

文章编号: 1000-4750(2011)01-0012-07

基于多分辨率分析的结构物理参数识别贝叶斯估计方法: 方法推导与验证

*李小华¹, 公茂盛², 谢礼立²

(1. 广东省地震局, 广州 510070; 2. 中国地震局工程力学研究所, 哈尔滨 150080)

摘 要: 在观测噪声和模型误差等不确定性因素的影响下, 结构物理参数识别问题是一个不确定性问题。针对此问题, 该文从结构运动微分方程出发, 利用小波多分辨率分析原理, 建立结构多尺度动力方程, 由该方程以结构激励和响应信息在多尺度上的细节信号和最大尺度上的概貌信号为观测量推得物理参数线性回归模型, 对该模型应用贝叶斯估计理论得到物理参数后验联合分布, 再采用马尔可夫蒙特卡罗方法给出各个物理参数的边缘分布和最优估计值, 从而提出了基于结构响应和输入激励的物理参数识别贝叶斯估计方法。通过对四层剪切型结构的数值研究验证了该方法的有效性和正确性, 算例还表明该方法在强噪声干扰下仍能获得满足工程要求的识别精度。

关键词: 物理参数识别; 概率方法; 贝叶斯估计; 马尔可夫蒙特卡罗方法; 多尺度动力方程

中图分类号: TU311.3 **文献标识码:** A

STRUCTURAL PHYSICAL PARAMETER IDENTIFICATION USING BAYESIAN ESTIMATION BASED ON MULTI-RESOLUTION ANALYSIS: FORMULATION AND VERIFICATION

*LI Xiao-hua¹, GONG Mao-sheng², XIE Li-li²

(1. Earthquake Administration of Guangdong Province, Guangzhou 510070, China;

2. Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China)

Abstract: With the existence of uncertainties like measurement noise and model error, structural physical parameter identification becomes an indeterminate problem. In this paper, a probabilistic approach capable of dealing with this problem effectively is presented on the basis of Bayesian statistics theory and Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods using measured responses and excitations. By means of wavelet multiresolution analysis, differential equations of motion are used to establish the multiscale dynamic equations of linear structural systems, from which the linear regression models of physical parameters are inferred with the approximations and details of loads and responses obtained from multilevel wavelet decompositions. Based on these models, the posterior joint probability density function (PDF) of physical parameters is obtained using the Bayesian estimation, then MCMC methods are implemented to obtain the marginal PDF and optimal estimate of physical parameters from their posterior joint PDF. The numerical simulations of 4DOF shear building demonstrate the accuracy and validity of the proposed method, and show that this approach can achieve identification accuracy satisfying engineering needs under noise.

Key words: physical parameter identification; probabilistic approach; Bayesian estimation; Markov Chain Monte Carlo methods; multiscale dynamic equation

收稿日期: 2009-06-30; 修改日期: 2009-08-12

基金项目: 国家科技支撑计划项目(2006BAC13B01); 中国地震局工程力学研究所基本科研业务专项项目(2006B02)

作者简介: *李小华(1983—), 男, 湖南衡阳人, 硕士, 从事结构参数识别研究(E-mail: lixiaohua446@163.com);

公茂盛(1976—), 男, 山东沂南人, 副研究员, 博士, 从事结构参数识别研究(E-mail: gmshiem@163.com);

谢礼立(1939—), 男, 上海人, 教授, 中国工程院院士, 从事地震工程与防灾工程研究(E-mail: llxie@iem.ac.cn).

在结构材料的不均匀性, 施工质量的易变性, 作用荷载的随机性等不确定性因素的影响下, 观测数据和结构模型均具有强烈的本质不确定性, 从而导致结构物理参数识别问题成为不确定性问题^[1-3]。因此, 必须在确定性物理参数识别研究的基础上, 发展能够合理反映问题不确定性特性的物理参数识别概率方法。基于贝叶斯估计理论的结构物理参数识别方法以其不但能给出物理参数最优估计值, 还能得到参数估计值的概率分布, 很好地解释了物理参数识别具有不确定性问题, 而得到广泛的应用。Beck^[4]首先把贝叶斯估计理论引入系统参数识别研究中, 并建立了基于贝叶斯估计的参数识别框架。在此框架下, Beck 和 Katafygiotis^[5]提出了基于结构主模态参数的物理参数识别贝叶斯估计渐近逼近方法(asymptotic approximation methods), 近似地估计了物理参数后验联合分布, 得到了物理参数估计值; Ching 和 Beck^[6]提出了基于 EM 程序(Expectation Maximization algorithm)的物理参数识别贝叶斯估计方法, 利用 IASC-ASCE 的 benchmark 结构的由实测响应数据获得的模态参数和该方法研究了 benchmark 结构第二阶段模型的物理参数识别和损伤诊断情况, 结果显示该方法对层间斜支撑的破坏情况识别较好, 而对梁柱节点的转动破坏情况识别效果不好; 随后, Ching 和 Muto^[7]等研究了当物理参数后验联合分布很复杂时的各个物理参数边缘分布的估计问题, 建立了基于结构主模态参数的物理参数识别随机模拟方法, 利用 benchmark 结构的仿真响应数据和此方法成功地识别了 benchmark 结构第二阶段模型的梁柱节点转动破坏情况, 进一步提高了基于贝叶斯估计的物理参数识别计算效率。但上述的物理参数识别贝叶斯估计方法都是两阶段物理参数识别方法, 即先由结构激励和响应时程数据, 利用 Beck 发展的 MODE-ID 程序识别结构主模态参数, 再根据结构动力特征方程, 应用贝叶斯估计理论, 由得到的主模态参数识别结构物理参数。此方法的主要缺点是, 物理参数的识别精度取决于主模态参数的选择及其识别精度, 并且目前还没有一个合理的主模态参数选择标准。本文从结构运动微分方程出发, 利用小波多分辨率分析原理, 建立结构多尺度动力方程。对该方程采用贝叶斯估计理论和马尔可夫蒙特卡罗方法, 直接由结构激励和响应信息识别结构物理参数, 不仅给出物理参数的边缘概率分布和最优估计值, 还避免了两阶段识

别方法主模态参数对物理参数识别的影响。

1 结构动力系统多分辨率分析

1.1 多分辨率分析

多分辨率分析又称多尺度分析, 是建立在函数空间概念上的理论, 其基本思想是: 利用正交小波变换可以将任意信号在不同尺度上进行分解, 分解到尺度空间的部分称之为概貌信号, 分解到小波空间的部分称之为细节信号。离散信号经过尺度 1, 2, ..., J 的分解, 最终分解为不同尺度上的细节信号 d_1, d_2, \dots, d_J 和最大尺度上的概貌信号 a_J , 它们分别包含了信号从高频到低频的不同频带的信息, 因此被称为多分辨率分析^[8]。

1.2 结构多尺度动力方程^[8]

对 N 个自由度结构体系而言, 其线性运动微分方程为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

其中: \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 和 $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 分别为结构质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^N$ 为结构位移响应向量, 上标点表示对时间的导数; $\mathbf{F}(t) \in \mathbf{R}^N$ 为结构外荷载向量。

用正交小波函数 $\psi_{r,s}(t)$ 对式(1)两端进行小波变换, 并由小波变换的叠加性可得:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{WT}_{\ddot{\mathbf{x}}}(r,s) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{WT}_{\dot{\mathbf{x}}}(r,s) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{WT}_{\mathbf{x}}(r,s) = \mathbf{WT}_{\mathbf{F}}(r,s) \quad (2)$$

由多分辨率分析原理可知, 式(2)中各项都可分解为第 1, 2, ..., l 尺度上的细节信号和第 l 尺度上的概貌信号, 即为:

$$\mathbf{M}(\mathbf{d}_{\ddot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{d}_{\ddot{\mathbf{x}}}^2 + \dots + \mathbf{d}_{\ddot{\mathbf{x}}}^1 + \mathbf{a}_{\ddot{\mathbf{x}}}^l) + \mathbf{C}(\mathbf{d}_{\dot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{d}_{\dot{\mathbf{x}}}^2 + \dots + \mathbf{d}_{\dot{\mathbf{x}}}^1 + \mathbf{a}_{\dot{\mathbf{x}}}^l) + \mathbf{K}(\mathbf{d}_{\mathbf{x}}^l + \mathbf{d}_{\mathbf{x}}^2 + \dots + \mathbf{d}_{\mathbf{x}}^1 + \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^l) = \mathbf{d}_{\mathbf{F}}^l + \mathbf{d}_{\mathbf{F}}^2 + \dots + \mathbf{d}_{\mathbf{F}}^1 + \mathbf{a}_{\mathbf{F}}^l \quad (3)$$

其中 $\mathbf{d}_{\ddot{\mathbf{x}}}^l$ 、 $\mathbf{d}_{\dot{\mathbf{x}}}^l$ 、 $\mathbf{d}_{\mathbf{x}}^l$ 、 $\mathbf{d}_{\mathbf{F}}^l$ 和 $\mathbf{a}_{\ddot{\mathbf{x}}}^l$ 、 $\mathbf{a}_{\dot{\mathbf{x}}}^l$ 、 $\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^l$ 、 $\mathbf{a}_{\mathbf{F}}^l$ 分别为 $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{F}(t)$ 在第 l 尺度上的细节信号和概貌信号。

由小波变换的正交性可知, 式(3)两边在各尺度上存在等价关系:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{d}_{\ddot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{C}\mathbf{d}_{\dot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{K}\mathbf{d}_{\mathbf{x}}^l = \mathbf{d}_{\mathbf{F}}^l \\ \dots \\ \mathbf{M}\mathbf{d}_{\ddot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{C}\mathbf{d}_{\dot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{K}\mathbf{d}_{\mathbf{x}}^l = \mathbf{d}_{\mathbf{F}}^l \\ \mathbf{M}\mathbf{a}_{\ddot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{C}\mathbf{a}_{\dot{\mathbf{x}}}^l + \mathbf{K}\mathbf{a}_{\mathbf{x}}^l = \mathbf{a}_{\mathbf{F}}^l \end{cases} \quad (4)$$

式(4)称为结构动力系统的多尺度动力方程。

在结构动力系统辨识中, 实际记录的信号不可

避免地存在噪声, 若将获取的信号在多尺度上进行描述和分析, 并采用结构多尺度动力方程来建立识别模型, 就可以降低噪声的干扰, 提高识别精度。

2 物理参数后验联合分布估计

2.1 线性回归模型^[9]

线性回归模型通常表示如下:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}+\mathbf{e} \quad (5a)$$

$$\mathbf{e} \sim N(0, \sigma_e^2 \mathbf{I}_{n \times n}) \quad (5b)$$

其中: $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]^T$ 为模型参数; $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$ 为观测模型输出; $\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$ 为理论模型输出; $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为观测回归量矩阵; $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$ 为预测误差, 其服从均值为零, 协方差矩阵为 $\sigma_e^2 \mathbf{I}_{n \times n}$ 的 n 维正态分布。

假设模型参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的先验分布为不正常的均匀分布, 即为:

$$P(\theta_i)=1(\theta_i \in (0, +\infty); i=1, \dots, m) \quad (6)$$

预测误差方差 σ_e^2 的先验分布为 $IG(\alpha, \beta)$, 即为:

$$P(\sigma_e^2)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\sigma_e^2)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma_e^2}\right) \quad (7)$$

其中: α 为形状参数; β 为尺度参数。

由贝叶斯估计理论可知, 模型参数 $\boldsymbol{\theta}$ 和预测误差方差 σ_e^2 的后验联合分布为:

$$P(\boldsymbol{\theta}, \sigma_e^2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto (\sigma_e^2)^{-(n/2+\alpha+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})-\frac{\beta}{\sigma_e^2}\right\} \quad (8)$$

2.2 物理参数后验联合分布

为了识别方便, 把结构质量矩阵 \mathbf{M} 、阻尼矩阵 \mathbf{C} 和刚度矩阵 \mathbf{K} 按如下公式进行分解^[1, 2, 10]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{m})=\mathbf{M}_0+\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i m_i \quad (9)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{c})=\mathbf{C}_0+\sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i c_i \quad (10)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{k})=\mathbf{K}_0+\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i k_i \quad (11)$$

其中: $\mathbf{m}=[m_1, m_2, \dots, m_N]^T$ 为结构质量参数向量; $\mathbf{c}=[c_1, c_2, \dots, c_N]^T$ 为结构阻尼参数向量; $\mathbf{k}=[k_1, k_2, \dots, k_N]^T$ 为结构刚度参数向量; \mathbf{M}_0 、 \mathbf{M}_i 、 \mathbf{C}_0 、 \mathbf{C}_i 、 \mathbf{K}_0 和 \mathbf{K}_i 都为 N 阶常量系数矩阵。

2.2.1 地震荷载作用

地震荷载作用时, 运动微分方程式(1)中 $\mathbf{F}(t)=-\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t)$, $\mathbf{1} \in \mathbf{R}^N$ 为元素都为 1 的向量, $\ddot{u}_g(t)$ 为地面运动加速度。已知记录的结构响应和地面运动加速

度识别物理参数向量 \mathbf{m} 、 \mathbf{c} 和 \mathbf{k} 。此时, 结构物理参数识别具有无穷解。但在实际工程中, 结构质量参数一般几乎不发生变化, 因此认为质量参数 \mathbf{m} 为已知量, 其服从正态分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 其中均值 $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{m}_0$, 协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}=\text{diag}(5\% \times \mathbf{m}_0)$, \mathbf{m}_0 为结构设计计算时的质量参数值。则结构在地震荷载作用下的多尺度动力方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l + \mathbf{C}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l + \mathbf{K}\mathbf{d}_x^l = -\mathbf{M}\mathbf{1}d_{\ddot{u}_g}^l \\ \dots \\ \mathbf{M}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l + \mathbf{C}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l + \mathbf{K}\mathbf{d}_x^l = -\mathbf{M}\mathbf{1}d_{\ddot{u}_g}^l \\ \mathbf{M}\mathbf{a}_{\dot{x}}^l + \mathbf{C}\mathbf{a}_x^l + \mathbf{K}\mathbf{a}_x^l = -\mathbf{M}\mathbf{1}a_{\ddot{u}_g}^l \end{cases} \quad (12)$$

把式(10)和式(11)代入式(12)中, 整理得到结构阻尼和刚度参数基于地面运动加速度 $\ddot{u}_g(t)$ 在多尺度上的细节信号 $d_{\ddot{u}_g}^l, d_{\dot{u}_g}^l, \dots, d_{u_g}^l$ 和最大尺度上的概貌信号

$a_{\ddot{u}_g}^l$ 的预测误差 \mathbf{e} 的线性回归模型为:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{M}\mathbf{1}d_{\ddot{u}_g}^l - \mathbf{M}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l \\ \vdots \\ -\mathbf{M}\mathbf{1}d_{\ddot{u}_g}^l - \mathbf{M}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l \\ -\mathbf{M}\mathbf{1}a_{\ddot{u}_g}^l - \mathbf{M}\mathbf{a}_x^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{C}_N d_x^l & \mathbf{K}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{K}_N d_x^l \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{C}_N d_x^l & \mathbf{K}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{K}_N d_x^l \\ \mathbf{C}_1 a_x^l & \dots & \mathbf{C}_N a_x^l & \mathbf{K}_1 a_x^l & \dots & \mathbf{K}_N a_x^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} + \mathbf{e} \quad (13a)$$

$$\mathbf{e} \sim N(0, \sigma_e^2 \mathbf{I}) \quad (13b)$$

由 2.1 节可知, 阻尼参数 c_i 、刚度参数 k_i 和预测误差方差 σ_e^2 的后验联合分布由式(8)可得, 其中:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\mathbf{1}d_{\ddot{u}_g}^l - \mathbf{M}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l \\ \vdots \\ -\mathbf{M}\mathbf{1}d_{\ddot{u}_g}^l - \mathbf{M}\mathbf{d}_{\dot{x}}^l \\ -\mathbf{M}\mathbf{1}a_{\ddot{u}_g}^l - \mathbf{M}\mathbf{a}_x^l \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{C}_N d_x^l & \mathbf{K}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{K}_N d_x^l \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{C}_N d_x^l & \mathbf{K}_1 d_x^l & \dots & \mathbf{K}_N d_x^l \\ \mathbf{C}_1 a_x^l & \dots & \mathbf{C}_N a_x^l & \mathbf{K}_1 a_x^l & \dots & \mathbf{K}_N a_x^l \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$\boldsymbol{\theta}=[c_1 \quad \dots \quad c_N \quad k_1 \quad \dots \quad k_N]^T \quad (14c)$$

2.2.2 环境激励作用

已知记录的结构响应和环境激励 $\mathbf{F}(t)$ 识别物理参数向量 \mathbf{m} 、 \mathbf{c} 和 \mathbf{k} 。结构在环境激励作用下的多尺

度动力方程如式(4)。把式(9)、式(10)和式(11)代入式(4)，整理得到结构质量、阻尼和刚度参数基于环境激励 $F(t)$ 在多尺度上的细节信号 $d_F^1, d_F^2, \dots, d_F^l$

$$\begin{bmatrix} d_F^1 \\ \vdots \\ d_F^l \\ a_F^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 d_{\ddot{x}}^1 & \cdots & M_N d_{\ddot{x}}^1 & C_1 d_{\dot{x}}^1 & \cdots & C_N d_{\dot{x}}^1 & K_1 d_x^1 & \cdots & K_N d_x^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1 d_{\ddot{x}}^l & \cdots & M_N d_{\ddot{x}}^l & C_1 d_{\dot{x}}^l & \cdots & C_N d_{\dot{x}}^l & K_1 d_x^l & \cdots & K_N d_x^l \\ M_1 a_{\ddot{x}}^l & \cdots & M_N a_{\ddot{x}}^l & C_1 a_{\dot{x}}^l & \cdots & C_N a_{\dot{x}}^l & K_1 a_x^l & \cdots & K_N a_x^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ c \\ k \end{bmatrix} + e \quad (15a)$$

$$e \sim N(0, \sigma_e^2 I) \quad (15b)$$

同理，由 2.1 节可知，质量参数 m_i 、阻尼参数 c_i 、刚度参数 k_i 和预测误差方差 σ_e^2 的后验联合分布由式(8)可得，其中：

$$Y = [d_F^1 \cdots d_F^l \ a_F^l]^T \quad (16a)$$

$$X =$$

$$\begin{bmatrix} M_1 d_{\ddot{x}}^1 & \cdots & M_N d_{\ddot{x}}^1 & C_1 d_{\dot{x}}^1 & \cdots & C_N d_{\dot{x}}^1 & K_1 d_x^1 & \cdots & K_N d_x^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1 d_{\ddot{x}}^l & \cdots & M_N d_{\ddot{x}}^l & C_1 d_{\dot{x}}^l & \cdots & C_N d_{\dot{x}}^l & K_1 d_x^l & \cdots & K_N d_x^l \\ M_1 a_{\ddot{x}}^l & \cdots & M_N a_{\ddot{x}}^l & C_1 a_{\dot{x}}^l & \cdots & C_N a_{\dot{x}}^l & K_1 a_x^l & \cdots & K_N a_x^l \end{bmatrix} \quad (16b)$$

$$\theta = [m_1 \cdots m_N \ c_1 \cdots c_N \ k_1 \cdots k_N]^T \quad (16c)$$

3 马尔可夫蒙特卡罗方法

3.1 马尔可夫蒙特卡罗方法介绍^[9,11]

马尔可夫蒙特卡罗方法是一种统计试验方法，即采用统计抽样理论近似求解数学或物理问题，其计算原理是：从一个目标概率分布中抽取一个容量大小为 n_0 的样本(收敛且平稳)，其中各个参数的样本值分布就近似于其边缘概率分布，因此把各个参数样本值代入一个需要的定积分近似计算公式中就得到该参数的数字特征。在贝叶斯估计中，目标概率分布就是参数 θ 的后验联合分布，一般我们常用的数字特征(期望和方差)可由下两式近似计算：

$$\mu_{\theta_i} = \int \theta_i P(\theta_i) d\theta_i \approx \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} \theta_{i,j} \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta_i}^2 = \int (\theta_i - \mu)^2 P(\theta_i) d\theta_i \approx \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} (\theta_{i,j} - \mu_{\theta_i})^2 \quad (18)$$

其中 $\theta_{i,j}$ 为由马尔可夫蒙特卡罗方法从目标概率分布中为参数 θ_i 抽取的样本值。

马尔可夫蒙特卡罗方法中最常用的两个抽样方法为 Gibbs 取样和 Metropolis-Hastings(MH)取样，其抽样原理及步骤参阅文献[9]。

和最大尺度上的概貌信号 a_F^l 的预测误差 e 的线性回归模型为：

3.2 物理参数抽样

在获得结构物理参数和预测误差方差的后验联合分布后，我们希望由此联合分布，得到各个物理参数的边缘概率分布，从而得到各个物理参数的期望值(最优估计值)和方差。

对 $P(\theta, \sigma_e^2 | X, Y)$ ，由概率论可知，其条件分布 $P(\theta | \sigma_e^2, X, Y)$ 和 $P(\sigma_e^2 | \theta, X, Y)$ 均为满条件分布(full conditional distribution)。因此，可以采用 Gibbs 抽样算法为参数空间 $\{\theta, \sigma_e^2\}$ 中的各个参数抽取样本，各个参数的样本值分布就近似于其边缘概率分布。

3.2.1 满条件概率分布

由贝叶斯理论和 Gibbs 抽样原理可知，满条件分布 $P(\theta | \sigma_e^2, X, Y)$ 和 $P(\sigma_e^2 | \theta, X, Y)$ 分别为高斯分布和倒伽玛分布^[9]，即为：

$$P(\theta | \sigma_e^2, X, Y) = N((X^T X)^{-1} (X^T Y), \sigma_e^2 (X^T X)^{-1}) \quad (19)$$

$$P(\sigma_e^2 | \theta, X, Y) = IG\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2} (Y - X\theta)^T (Y - X\theta)\right) \quad (20)$$

在实际工程结构中，记录的结构响应和激励不可避免地存在噪声，且通常为白噪声，其在整个频率上功率谱大小相同，而结构响应和激励信息在不同频段上有不同大小的功率谱。因此，在多尺度动力方程中，结构响应和激励信息在不同尺度上的信噪比不同。为了降低噪声干扰，提高识别精度，可以根据不同尺度上信噪比的高低引入加权矩阵 A ，信噪比高的尺度上，加权值应大，反之加权值应小^[8]。则参数 θ 和 σ_e^2 在引入加权矩阵 A 后的满条件概率分布为：

$$P(\theta | \sigma_e^2, X, Y) = N((X^T A X)^{-1} (X^T A Y), \sigma_e^2 (X^T A X)^{-1}) \quad (21)$$

$$P(\sigma_e^2 | \theta, X, Y) = IG\left(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2} (Y - X\theta)^T A (Y - X\theta)\right) \quad (22)$$

其中 $A = \text{diag}(A_{d1}, \dots, A_{dl}, A_{dl})$, $A_{dl} = \delta_{dl} \mathbf{I}$, $0 \leq \delta_{dl} \leq 1$ 。

3.2.2 Gibbs 抽样算法

Gibbs 抽样过程如下：

第 1 步：给参数 θ 和 σ_e^2 分别赋初值 $\theta^{(0)}$ 和 $(\sigma_e^2)^{(0)}$ ，其中 $\theta^{(0)}$ 和 $(\sigma_e^2)^{(0)}$ 分别从参数 θ 和 σ_e^2 的先验分布式(6)和式(7)中随机抽得，并令 $j=1$ 。

第 2 步：为参数 θ 抽取样本。将 $(\sigma_e^2)^{(j-1)}$ 代入式(21)得满条件分布 $P(\theta | (\sigma_e^2)^{(j-1)}, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ，从其中为参数 θ 抽取样本，抽到的样本值记为 $\theta^{(j)}$ 。

第 3 步：为参数 σ_e^2 抽取样本。将 $\theta^{(j)}$ 代入式(22)得满条件分布 $P(\sigma_e^2 | (\theta)^{(j)}, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ，从其中为参数 σ_e^2 抽取样本，抽到的样本值记为 $(\sigma_e^2)^{(j)}$ 。

第 4 步：令 $j=j+1$ ，返回到第 2 步，并依次循环直到为参数空间 $\{\theta, \sigma_e^2\}$ 抽到收敛且平稳的样本。

3.3 物理参数边缘分布

获得各个物理参数的收敛且平稳的随机样本后，由马尔可夫蒙特卡罗方法原理可知，各个物理参数的样本值分布就近似于其边缘概率分布，其数字特征期望(最优估计值)和方差分别由式(17)和式(18)计算可得。

4 数值算例

已知结构如图 1 所示，其物理参数如表 1 所示。

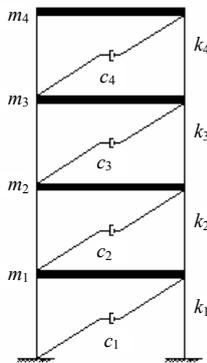


图 1 四层结构

Fig.1 Four-story structure

表 1 结构物理参数

Table 1 Physical parameters of the structure

| 楼层 | 质量 m/kg | 刚度 $k/(\text{N/m})$ | 阻尼 $c/(\text{kg/s})$ |
|----|------------------|---------------------|----------------------|
| 1 | 6000 | 120000 | 1600 |
| 2 | 5000 | 110000 | 1500 |
| 3 | 5000 | 110000 | 1500 |
| 4 | 4000 | 100000 | 1400 |

算例 1. 对如图 1 所示结构作用 El-centro 地震波，用 Newmark 方法计算结构在地震作用下的响应，取

1000 个采样点，其时间间隔为 0.02s。在结构响应中加入白噪声以模拟实际测量结果，即：

$$x'_i = x_i + nl \cdot (\text{rms}(x)) \cdot R \quad (23)$$

式中： x'_i 为被噪声污染后的测量值； x_i 为理论计算值； R 为正态分布 $N(0,1)$ 的随机数； nl 为噪声水平。用 db5 小波对结构响应和地震波作尺度 5 上的小波变换，得到 6 个频段上的时程信息，并代入式(13a)。加权矩阵 A 根据地震波在 6 个频段上的小波系数均方值的相对大小确定。结构质量参数服从正态分布 $N(\mu, \Sigma)$ ，其中均值 $\mu = m_0$ ，协方差矩阵 $\Sigma = \text{diag}(5\% \times m_0)$ ， $m_0 = [6 \ 5 \ 5 \ 4]^T \times 10^3 \text{kg}$ 。结构阻尼和刚度参数的先验分布为不正常的均匀分布，预测误差方差 σ_e^2 的先验分布为 $IG(6, 0.3)$ 。

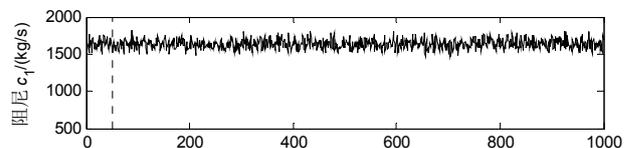
结构阻尼和刚度参数在噪声水平为 1%、5%和 10%三种情况下的识别结果如表 2 所示。噪声水平 $nl=1\%$ 时：结构阻尼和刚度参数的抽样曲线如图 2 所示，虚线表示抽样已经收敛；样本直方图如图 3 所示；边缘概率分布如图 4 所示，虚线表示最优估计值；刚度参数 k_4 的 95%置信区间如图 5 所示。

表 2 地震作用下结构物理参数识别结果

Table 2 Identification results of structural physical parameters under earthquake

| 物理参数 | 1%噪声 | | 5%噪声 | | 10%噪声 | |
|----------------------------------|--------------------|------------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|
| | 识别结果 | 误差/(%) | 识别结果 | 误差/(%) | 识别结果 | 误差/(%) |
| $c_1/$ (10^3kg/s) | 1.6354 (0.0634) | 2.21 (10.13) | 1.5001 (0.3955) | 6.25 (55.69) | 1.5076 (0.6392) | 5.77 (83.98) |
| $c_2/$ (10^3kg/s) | 1.4990 (0.0534) | 0.07 (7.19) | 1.1481 (0.3492) | 23.46 (70.03) | 1.3509 (0.5229) | 9.94 (84.87) |
| $c_3/$ (10^3kg/s) | 1.4711 (0.0617) | 1.92 (10.15) | 1.4719 (0.4209) | 1.88 (57.99) | 0.2624 (0.6093) | 82.51 (163.46) |
| $c_4/$ (10^3kg/s) | 1.2702 (0.0583) | 9.27 (17.61) | 1.0194 (0.4031) | 27.19 (84.76) | 0.4617 (0.6316) | 67.02 (151.12) |
| $k_1/$ (10^5N/m) | 1.1962 (0.0021) | 0.31 (0.67) | 1.1854 (0.0147) | 1.22 (3.67) | 1.1729 (0.0231) | 2.26 (5.70) |
| $k_2/$ (10^5N/m) | 1.1011 (0.0019) | 0.09 (0.44) | 1.0940 (0.0133) | 0.55 (2.96) | 1.0278 (0.0191) | 6.57 (9.89) |
| $k_3/$ (10^5N/m) | 1.0949 (0.0021) | 0.47 (0.85) | 1.0418 (0.0143) | 5.29 (7.88) | 1.0397 (0.0215) | 5.48 (9.35) |
| $k_4/$ (10^5N/m) | 0.9953 (0.0025) | 0.47 (0.97)* | 0.9369 (0.0180) | 6.31 (9.91) | 0.8866 (0.0275) | 11.34 (16.99) |

注：识别结果中未加括号值为参数边缘分布期望值，加括号值为其标准差；误差中未加括号值为期望值与真实值的相对误差，加括号值为 95%置信区间内的值与真实值的相对误差的最大值。



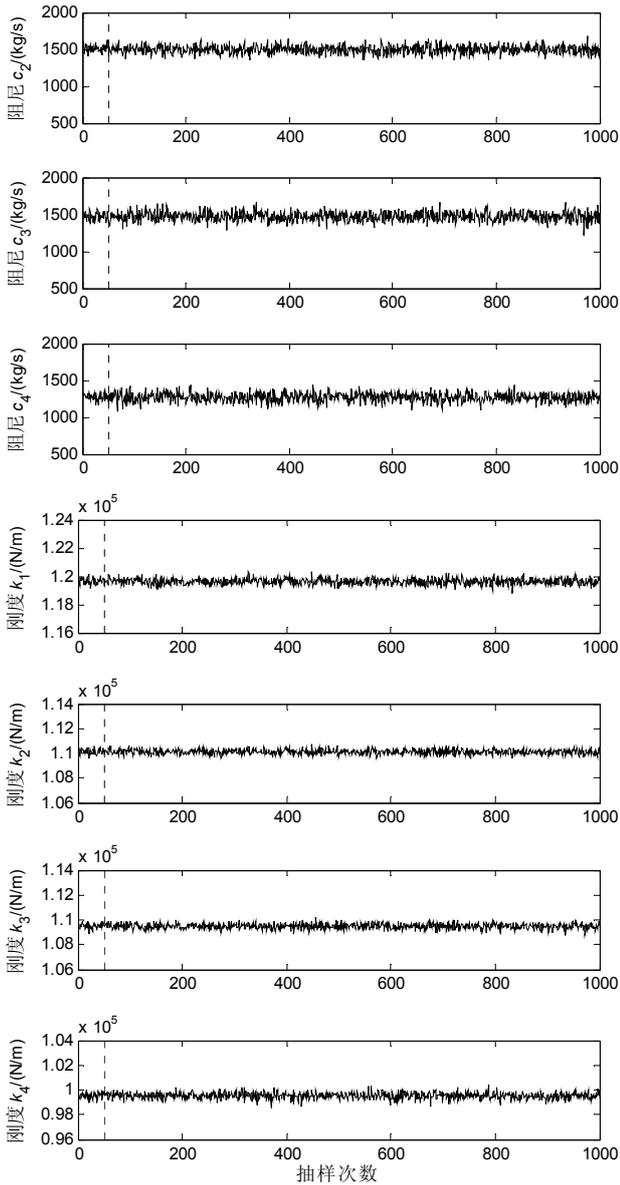


图2 1%噪声时阻尼和刚度参数抽样曲线
Fig.2 Samples of damping and stiffness parameters under 1% noise

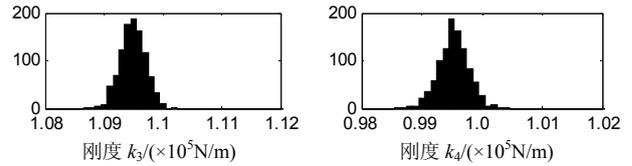
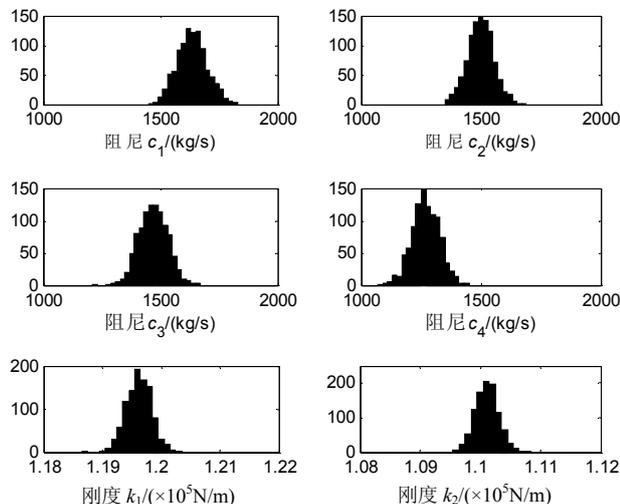


图3 1%噪声时阻尼和刚度参数样本直方图
Fig.3 Histograms for samples of damping and stiffness parameters under 1% noise

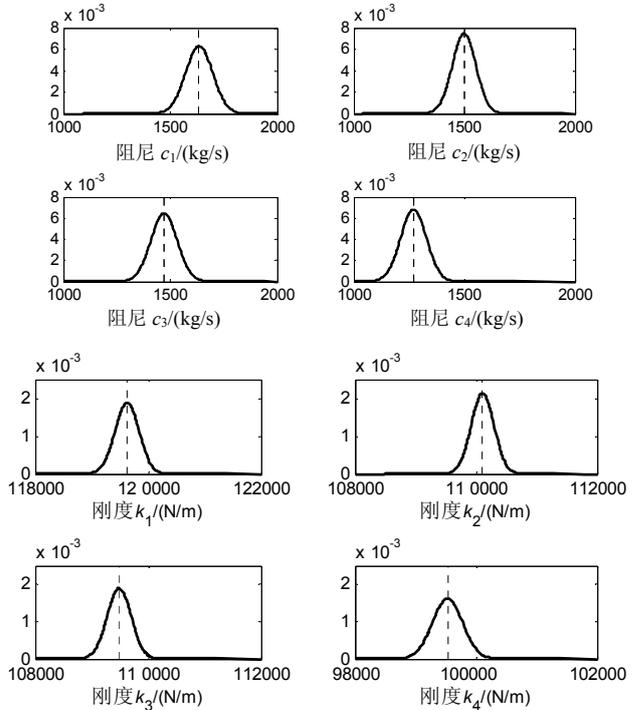


图4 1%噪声时阻尼和刚度参数边缘分布
Fig.4 The marginal PDF of damping and stiffness parameters under 1% noise

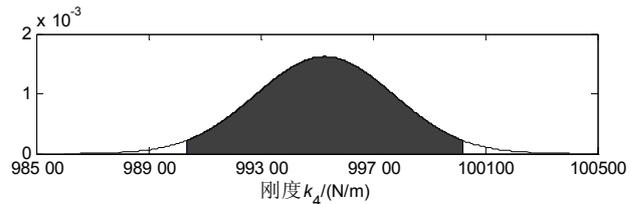


图5 1%噪声时刚度参数 k_4 的95%置信区间
Fig.5 95% confidence interval of k_4 under 1% noise

算例2. 对如图1所示结构模拟受到环境激励 $F(t) = 150R(\Delta t)^{0.5}$ (R 为正态分布 $N(0,1)$ 的随机数向量, Δt 为时间间隔)作用, 用 Newmark 方法计算结构响应, 取 1000 个采样点, 其时间间隔为 0.02s. 用 db5 小波对结构响应和环境激励 $F(t)$ 作尺度 5 上的小波变换, 得到 6 个频段上的时程信息, 并代入式(15a). 加权矩阵 A 根据四个楼层环境激励在 6 个频段上的小波系数均方值之和的相对大小确定. 结构质量、阻尼和刚度参数的先验分布为不正常的均匀分布, 预测误差方差 σ_e^2 的先验分布为 $IG(6, 0.3)$. 结构物

理参数在噪声水平为 1%、5%和 10%三种情况下的识别结果如表 3 所示。

表 3 环境激励作用下结构物理参数识别结果

Table 3 Identification results of structural physical parameters under ambient excitation

| 物理参数 | 1%噪声 | | 5%噪声 | | 10%噪声 | |
|---------------------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|-----------------------|--------------------|------------------------|
| | 识别结果 | 误差/(%) | 识别结果 | 误差/(%) | 识别结果 | 误差/(%) |
| $m_1/$ (10^3kg) | 5.9617 (0.0153) | 0.64 (1.15) | 5.6131 (0.0507) | 6.45 (8.14) | 5.4735 (0.0816) | 8.78 (11.50) |
| $m_2/$ (10^3kg) | 4.9795 (0.0125) | 0.41 (0.91) | 4.7256 (0.0417) | 5.49 (7.16) | 4.6339 (0.0619) | 7.32 (9.80) |
| $m_3/$ (10^3kg) | 4.9922 (0.0120) | 0.16 (0.64) | 4.8204 (0.0396) | 3.59 (5.17) | 4.7007 (0.0668) | 5.99 (8.65) |
| $m_4/$ (10^3kg) | 3.9979 (0.0109) | 0.05 (0.60) | 3.8225 (0.0361) | 4.44 (6.24) | 3.7925 (0.0568) | 5.19 (8.03) |
| $c_1/$ (10^3kg/s) | 1.6179 (0.0429) | 1.12 (6.48) | 1.1627 (0.1429) | 27.33 (45.19) | 1.5380 (0.3168) | 3.88 (43.48) |
| $c_2/$ (10^3kg/s) | 1.5328 (0.0250) | 2.19 (5.52) | 1.7109 (0.1021) | 14.06 (27.67) | 1.9326 (0.1791) | 28.84 (52.73) |
| $c_3/$ (10^3kg/s) | 1.4706 (0.0314) | 1.96 (6.14) | 1.5506 (0.0892) | 3.38 (15.27) | 1.2210 (0.1412) | 18.60 (37.43) |
| $c_4/$ (10^3kg/s) | 1.4464 (0.0237) | 3.32 (6.71) | 1.4437 (0.0825) | 3.12 (14.91) | 1.0589 (0.1746) | 24.37 (49.31) |
| $k_1/$ (10^5N/m) | 1.1958 (0.0029) | 0.35 (0.83) | 1.1181 (0.0106) | 6.82 (8.59) | 1.1046 (0.0183) | 7.95 (11.00) |
| $k_2/$ (10^5N/m) | 1.0973 (0.0025) | 0.25 (0.70) | 1.0306 (0.0088) | 6.31 (7.91) | 1.0132 (0.0143) | 7.89 (10.50) |
| $k_3/$ (10^5N/m) | 1.1020 (0.0025) | 0.18 (0.64) | 1.0477 (0.0078) | 4.75 (6.18) | 1.0258 (0.0128) | 6.74 (9.07) |
| $k_4/$ (10^5N/m) | 0.9956 (0.0025) | 0.44 (0.94) | 0.9362 (0.0079) | 6.38 (7.97) | 0.9262 (0.0137) | 7.38 (10.12) |

注：识别结果中未加括号值为参数边缘分布期望值，加括号值为其标准差；误差中未加括号值为期望值与真实值的相对误差，加括号值为 95%置信区间内的值与真实值的相对误差的最大值。

由表 2 和表 3 中的标准差值以及图 4 的阻尼和刚度参数边缘分布可知，物理参数最优估计值的识别结果是可靠的。由正态分布的性质和图 5 可知，物理参数估计值落在区间 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 内的可信度为 95%，表 2 中带星号的误差值表示 k_4 的 95%置信区间 $10^5 \times (0.9903, 1.0003)$ N/m 的识别误差最大值为 0.97%。

从表 2 和表 3 中的误差项可看出：1) 低噪声干扰时，结构物理参数识别误差很小，但随着噪声水平的增加，识别误差也随之增大；2) 当噪声水平 $\leq 10\%$ 时，结构质量和刚度参数最优估计值的识别误差均小于 10%，95%置信区间内的值识别误差的最大值也几乎小于 10%，但阻尼参数对噪声的干扰很敏感；3) 由表 2 和表 3 中刚度参数最优估计值识别误差的加粗值可知：地震作用时，同一噪声水平干扰下刚度参数最优估计值识别误差的最大值是最

小值的 5 倍多，而环境激励作用时最大值与最小值很相近，这是由于地震作用时已知的质量参数具有一定的不确定性引起的。

5 结论

本文从由结构动力系统多分辨率分析建立的结构多尺度动力方程出发，推出了结构在地震作用和环境激励作用下的物理参数线性回归模型。利用记录的结构响应和激励时程数据，并应用贝叶斯估计理论和马尔可夫蒙特卡罗方法实现了结构物理参数识别，不仅得到了物理参数最优估计值，还给出了估计值的边缘概率分布，从而合理地解决了由于结构自身或外部影响使结构物理参数识别具有不确定性问题。

参考文献：

- [1] Muto M. Application of stochastic simulation methods to system identification [D]. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 2006.
- [2] Yang C M. Statistical system identification and applications to seismic response of structures [D]. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1996.
- [3] Vanik M W. A Bayesian probabilistic approach to structural health monitoring [D]. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1997.
- [4] Beck J L. Statistical system identification of structures [C]. Proceedings of the Fifth International Conference on Structural Safety and Reliability. New York: ASCE, 1989: 1395—1402.
- [5] Beck J L, Katafygiotis L S. Updating models and their uncertainties-Bayesian statistical framework [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(4): 455—461.
- [6] Ching J, Beck J L. Bayesian analysis of the phase II IASC-ASCE structural health monitoring experimental benchmark data [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(10): 1233—1244.
- [7] Ching J Y, Muto M, Beck J L. Structural model updating and health monitoring with incomplete modal data using Gibbs sampler [J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2006, 21: 242—257.
- [8] 任宜春, 易伟建. 结构物理参数的分频段加权辨识[J]. 工程力学, 2007, 24(6): 21—24, 20.
Ren Yichun, Yi Weijian. Identification of the physical parameters by frequency band weighting approach [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 24(6): 21—24, 20. (in Chinese)
- [9] Lynch S M. Introduction to applied Bayesian statistics and estimation for social scientists [M]. New York: Springer, 2007.
- [10] Yuen K V, Au S K, Beck J L. Two-stage structural health monitoring approach for phase I benchmark studies [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(1): 16—33.
- [11] Gilks W R, Richardson S, Spiegelhalter D J. Markov Chain Monte Carlo in practice [M]. London: Chapman & Hall, 1996.