

文章编号: 1000-4750(2012)11-0283-06

考虑桩-土-锤相互影响的基桩瞬态动力响应

田阿利¹, 尹晓春²

(1. 江苏科技大学船舶与海洋工程学院, 镇江 212003; 2. 南京理工大学理学院力学与工程科学系, 南京 210094)

摘 要: 考虑桩-土-锤的相互作用, 采用瞬态波特征函数展开法, 研究端承桩或嵌岩桩在打桩过程中的瞬态动力响应和次撞击现象。该文基于一维杆波动理论, 根据系统的初边值条件, 分别给出了打桩过程桩-土-锤结构的瞬态响应解和分离过程基桩的瞬态响应解。根据合理的撞击与分离过程转换条件, 实现对次撞击问题的分析。通过算例, 给出了基桩系统在打桩过程和分离过程的频率变化; 考虑撞击激发的高频响应, 分析不同模态截断项对结构响应的影响; 研究了瞬态应力波的传播特性和次撞击现象。研究结果可为基桩设计以及基桩长期运作的安全评估提供参考。

关键词: 固体力学; 瞬态响应; 波动理论; 基桩; 应力波

中图分类号: O347.4; TU473 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.05.0269

TRANSIENT DYNAMIC RESPONSE OF PILE FOUNDATION CONSIDERING THE EFFECT OF PILE-SOIL-HAMMER

TIAN A-li¹, YIN Xiao-chun²

(1. School of Naval Architecture & Ocean Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China;

2. Department of Mechanics and Engineering Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The transient wave eigenfunction method has been proposed to solve the problem of the transient dynamic response of a pile foundation with the consideration of a pile-soil-hammer interaction. Based on one-dimensional wave theory and initial-boundary conditions, analytical solutions of transient responses during impact and separation processes were obtained, respectively. The conditions of the processes that occurred alternatively were established to research on the sub-impact phenomenon. The frequencies of a pile in a numerical example were investigated during the impact process and separation process. Considering the high-frequency response excited by impact, a proper wave truncation number was suggested to choose for transient dynamic responses. Meanwhile, the propagation of transient stress waves along the pile and time history of an impact force including sub-impact process has been analyzed. The present study can provide a reference method for the pile foundation design, the selection of a hammer and the safety assessment of a system in long-term operation.

Key words: solid mechanics; transient response; wave theory; pile; stress wave

基桩基础以其承载力大、稳定性好、沉降小、能适应各种地质条件和载荷等特点, 在高层建筑、桥梁、海上平台和核电站等工程中得到广泛应用。

基桩基础主要用于承受竖向载荷, 如机器动力载荷、地震载荷、波浪反复载荷等。大多数打桩动力研究中, 重点分析基桩本身^[1-2]。随着对基桩研究的发展, 许多学者考虑了土体的影响。Zhou 等^[3]

研究了半空间饱和土中基桩受竖向载荷的瞬态动力响应。阙仁波^[4]考虑土体波动效应, 对弹性变截面桩在任意激振力作用下的纵向振动特性进行了研究。胡春林等^[5]考虑桩的非线性弹性和土体的线性粘弹性, 用多时间尺度法分析了一端固定、一端自由的基桩非线性轴向振动特性。丁科等^[6]考虑桩侧土体对基桩的阻力作用, 研究一维粘弹性基桩在

收稿日期: 2011-05-03; 修改日期: 2011-09-30

通讯作者: 田阿利(1980—), 女, 陕西蒲城人, 讲师, 博士, 从事结构动力学、应力波理论研究(E-mail: alitian991221@yahoo.com.cn).

作者简介: 尹晓春(1963—), 男, 安徽当涂人, 教授, 博士, 博导, 江苏省力学学会副理事长, 从事撞击瞬态动力学、结构动力学研究(E-mail: yinxiaochun2000@yahoo.com.cn).

瞬态激振力作用下的动态响应特性。孙昱等人将桩周围的土对桩的作用以标准线性固体模型来表示,研究了土对基桩的动力作用^[7]。文献[8]采用连续模型,分析了打桩过程中,桩-土结构的动力响应和桩中瞬态波的传播特性。

实际工程中,肉眼看来的一次简单碰撞,可能包含了多次快速的次碰撞过程^[9-10]。直到1996年,结构连续次碰撞问题才引起科学界的注意。在肉眼观察到的撞锤一次打桩过程中,可能也存在这样集簇发生的次撞击现象,影响基桩瞬态应力波的传播特性和动力响应。

本文考虑基桩周围土体和撞锤对结构的作用,研究基桩结构的瞬态波传播特性和动力响应,分析集簇发生的次撞击现象对系统动力响应的影响。通过工程实例计算,分析瞬态波在基桩中的传播过程,比较撞锤和阻尼对基桩响应频率随波数变化的影响,分析集簇发生的次撞击现象及其对结构动力响应的影响。

1 力学模型

由于桩长一般远大于桩径,可以将桩体简化为一维问题进行研究(桩长大于5倍~10倍的桩径)。本文将端承基桩视为材料均匀的一维弹性杆,将桩侧土体与桩之间的相互作用处理为与速度有关的阻尼器以平行的方式耦合。打桩过程中,撞锤与基桩接触形成桩-锤系统,考虑撞锤对基桩瞬态响应的影响,建立桩-土-锤系统动力控制方程。为简化计算,将撞锤也视为材料均匀的一维短杆,因此,撞锤打击基桩的力学模型,可简化为考虑阻尼效应的短杆(撞锤)打击弹性杆(基桩)系统,如图1所示。短

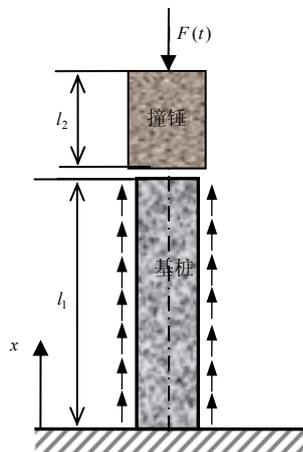


图1 考虑阻尼效应的桩-锤系统

Fig.1 Illustration of hammer impact against pile considering the damping effect

杆2(撞锤)在外部激励 $F(t)$ 作用下,以初始速度 v_0 撞击一端固支弹性杆1(基桩)。模型的力学参数分别为:弹性模量 E_1 、 E_2 ,密度 ρ_1 、 ρ_2 ,横截面积 A_1 、 A_2 ,轴向长 l_1 、 l_2 ,粘性阻尼系数为 f 。

利用 St.Venant 杆理论,不计体力时,得到撞锤与基桩杆的波动方程为:

$$\ddot{\mathbf{u}} + f\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{C}^2 \mathbf{u}'' \tag{1}$$

式中: $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$; c_1 、 c_2 分别为撞锤和基桩的

无旋波速; $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$ 为撞锤和基桩的位移列向量; $\ddot{\mathbf{u}}$ 、 \mathbf{u}'' 分别表示对时间和物理坐标的二阶偏导数。首次打击接触时刻, $t = 0$ 。

在打桩过程中,端承桩-锤系统边界条件为:

$$u_1(0,t) = 0, \sigma_2(l_2,t) = -F(t)/A_2 \tag{2a}$$

撞击接触界面处,满足位移和力连续性条件:

$$A_1\sigma_1(l_1,t) = A_2\sigma_2(0,t), u_1(l_1,t) = u_2(0,t) \tag{2b}$$

打桩过程中特征频率为桩-锤系统固有频率,满足超越频率方程:

$$A_1E_1c_2 \cos(k_{1n}l_1) \cos(k_{2n}l_2) = A_2E_2c_1 \sin(k_{1n}l_1) \sin(k_{2n}l_2) \\ k_{in} = \omega_n / c_i, \quad i = 1,2 \tag{3}$$

分离过程,撞锤与基桩相互独立,边界条件为:

$$u_1(0,t) = 0, \sigma_1(l_1,t) = 0, \\ \sigma_2(0,t) = 0, \sigma_2(l_2,t) = -F(t)/A_2 \tag{4}$$

由边界条件式(4)得到基桩固有频率:

$$\omega_m = k_{1m}c_1 = (2m+1)\pi c_1 / l_1 \tag{5}$$

在频率方程式(3)和式(5)中, k_{1n} 、 k_{1m} 分别为打桩过程和分离过程中基桩振动对应频率的波数。

2 瞬态响应解

采用瞬态波函数特征值展开法求解偏微分方程式(1),位移流场 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ 是时间和空间的函数,分为准静态解 $\mathbf{u}_s(\mathbf{x},t)$ 和动态解 $\mathbf{u}_d(\mathbf{x},t)$ 两部分:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_s(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}_d(\mathbf{x},t) \tag{6}$$

位移解满足桩-锤控制方程,真实的边界条件、界面连续条件和初始条件。一次打桩过程结束后,桩锤分离,在外力(激励载荷或重力)影响下,发生后续冲击。由于应力波的持续效应,一次打桩结束后的基桩中的瞬态应力波,对后续响应会产生显著影响。

2.1 撞击过程动态位移解

2.1.1 波模态函数

撞击过程中,两杆接触,形成桩-锤系统以共同的特征频率振动,动态位移解可采用特征函数展

开为:

$$u_{id}(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{in}(x_i) q_n(t^*) \quad (7)$$

式中: $i=1, 2$; $t^* = t - t_{2m}$ 为第 m 次撞击过程的过程时间变量; t_{2m} 为第 m 次撞击开始时刻。根据波动控制方程, 计算得到特征值问题的波模态函数满足:

$$c_i^2 d^2 \phi_i(x_i) / dx_i^2 + \omega_n^2 \phi_i(x_i) = 0 \quad (8)$$

其通解为:

$$\phi_{in}(x_i) = A_{in} \cos(k_{in} x_i) + B_{in} \sin(k_{in} x_i) \quad (9)$$

式中, A_{in} 、 B_{in} 可通过齐次边界条件和正交化条件:

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \phi_{in} \cdot \phi_{im} \rho_i A_i dx_i = \delta_{mn} \quad (10)$$

计算得到, 式中, δ_{mn} 为 Kronecker 函数。

2.1.2 时间函数

将准静态位移解与动态位移解代入波动控制方程(1), 利用正交归一化条件得到撞击过程的时间函数方程:

$$\ddot{q}_n(t^*) + f \dot{q}_n(t^*) + \omega_n^2 q_n(t^*) = d^2 Q_n(t) / dt^2 + f d Q_n(t) / dt \quad (11)$$

式中, $Q_n(t) = -\sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \rho_i A_i \phi_{in}(x_i) \cdot u_{is}(x_i, t) dx_i$, 通过 Laplace 变换求解得:

$$q_n(t^*) = q_n(0) \cdot J(\omega, t^*) + \dot{q}_n(0) \cdot I(\omega, t^*) + e^{-\alpha t_{2m}} b_{1n} A_n D_n(\omega, t^*) \quad (12)$$

其中:

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 - f^2 / 4},$$

$$D_n(\omega, t^*) = \frac{F_0 \alpha (\alpha - f)}{\omega_n^2 + \alpha (\alpha - f)} \left[e^{-\alpha t^*} - e^{-f t^* / 2} \cos(\omega \cdot t^*) + \frac{2\alpha - f}{2\omega} e^{-f t^* / 2} \sin(\omega \cdot t^*) \right],$$

$$J(\omega, t^*) = e^{-f t^* / 2} \cos(\omega t^*) + f \sin(\omega t^*) / (2\omega),$$

$$I(\omega, t^*) = e^{-f t^* / 2} \sin(\omega t^*) / \omega,$$

$$b_{1n} = 1 / \sqrt{\frac{(\rho A l)_1}{2} + \frac{(\rho A l)_2}{2} \frac{\sin^2 k_{1n} l_1}{\cos^2 k_{2n} l_2}},$$

$$A_n = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{\sin(k_{1n} l_1)}{\cos(k_{2n} l_2)},$$

$q_n(0)$ 、 $\dot{q}_n(0)$ 可通过初始条件确定。

重复打桩过程的一个特点, 是打桩过程和分离过程不断交替出现, 从而造成了各打桩接触与分离

过程的初始条件不断变化。打桩过程的初始位移、速度分布, 为前一次分离过程结束时的位移和速度状态。分离过程的初始位移、速度分布, 为前一次打桩过程结束时的位移和速度状态。因此, 第 m 次打桩过程初始条件为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{2m}^+) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{2m}^-), \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{2m}^+) &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{2m}^-) \end{aligned} \quad (13)$$

式中: m 标志第 m 次打桩过程; $2m$ 标志打桩与分离总次数。初始时刻 ($m=0$),

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = [0, v_0]^T \quad (14)$$

2.2 分离过程动态位移解

2.2.1 波模态函数

分离过程, 杆 1 和杆 2 分离, 以各自固有的特征频率作动态响应。两杆的动态位移分别可表示为:

$$u_{1d}(x_1, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{1m}(x_1) q_{1m}(t^*) \quad (15)$$

$$u_{2d}(x_2, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{2m}(x_2) q_{2m}(t^*) \quad (16)$$

其中: $t^* = t - t_{2m+1}$ 为分离过程的过程时间变量; t_{2m+1} 为分离过程开始时刻。将动态位移解代入波动控制方程, 由变量分离方法和正交归一化条件, 计算得到两杆各自独立的波模态函数解分别为:

$$\begin{cases} \phi_{1m}(x_1) = \sqrt{2/l_1} \sin(k_{1m} x_1) \\ \phi_{2m}(x_2) = \sqrt{2/l_2} \cos(k_{2m} x_2) \end{cases} \quad (17)$$

式中, k_{1m} 和 k_{2m} 为分离过程中杆 1 和杆 2 的波数。

2.2.2 时间函数

将分离过程的准静态位移解和动态位移解代入控制方程, 利用正交归一化条件得到分离过程杆 1 的时间方程为:

$$\ddot{q}_{1m}(t^*) + f \dot{q}_{1m}(t^*) + \omega_{1m}^2 q_{1m}(t^*) = 0 \quad (18)$$

Laplace 变换解得:

$$q_{1m}(t^*) = J(\omega_1, t^*) q_{1m}(0) + I(\omega_1, t^*) \dot{q}_{1m}(0) \quad (19)$$

其中: $\omega_1 = \sqrt{\omega_{1m}^2 - f^2 / 4}$,

$$J(\omega_1, t^*) = e^{-f t^* / 2} (\cos(\omega_1 t^*) + f \sin(\omega_1 t^*) / (2\omega_1)),$$

$$I(\omega_1, t^*) = e^{-f t^* / 2} \sin(\omega_1 t^*) / \omega_1.$$

杆 2 的时间方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{2m}(t^*) + f \dot{q}_{2m}(t^*) + \omega_{2m}^2 q_{2m}(t^*) = \\ \int_0^{l_2} \psi_{2m}(x_2) (c_2^2 u_{2s}'' - \ddot{u}_{2s} - f \dot{u}) dx_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Laplace 变换解得:

$$q_{2m}(t^*) = J(\omega_2, t^*)q_{2m}(0) + I(\omega_2, t^*)\dot{q}_{2m}(0) + (-1)^m H_{2m} e^{-\alpha t_{2m+1}} D_m(\omega_2, t^*) \quad (21)$$

其中: $\omega_2 = \sqrt{\omega_{2m}^2 - f^2/4}$,

$$J(\omega_2, t^*) = e^{-ft^*/2} (\cos(\omega_2 t^*) + f \sin(\omega_2 t^*) / (2\omega_2)),$$

$$I(\omega_2, t^*) = e^{-ft^*/2} \sin(\omega_2 t^*) / \omega_2,$$

$$D_m(\omega_2, t^*) = F \left(e^{-\alpha t^*} - e^{-ft^*/2} \cdot \cos(\omega_2 t^*) + \frac{2\alpha - f}{2\omega_2} e^{-ft^*/2} \cdot \sin(\omega_2 t^*) \right),$$

$$H_{2m} = \frac{\alpha_{2m}}{K_{2m}^2 E_2 A_2}, \quad F = \frac{F_0 \cdot \alpha(\alpha - f)}{\omega_{2m}^2 + \alpha(\alpha - f)}.$$

$q_{1m}(0)$ 、 $\dot{q}_{1m}(0)$ 、 $q_{2m}(0)$ 及 $\dot{q}_{2m}(0)$ 分别由各杆的分离过程初始条件确定:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{2m+1}^+) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{2m+1}^-), \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{2m+1}^+) &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{2m+1}^-) \end{aligned} \quad (22)$$

2.3 过程转换条件

重复撞击问题中, 撞击过程与分离过程交替出现时, 过程切换条件, 是分析重复撞击问题的一个重点。

两杆由撞击过程进入分离过程, 通过两杆接触界面力 $p(t)$ 的变化确定。当接触力由压力变为拉力时, 认为两杆撞击过程结束, 进入分离阶段。分离条件为:

$$p(t) \leq 0, \quad dp(t) / dt \leq 0 \quad (23)$$

两杆由分离过程进入撞击过程, 通过两杆碰撞接触面的相对位移确定。当杆 2 左端面的位移等于或小于杆 1 自由端面的位移时, 两杆分离过程结束, 进入撞击阶段。撞击条件为:

$$\begin{aligned} \Delta U &= u_2(0, t_{2m}) - u_1(l_1, t_{2m}) \leq 0, \\ \partial \Delta U / \partial t &\geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

通过瞬态波函数效应法准确计算重复撞击力^[11-12], 避免求解撞击力与运动耦合的强非线性方程。

3 算例与分析

考虑基桩周边土体的影响, 以钢质圆截面短杆 (参数为: $\rho_2 = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E_2 = 210 \text{ GPa}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$, $d_2 = 0.5 \text{ m}$) 重复打击基桩的工程实际问题为例, 进行计算分析。基桩参数: $\rho_1 = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E_1 = 30.7 \text{ GPa}$, $l_1 = 5 \text{ m}$, $d_1 = 0.5 \text{ m}$; 撞锤打击初始速度 $v_0 = 4.2$; 阻尼系数为粘土在自然状态下的值: 0.620; 引入无量纲时

间参数 $\tau = t c_1 / l_1$ 。

图 2 给出了打桩过程和基桩自由过程的频散曲线。从图 2 中可以看出, 分离过程的频散曲线斜率为应力波基桩中传播的轴向速度, 而打桩过程, 由于撞锤、阻尼效应的影响, 当无量纲波数小于 15 时, 基桩响应频率大于自由基桩频率。随着波数的增加, 受迫基桩频率发生漂移, 逐渐小于自由基桩频率。打桩瞬态过程, 是撞锤打击基桩, 激发基桩高频响应, 且撞锤也参与其中, 影响基桩响应频率。

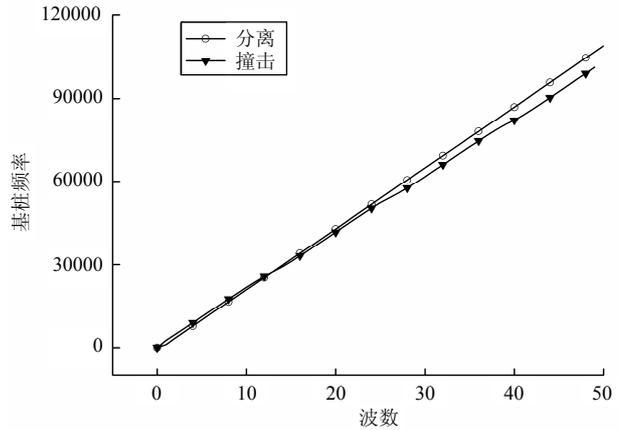


图 2 频散曲线

Fig.2 Dispersion curves

理论上, 弹性体的模态项应为无穷, 但在实际数值计算过程中, 不可避免的需要选取一定的模态截断项进行分析, 而忽略无穷高阶项的弱小影响。但强间断载荷(如撞击、分离)会激发弹性结构的高阶响应, 不同于稳态问题的主模态分析, 这也是撞击瞬态问题的特点之一。图 3 给出了 $t = 0.5\tau$ 时刻, 不同模态下基桩中的动能分布。如仅考虑基桩的低阶模态(前 5 阶), 基桩中动能呈现类正余弦曲线,

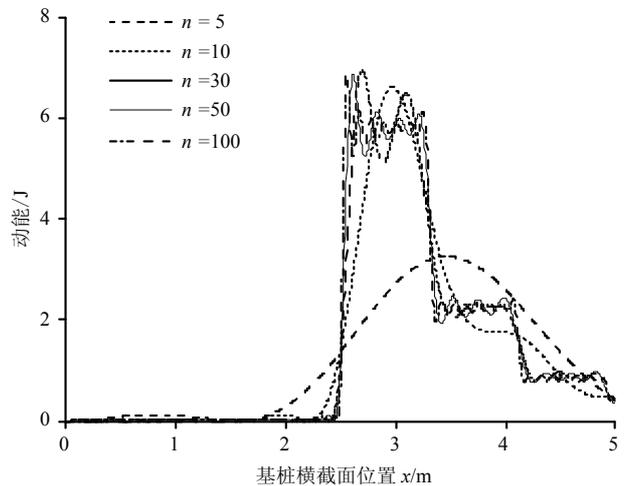


图 3 不同模态下基桩能量分布(0.5\tau)

Fig.3 Energy distribution along the pile with different modes

能量幅值较小。随着模态截断项的增加, 计算结果精度越高, 越趋近理论计算结果。但更高阶的模态选取, 需要更多的计算时间, 而对结果影响逐渐减小, 直至微弱, 即超高阶模态对结构瞬态响应影响非常微小, 可以忽略。通过比较计算, 选取前 100 阶模态, 进行瞬态响应分析较为合理。

弹性基桩在撞锤打击下, 产生强间断的瞬态应力波, 沿基桩轴向传播。图 4 给出了撞击过程中, 应力波在基桩中的传播过程。 $t = 0.8\tau$ 时, 波前从撞击接触面传播至基桩 4/5 处, 并沿轴向向固支端传播。被扰动区内的阶跃变化, 由撞锤中瞬态波传播到撞击接触面时产生的消减效应引起。当 $t = 1.0\tau$ 时, 应力波波前到达基桩端面。应力波在边界处发生反射, 产生向右传播的反射波, 与左行波叠加。打桩过程结束时, 撞锤与基桩分离, 产生强间断卸载波。强间断卸载波与基桩中撞击过程中的残余波发生内撞击, 激发新生波传播, 并在自由端面和固定端面处反射。由于应力波在弹性体中传播的持续性, 对结构的后续响应和长期动力学行为, 均产生显著影响, 甚至会造成系统复杂的非线性行为。

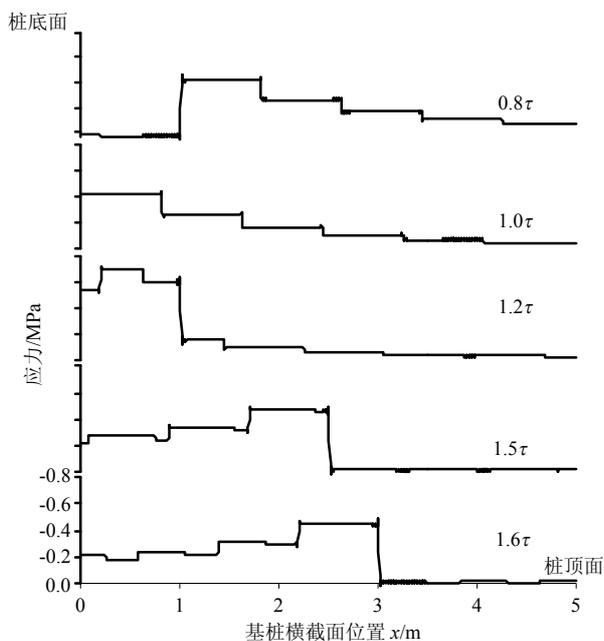


图 4 应力波传播

Fig.4 Propagation of the stress wave along the pile

撞击力是撞击问题中一个重要的参量, 撞击力的变化和强度, 对结构安全设计十分重要。图 5 给出了单次打桩过程撞击力时间历程。一次撞击过程十分短暂, 约为瞬态波在基桩中传播 3 次所需的时间。但在此过程中, 瞬态波发生了多次反射、透射和波的叠加、消减以及内撞击的应力波效应。从图 5

中可以看出, 单次撞击过程中, 存在撞击力消减趋于零的过程。观察撞击力为零时, 桩-锤接触面位移连续, 即两杆并没有分离, 此现象为“掠撞击”。当 $t = 2.0\tau$ 时, 即基桩中反射波波前到达撞击接触面时, 撞击力发生阶跃, 约为 271kN, 大于首次撞击力幅值(166kN)。

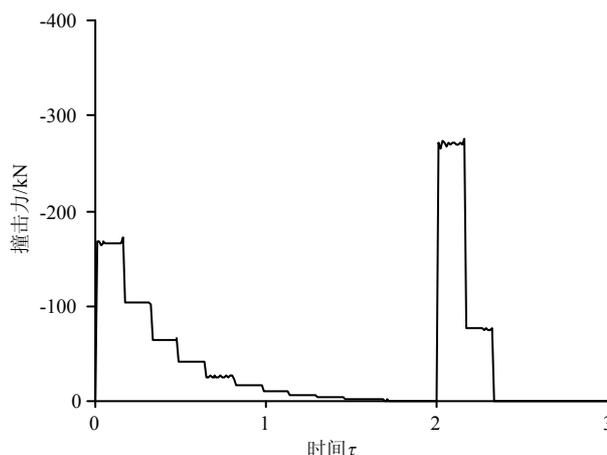


图 5 单次撞击力

Fig.5 Single impact force

通过计算, 在肉眼看到的一次打桩过程中, 确实存在集簇发生的次撞击过程。图 6 给出了打桩过程中撞锤与基桩之间的撞击力时间历程。从图 6 中一次撞击过程的撞击力放大图中可以看出, 一次撞击过程, 实际集簇发生了三次撞击。次撞击现象的发生, 使得结构中的瞬态波传播更加复杂, 从而影响结构的后续动力响应, 尤其是在高频振动打桩问题中, 影响会更突出。

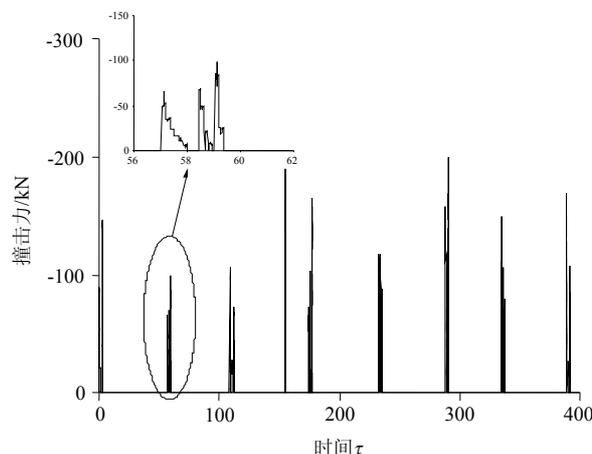


图 6 撞击力时间历程

Fig.6 Multiple-impact force

4 结论

本文考虑打桩过程中撞锤对基桩瞬态响应的

影响,给出了考虑基桩周围土体阻尼效应的基桩瞬态动力响应解。分别给出了撞锤与基桩打击接触过程和分离过程的瞬态响应解,实现对次撞击现象的分析。通过算例计算,分析了基桩瞬态动力响应、基桩中瞬态波的持续传播特性以及集簇发生的次撞击现象。主要结论包括:

(1) 基桩动测法的分析基础之一,是打桩产生的强间断波沿基桩的轴向传播特性。由于瞬态应力波受边界效应的影响和应力波传播的延续性,使得基桩的动力响应随时间的变化趋于复杂。

(2) 打桩会激发基桩高阶瞬态响应。研究基桩瞬态动力响应问题,不能随意忽略模态高阶项的影响。通过计算,模态截断项选取越高,计算精度越好,但耗时越长。本文通过一系列计算比较,建议选择前 100 阶模态,进行瞬态动力响应分析。

(3) 次撞击现象的发生,使得基桩中的应力波传播更加复杂,从而影响结构后续动力响应。

参考文献:

- [1] Erol H, Gürgöze M. Longitudinal vibrations of a double-rod system coupled by springs and dampers [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 276: 419—430.
- [2] 王奎华. 基桩波动方程达朗贝尔解法精度研究[J]. *岩土工程学报*, 1999, 21(5): 617—620.
Wang Kuihua. A study on the accuracy of D'Alembert solution to pile wave equation [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1999, 21(5): 617—620. (in Chinese)
- [3] Zhou X L, Wang J H, Jiang L F, et al. Transient dynamic response of pile to vertical load in saturated soil [J]. *Mechanics Research Communications*, 2009, 36: 618—624.
- [4] 阙仁波, 王奎华, 许瑞萍. 粘性阻尼土中变截面桩的纵向振动特性与应用研究[J]. *计算力学学报*, 2008, 25(6): 808—815.
Que Renbo, Wang Kuihua, Xu Ruiping. Study on longitudinal vibration of pile with variable sections in the viscous damping soil and its applications [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, 25(6): 808—815. (in Chinese)
- [5] 胡春林, 熊伟芬, 胡胜刚. 桩基非线性轴向受迫振动稳态幅频响应分析[J]. *工程力学*, 2010, 27(1): 173—178.
Hu Chunlin, Xiong Weifen, Hu Shenggang. Study on steady-state frequency-response of nonlinear axial forced vibration of piles [J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(1): 173—178. (in Chinese)
- [6] 丁科, 陈自力, 谢忠球. 粘弹性基桩瞬态动测响应研究[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(7): 114—118.
Ding Ke, Chen Zili, Xie Zhongqiu. Study on transient response test of a viscoelastic pile [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(7): 114—118. (in Chinese)
- [7] 孙昱, 王奎华, 谢康和. 标准线性固体土模型条件下桩的动力响应分析与应用[J]. *计算力学学报*, 2004, 21(3): 330—337.
Sun Yu, Wang Kuihua, Xie Kanghe. Vibration of pile with normal linear solid shape and its application [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, 21(3): 330—337. (in Chinese)
- [8] Masouleh S F, Fakharian K. Application of a continuum numerical model for pile driving analysis and comparison with a real case [J]. *Computers and Geotechnics*, 2008, 35: 406—418.
- [9] Mason H L. Impact on beams [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1936, 58: A55—A61.
- [10] Stoianovici D, Hurmuzlu Y. A critical study of the applicability of rigid-body collision theory [J]. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1996, 63: 307—316.
- [11] 田阿利, 尹晓春. 柔性杆多次撞击过程的瞬态动力学分析[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(2): 43—48.
Tian Ali, Yin Xiaochun. Transient dynamics analysis for multiple-impact of flexible-rods [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(2): 43—48. (in Chinese)
- [12] 田阿利, 尹晓春. 柔性构件多次撞击力的计算方法[J]. *工程力学*, 2008, 25(1): 103—108.
Tian Ali, Yin Xiaochun. Computing method for impact force in multiple-impact flexible system [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(1): 103—108. (in Chinese)