞬时柔量  $J_i (i=1,2,3)$  与应力之间的拟合效果

Fig.6 The fitting effect and equation of the transient compliance component  $J_i (i=1,2,3)$  and stress along the weft direction

### 5 不同应力条件下非线性蠕变特性的预测

将经向应力为 23.08MPa、46.15MPa 和 76.92MPa；纬向应力为 26.92MPa、37.18MPa 和 47.44MPa 分别代入图 3、图 4 和图 5 中的拟合方程，可得到各自的瞬时蠕变柔量  $J_0$  与时间定为无限长的推迟蠕变  $J_i (i=1,2,3)$  的值，再将各蠕变柔量  $J_i (i=0,1,2,3)$  代入模型 B 或模型 C 的相关方程式(2)、式(3)或式(7)、式(8)，结果如图 2 所示，从中可以看出，不同应力

的蠕变特性预测得相当准确。

### 6 结论

(1) 对于单个应力，广义的七参数 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型，包括四个蠕变柔量  $J_i (i=0,1,2,3)$  与三个推迟时间  $\lambda_i (i=1,2,3)$  已具有很好的拟合效果，而对于多个应力，其中的三个推迟时间  $\lambda_i (i=1,2,3)$  则保持恒定。

(2) 为满足膜材料在实际蠕变过程中出现非线性粘弹性与非线性粘弹塑变形的物理意义，在七参数 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型上，可将其修正为七参数非线性粘弹性和十四参数非线性粘弹塑性蠕变模型，其中，七参数非线性粘弹性蠕变模型中的四个蠕变柔量： $J_0$  与  $J_i (t = +\infty) = 1/E_{ei} (i=1,2,3)$  均为应力的非线性函数，而三个推迟时间  $\lambda_i (i=1,2,3)$  与 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型中的推迟时间保持相同；而十四参数非线性粘弹塑性蠕变模型中的八个参数将合并为四个蠕变柔量  $J_0 = 1/E_{e0} + 1/E_{p0}$  与  $J_i (t = +\infty) = 1/E_{ei} + 1/E_{pi} (i=1,2,3)$ ，它们均为应力的非线性函数，而六个推迟时间将合并为三个  $\lambda_i (i=1,2,3)$ ，与 Kelvin-Voigt 线性粘弹性模型中的推迟时间保持相同。

(3) 将七参数非线性粘弹性和十四参数非线性粘弹塑性蠕变模型中的四个蠕变柔量看成是应力的四阶多项式函数，可以很好预测其他应力的非线性蠕变特性。

### 参考文献:

[1] 倪佳女, 李阳, 王亚琴, 张其林. 建筑膜材料的力学性能试验研究[J]. 施工技术, 2008, 37(7): 34—38.  
Ni Jianu, Li Yang, Wang Yaqin, Zhang Qilin. Experimental research on mechanical properties of building membrane material [J]. Construction Technology, 2008, 37(7): 34—38. (in Chinese)

[2] 于波, 王玥, 刘国富, 王泽. 索膜结构的蠕变性能研究[J]. 科学技术与工程, 2006, 6(15): 2302—2305.  
Yu Bo, Wang Yue, Liu Guofu, Wang Ze. Study on creep performance of cable-membrane structure [J]. Science Technology and Engineering, 2006, 6(15): 2302—2305. (in Chinese)

[3] 朱明娟, 高亚英, 俞建勇, 蒋耀兴. Tencel 织物蠕变规律研究[J]. 东华大学学报, 2003, 29(5): 122—126.  
Zhu Mingjuan, Gao Yaying, Yu Jianyong, Jiang Yaoping. Study on relaxing behavior of Tencel fabric [J]. Journal of Donghua University, 2003, 29(5): 122—126. (in Chinese)

[4] 肖成志, 栾茂田, 杨庆, 裴建军. 考虑格栅蠕变性的筋

- 土复合体应力计算方法[J]. 大连理工大学学报, 2006, 46(1): 80—86.
- Xiao Chengzhi, Luan Maotian, Yang Qing, Pei Jianjun. A calculation method of micro-stress of composite media composed of reinforcements and soils considering creep effect of geogrids [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2006, 46(1): 80—86. (in Chinese)
- [5] Argyris J, Doltsinis I S. Constitutive model and computation of non-Linear viscoelastic solids. Part II, constitutive modeling and computation [J]. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 1992, 88: 158—226.
- [6] Anastasia M, Aravind N, Kamran A Khan, Shannon W. Characterization of thermo-mechanical and long-term behaviors of multi-layered composite materials [J]. Composites Science and Technology, 2006, 66: 2907—2924.
- [7] Haj-Ali Rami M, Muliana Anastasia H. A multi-scale constitutive formulation for the nonlinear viscoelastic analysis of laminated composite materials and structures [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41: 3461—3490.
- [8] Muliana Anastasia H, Haj-Ali Rami M. Analysis for creep behavior and collapse of thick-section composite structures [J]. Composite Structures, 2006, 73: 331—341.
- [9] Lars-Olof N, Janis V. Nonlinear viscoplastic and nonlinear viscoelastic material model for paper fiber composites in compression [J]. Composite Part A, 2006, 37: 344—255.
- [10] Lars-Olof N, Janis V. Nonlinear viscoelastic behavior of paper fiber composites [J]. Composites Science and Technology, 2005, 65: 1609—1625.

(上接第 339 页)

- [3] Wang J, Berg S, Luo Y H. Structural design of the truss Spar-an overview [C]// Wang J. Proceedings of the 11th international Offshore and Polar Engineering Conference, 2001, 6: 354—361.
- [4] Igor P, Atle S, John H. Upending of a spar offshore platform: Prediction of motions and loading [C]// Igor P. Proceedings of the 11th International Offshore and Polar Engineering Conference, 2001, 6: 421—426.
- [5] Paulling J R. MULTISIM- Time domain platform motion simulation for floating platform consisting of multiple interconnected modules [M]. America: Theoretical Manual, 1995: 8.
- [6] 丁承先. 运动解析与向量式有限元[M]. 中国: 台湾大学出版社, 2007: 8.  
Ding Chengxian. Motion analysis and vector form intrinsic finite element [M]. China: Taiwan University Press, 2007: 8. (in Chinese)
- [7] 吴思颖. 二维向量式刚架有限元之大变形与接触行为分析[D]. 中国: 台湾大学, 2004.  
Wu Siying. Large deformation and contact behavior analysis of two-dimensional finite element vector frame [D]. China: Taiwan University, 2004. (in Chinese)
- [8] Simo J C, Quoc L V. On the dynamics of flexible beams under large overall motions-the plane case: part I [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1986a, 53(4): 849—854.
- [9] Simo J C, Quoc L V. On the dynamics of flexible beams under large overall motions-the plane case: part II [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1986b, 53(4): 855—863.
- [10] Hsiao K M, Jang J Y. Dynamic analysis of planar flexible mechanisms by co-rotational Formulation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1991, 87(1): 1—14.
- [11] Subrata K Chakrabarti. Handbook of offshore engineering [M]. California: Elsevier Press, 2005: 373—375.