

文章编号: 1000-4750(2012)05-0213-06

基于非局部弹性理论的 充液双壁碳纳米管振动特性分析

杨智春, 邓庆田

(西北工业大学航空学院, 陕西, 西安 710072)

摘 要: 基于非局部弹性理论和 Flugge 壳理论, 建立了充液双壁碳纳米管振动方程, 计算了简支边界条件下碳纳米管的振动固有频率。用数值计算方法, 分析了波数、几何参数和材料参数对振动频率的影响, 并对比了局部和非局部弹性理论对结果的影响。结果表明, 随着碳纳米管长度和半径的增大, 振动频率逐渐减小; 且随着小尺度参数的增大, 频率也呈下降趋势。

关键词: 双壁碳纳米管; 充液; 非局部弹性理论; 小尺度效应; 振动

中图分类号: O347.4 **文献标志码:** A

NONLOCAL ELASTIC THEORY FOR VIBRATION OF FLUID-FILLED DOUBLE-WALLED CARBON NANOTUBES

YANG Zhi-chun, DENG Qing-tian

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract: The vibration characteristics of fluid-filled double-walled carbon nanotubes are investigated and vibrational equations are established based on the nonlocal elastic theory and Flugge shell theory in this paper. By considering simple supported boundary conditions, the fundamental frequency of carbon nanotubes is obtained. In the numerical calculation, the effects of wave numbers, geometric and material parameters on vibration frequency are analyzed, while effects of local and nonlocal elastic theories are also discussed. The results showed that the frequency decreased with the increase of the diameter, the length of nanotubes and the value of small scaling parameters.

Key words: double-walled carbon nanotubes; fluid-filled; nonlocal elastic theory; small-scale effect; vibration

碳纳米管因其优异的力学性能已经成为目前众多学者关注的焦点之一。对碳纳米管进行理论研究的方法主要集中在连续介质模型、多尺度模型和原子模型。经典连续介质模型能够用较简单的公式有效地分析碳纳米管的力学性能, 因此被大多数学者采纳, 但其对碳纳米管力学行为中小尺度效应的判别能力却值得商榷。经典和局部连续介质模型在小尺度问题分析中的局限性的原因之一在于经典模型认为本征尺寸并不依赖于夹杂和不均匀介质

的弹性解。而非局部弹性连续介质模型在分析大尺度纳米材料问题时能够将尺度效应考虑其中。纳米尺度水平时一般会有比较显著的尺寸效应, 对这些效应的分析在纳米技术领域也逐渐引起人们的关注。

Xie 等^[1]应用非局部弹性理论, 对碳纳米管振动特性和波动特性进行了分析, 讨论了小尺寸效应的影响。Narendar 和 Gopalakrishnan^[2]基于非局部 Timoshenko 梁模型, 讨论了太赫兹波在充液单壁碳

收稿日期: 2010-07-26; 修改日期: 2011-02-26

基金项目: 高等学校学科创新引智计划项目(B07050)

通讯作者: 杨智春(1964—), 男, 四川广安人, 教授, 博士, 从事气动弹性力学、智能结构、振动控制及结构健康监测等研究

(E-mail: yangzc@nwpu.edu.cn).

作者简介: 邓庆田(1980—), 男, 陕西礼泉人, 博士后, 从事弹性动力学和结构健康监测研究(E-mail: dengqt@chd.edu.cn).

纳米管中传播时非局部尺度参数的影响。He 等^[3-4]将多壁碳纳米管中每层纳米管用连续圆柱壳模型进行描述, 推导了多壁碳纳米管相邻壁间 van der Waals (vdW) 接触力的显式计算公式, 以及尺度效应对 vdW 接触力的影响。Hu 等^[5]基于非局部壳模型分析了横波和扭转波在单壁和双壁碳纳米管中的传播, 讨论了碳纳米管微结构对波频散关系的影响。Reddy 等^[6]讨论了充液单壁碳纳米管自由振动和不稳定性问题中液体对振动频率和基础模态振型的影响。Chang 和 Lee^[7]基于 Timoshenko 梁模型, 在考虑转动惯量和横向剪切效应时分析了充液单壁碳纳米管弯曲振动问题并讨论了液体速度和管长与直径比对振动频率和模态振型的影响。Yan 等^[8]基于圆柱壳模型和势流理论分析了筒支充液多壁碳纳米管的非共轴振动问题, 讨论了纳米管流体耦合系统中内部流体效应。

本文在 Flügge 圆柱壳理论的基础上, 结合非局部弹性理论, 对充液双壁碳纳米管的振动特性进行了分析, 讨论了尺度效应以及碳纳米管几何参数和材料参数对振动频率的影响。

1 非局部弹性理论

Eringen^[9]在其非局部弹性理论中认为, 弹性体内某一参考点处的应力状态不仅与该点处的应变状态有关, 而且与弹性体内每个点处的应变状态也相关, 这种描述与点阵动力学中的原子理论以及实验中观察到的声子频散现象相符合。

$$\sigma_{kj,j} = 0,$$

$$\sigma_{kj}(x) = \int_V \alpha(|x-x'|, \xi) C_{kjil} \varepsilon_{il}(x') dV(x'), \forall x \in V,$$

$$\varepsilon_{kj} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{k,j} + \mathbf{u}_{j,k}). \quad (1)$$

其中: σ_{kj} 和 ε_{kj} 为应力张量和应变张量; C_{kjil} 为传统各向同性弹性体的弹性模量张量; \mathbf{u}_k 为位移矢量; $\alpha(|x-x'|, \xi)$ 为非局部模量或本构方程中因非局部效应引入的衰减函数; $|x-x'|$ 为欧几里得距离, 且 $\xi = e_0 a / l$, a 为内部长度参数, l 为外部长度参数, e_0 为非局部弹性理论中重要的小尺度参数。

对于均匀各向同性弹性体, 非局部弹性理论表述的本构方程为:

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

其中: \mathbf{C}_0 为传统各向同性弹性体的弹性刚度矩阵; $\boldsymbol{\sigma}$ 为 x 点处的非局部应力张量; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为弹性体任意点 x' 处的应变张量。

2 充液双壁碳纳米管振动模型

将 Flügge 壳理论引入到非局部弹性圆柱壳理论, 可得到充液双壁碳纳米管的振动控制方程为:

$$\begin{aligned} R_k^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial \theta^2} + \frac{R_k}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k}{\partial x \partial \theta} - \\ \nu R_k \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial x} + (1-\nu^2) \frac{D}{EhR_k^2} \left(\frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. R_k^3 \frac{\partial^3 \mathbf{w}_k}{\partial x^3} - \frac{R_k}{2}(1-\nu) \frac{\partial^3 \mathbf{w}_k}{\partial x \partial \theta^2} \right) = \\ \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_k^2 (1 - (e_0 a)^2 \nabla_k^2) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_k}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial x \partial \theta} + \frac{R_k^2}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \theta} + \\ (1-\nu^2) \frac{D}{Eh} \left(\frac{3}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(3-\nu) \frac{\partial^3 \mathbf{w}_k}{\partial x^2 \partial \theta} \right) = \\ \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_k^2 (1 - (e_0 a)^2 \nabla_k^2) \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \nu R_k \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \theta} - \mathbf{w}_k - (1-\nu^2) \frac{D}{EhR_k^2} \left(R_k^4 \nabla_k^2 \nabla_k^2 \mathbf{w}_k + \right. \\ \left. R_k^3 \frac{\partial^3 \mathbf{u}_k}{\partial x^3} - \frac{R_k}{2}(1-\nu) \frac{\partial^3 \mathbf{u}_k}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{R_k^2}{2}(3-\nu) \frac{\partial^3 \mathbf{v}_k}{\partial x^2 \partial \theta} + \right. \\ \left. \mathbf{w}_k + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{w}_k}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_k^2 \cdot \\ (1 - (e_0 a)^2 \nabla_k^2) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}_k}{\partial t^2} \rho h - F_k \right) \end{aligned} \quad (3c)$$

其中: \mathbf{u}_k 、 \mathbf{v}_k 、 \mathbf{w}_k 为第 k 层碳纳米管在轴向 x 、环向 θ 和径向 r 的位移分量; R_k 为第 k 层碳纳米管的半径; h 为管壁厚度; D 为纳米管的弯曲刚度; E 为弹性模量; ρ 为纳米管的质量密度; ν 为泊松比; $a = 1.42 \text{ \AA}$ 为碳-碳键的长度。

本文考虑双壁碳纳米管, 如图 1 所示, 取 $k=1, 2$ 。式(3)中的算子 $\nabla_k^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / (R_k^2 \partial \theta^2)$ 。 F_k 为作用于第 k 层碳纳米管的径向压力。对于内层纳米管 ($k=1$):

$$F_1 = p_1 + f \quad (4)$$

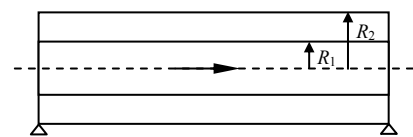


图 1 充液双壁碳纳米管模型

Fig.1 Model of fluid-filled double-walled carbon nanotube
其中: p_1 是作用于第 1 层和第 2 层纳米管之间的

van der Waals (vdW)力; f 为流体压力^[10]:

$$p_1 = c_{12}(w_1 - w_2) \quad (5)$$

$$f = \rho_f \frac{L}{m\pi} \frac{I_n \left(\frac{m\pi}{L} R_1 \right)}{I'_n \left(\frac{m\pi}{L} R_1 \right)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad (6)$$

其中: c_{12} 为第 1 层和第 2 层纳米管的 vdW 接触系数; ρ_f 为流体的质量密度; L 为纳米管的长度; I_n 为一阶修正 Bessel 函数。

对于外层纳米管, 即第 2 层 ($k=2$), 仅存在第 1 层纳米管作用的 vdW 力 p_2 :

$$F_2 = p_2 \quad (7)$$

$$p_2 = -\frac{R_1}{R_2} c_{12}(w_1 - w_2) \quad (8)$$

接触系数 c_{12} 为^[5]:

$$c_{12} = -\left[\frac{1001\pi\epsilon\sigma^{12}}{3a^4} E_{12}^{13} - \frac{1120\pi\epsilon\sigma^6}{9a^4} E_{12}^7 \right] R_2 \quad (9)$$

其中:

$$E_{12}^m = (R_1 + R_2)^{-m} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - K_{12} \cos^2 \theta]^{m/2}} \quad (10)$$

$$\left[-R_k^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \frac{1}{2}(1-\nu)n^2 - \frac{D}{EhR_k^2} \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2} n^2 + \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_k^2 \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_k^2} \right) \right) \omega^2 \right] A_{1k} + \left[\frac{R_k}{2} (1+\nu) \frac{m\pi}{L} n \right] A_{2k} + \left[-\nu R_k \frac{m\pi}{L} - \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_k \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2R_k} \frac{D}{Eh} \frac{m\pi}{L} n^2 \right] A_{3k} = 0 \quad (14a)$$

$$\left[\frac{R_k}{2} (1+\nu) \frac{m\pi}{L} n \right] A_{1k} + \left[-\frac{R_k^2}{2} (1-\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - n^2 - \frac{D}{Eh} \frac{3(1-\nu^2)(1-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_k^2 \cdot \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_k^2} \right) \right) \omega^2 \right] A_{2k} + \left[n + \frac{D}{Eh} \frac{(1-\nu^2)(3-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n \right] A_{3k} = 0 \quad (14b)$$

$$\left[-\nu R_1 \frac{m\pi}{L} - \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_1 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \frac{D}{Eh} \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2R_1} \frac{m\pi}{L} n^2 \right] A_{11} + \left[n + \frac{D}{Eh} \frac{(1-\nu^2)(3-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n \right] A_{21} \cdot$$

$$\left[\left(-1 - \left(\frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_1^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + 2 \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n^2 + \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_1^2} n^4 + \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_1^2} - 2 \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_1^2} n^2 \right) \right) \right] +$$

$$\frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_1^2 \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right) \right) \left(\omega^2 \left(\rho h + \rho_f \frac{L}{m\pi} \frac{I_n \left(\frac{m\pi}{L} R_1 \right)}{I'_n \left(\frac{m\pi}{L} R_1 \right)} \right) + c_{12} \right) A_{31} -$$

$$\left[\frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_1^2 \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right) \right) c_{12} \right] A_{32} = 0, \quad k=1 \quad (14c')$$

$$K_{12} = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (11)$$

这里 $\sigma = 3.407 \text{ \AA}$ 和 $\epsilon = 2.968 \text{ meV}$ 分别为 Lennard-Jones 势能中的 vdW 半径和壁厚(depth of the potential well)。

考虑简支碳纳米管, 满足:

$$w_k(0) = \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}(0) = w_k(L) = \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}(L) = v_k(0) = v_k(L) \quad (12)$$

则满足简支条件的双壁碳纳米管振动解可以表达为:

$$\begin{aligned} u_k &= A_{1k} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t}, \\ v_k &= A_{2k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) e^{i\omega t}, \\ w_k &= A_{3k} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中: A_{1k} 、 A_{2k} 、 A_{3k} 为第 k 层纳米管的振幅; $m=1,2,\mathbf{L}$ 为轴向半波波数; $n=0,1,2,\mathbf{L}$ 为环向波数; ω 为固有振动频率。

将振动解表达式代入控制方程, 得到:

$$\begin{aligned}
& \left[-\nu R_2 \frac{m\pi}{L} - \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \frac{D(1-\nu^2)(1-\nu)}{Eh} \frac{m\pi}{2R_2} \frac{n^2}{L} \right] A_{12} + \left[n + \frac{D(1-\nu^2)(3-\nu)}{Eh} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n \right] A_{22} \cdot \\
& \left[\left(-1 - \left(\frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + 2 \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n^2 + \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_2^2} n^4 + \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_2^2} - 2 \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_2^2} n^2 \right) \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_2^2 \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_2^2} \right) \right) \left(\omega^2 \rho h - \frac{R_1}{R_2} c_{12} \right) \right] A_{32} + \\
& \left[\frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_2^2 \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_2^2} \right) \right) \frac{R_1}{R_2} c_{12} \right] A_{31} = 0, \quad k=2 \quad (14c'')
\end{aligned}$$

将式(14)写成矩阵形式, 得:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

式(15)中系数 a_{ij} ($i=1, \mathbf{L}, 6; j=1, \mathbf{L}, 6$) 的具体表达式可由式(14)得到, 系数矩阵为波数 m 、波数 n 、频率 ω 、小尺度参数 e_0 的函数。

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -R_1^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \frac{1}{2} (1-\nu) n^2 - \frac{D}{EhR_1^2} \cdot \\
& \quad \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2} n^2 + \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_1^2 \cdot \\
& \quad \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right) \right) \omega^2, \\
a_{12} &= \frac{R_1}{2} (1+\nu) \frac{m\pi}{L} n, \\
a_{13} &= -\nu R_1 \frac{m\pi}{L} - \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_1 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \\
& \quad \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2R_1} \frac{D}{Eh} \frac{m\pi}{L} n^2, \\
a_{21} &= \frac{R_1}{2} (1+\nu) \frac{m\pi}{L} n, \\
a_{22} &= -\frac{R_1^2}{2} (1-\nu) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - n^2 - \\
& \quad \frac{D}{Eh} \frac{3(1-\nu^2)(1-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_1^2 \cdot \\
& \quad \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right) \right) \omega^2, \\
a_{23} &= n + \frac{D(1-\nu^2)(3-\nu)}{Eh} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= -\nu R_1 \frac{m\pi}{L} - \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_1 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 + \\
& \quad \frac{D(1-\nu^2)(1-\nu)}{Eh} \frac{m\pi}{2R_1} \frac{n^2}{L}, \\
a_{32} &= n + \frac{D(1-\nu^2)(3-\nu)}{Eh} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n, \\
a_{33} &= \left(-1 - \left(\frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_1^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + 2 \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} \cdot \right. \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 n^2 + \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_1^2} n^4 + \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_1^2} - \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \frac{D(1-\nu^2)}{EhR_1^2} n^2 \right) \right) + \frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_1^2 \cdot \\
& \quad \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right) \right) \cdot \\
& \quad \left(\omega^2 \left(\rho h + \rho_f \frac{L}{m\pi} \frac{I_n \left(\frac{m\pi}{L} R_1 \right)}{I_n' \left(\frac{m\pi}{L} R_1 \right)} \right) + c_{12} \right), \\
a_{36} &= -\frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_1^2 \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right) \right) c_{12}, \\
a_{44} &= -R_2^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \frac{1}{2} (1-\nu) n^2 - \frac{D}{EhR_2^2} \cdot \\
& \quad \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2} n^2 + \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_2^2 \cdot \\
& \quad \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n^2}{R_2^2} \right) \right) \omega^2, \\
a_{45} &= \frac{R_2}{2} (1+\nu) \frac{m\pi}{L} n, \\
a_{46} &= -\nu R_2 \frac{m\pi}{L} - \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_2 \cdot
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{m\pi}{L}\right)^3 + \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2R_2} \frac{D}{Eh} \frac{m\pi}{L} n^2,$$

$$a_{54} = \frac{R_2}{2}(1+\nu) \frac{m\pi}{L} n,$$

$$a_{55} = -\frac{R_2^2}{2}(1-\nu) \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - n^2 - \frac{D}{Eh} \frac{3(1-\nu^2)(1-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho h}{Eh} (1-\nu^2) R_2^2 \cdot \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \frac{n^2}{R_2^2}\right)\right) \omega^2,$$

$$a_{56} = n + \frac{D}{Eh} \frac{(1-\nu^2)(3-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 n,$$

$$a_{63} = \frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_2^2 \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \frac{n^2}{R_2^2}\right)\right) \frac{R_1}{R_2} c_{12},$$

$$a_{64} = -\nu R_2 \frac{m\pi}{L} - \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^3 + \frac{D}{Eh} \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{2R_2} \frac{m\pi}{L} n^2,$$

$$a_{65} = n + \frac{D}{Eh} \frac{(1-\nu^2)(3-\nu)}{2} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 n,$$

$$a_{66} = \left(-1 - \left(\frac{D(1-\nu^2)}{Eh} R_2^2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + 2 \frac{D(1-\nu^2)}{Eh} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 n^2 + \frac{D(1-\nu^2)}{Eh R_2^2} n^4 + \frac{D(1-\nu^2)}{Eh R_2^2} - 2 \frac{D(1-\nu^2)}{Eh R_2^2} n^2\right)\right) + \frac{1}{Eh} (1-\nu^2) R_2^2 \cdot \left(1 + (e_0 a)^2 \left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \frac{n^2}{R_2^2}\right)\right) \left(\omega^2 \rho h - \frac{R_1}{R_2} c_{12}\right).$$

由式(15)中的矩阵行列式为零, 得到:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

给定波数 m 、波数 n , 求解式(16)可以得到系统固有频率。下面将通过算例分别讨论波数 m 、波数 n 以及碳纳米管几何参数和材料参数对碳纳米管振动频率的影响。

3 数值算例

在数值算例中, 取内层(即第一层)纳米管半径 $R_1=0.5\text{nm}$, 双壁纳米管管壁初始间距为 0.34nm , 纳米管长度 $L=5\text{nm}$ 、 10nm 、 15nm , 纳米管壁厚 $h=0.34\text{nm}$, 质量密度 $\rho=2300\text{kg/m}^3$, 弯曲刚度 $D=1.275 \times 10^{-19}\text{J}$, 弹性模量 $E=1\text{TPa}$, 泊松比 $\nu=0.19$, $e_0=0.39$, 管内流体质量密度 $\rho_f=1000\text{kg/m}^3$ 。

图2和图3给出了碳纳米管振动基频与环向波数 n 和轴向半波数 m 的关系。可以看出, 随着 n 值的增大, 振动基频增大且随着纳米管长度的增大略有降低; 而随着 m 值的增大, 振动基频略有增大且随着纳米管长度的增大也略有降低。

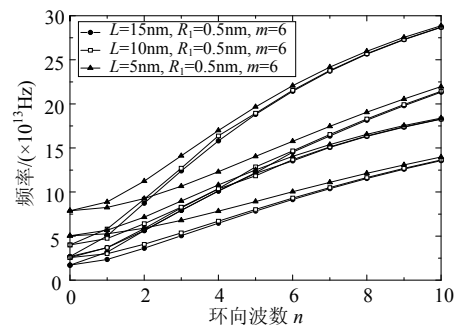


图2 频率与环向波数 n 的关系

Fig.2 Frequency via circumferential wavenumber n

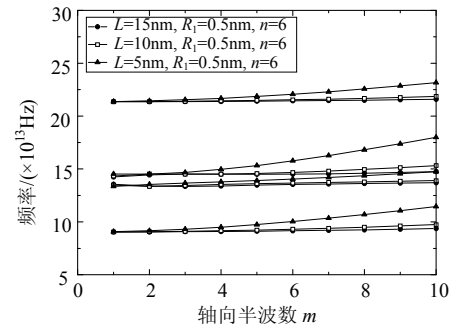


图3 频率与轴向半波数 m 的关系

Fig.3 Frequency via half axial wave number m

从图4可以看出, 随着 R_1 值的增大, 碳纳米管振动的基频会减小, 且当 R_1 值大于某一临界值以后, 碳纳米管振动的基频降低到最小值并基本保持定值。同时可以看到, 随着 L 值的增大, 振动基频也降低。在图5中, 随着 L 值的增大, 碳纳米管振动基频减小, 且随着 R_1 值的增大, 振动基频也降低。

图6给出了基于局部弹性理论和非局部弹性理论得到的双壁碳纳米管频散特性, 其中 $m=6$ 、 $R_1=0.5\text{nm}$ 、 $L=10\text{nm}$ 。可以看出非局部弹性理论考虑的小尺度效应对频散关系的影响随着波数的增加越来越明显。图7考虑了碳纳米管壁厚 h 和弹性

模量 E 对频散特性的影响, 其中纳米管壁厚 $h=0.066\text{nm}$, 弹性模量 $E=5.5\text{TPa}$ ^[11]。

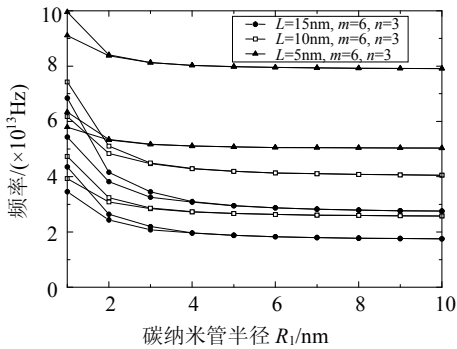


图 4 频率与碳纳米管半径 R_1 的关系

Fig.4 Frequency via radius of carbon nanotubes

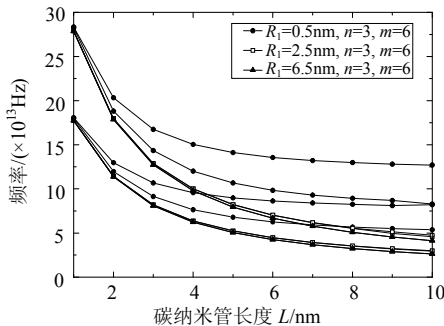


图 5 频率与碳纳米管长度 L 的关系

Fig.5 Frequency via length of carbon nanotubes

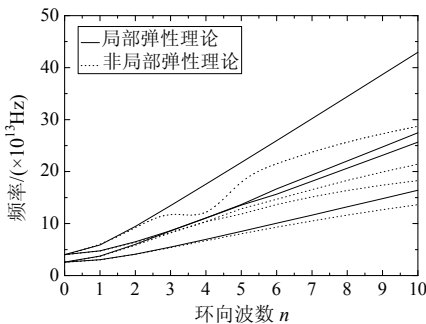


图 6 局部和非局部弹性理论比较

Fig.6 Local via nonlocal elastic theory

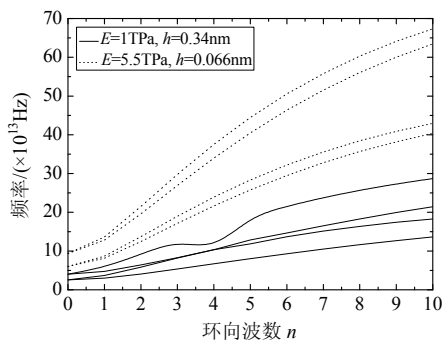


图 7 不同材料参数比较

Fig.7 Variation of material parameters with frequency

小尺度参数 e_0 是非局部弹性理论中的关键参

数,但在非局部弹性理论中对如何判定 e_0 的大小还没有能够被完全理解, 目前主要通过试验手段以及原子晶格动力学模型进行确定。图 8 给出了小尺度参数 e_0 的变化对频散关系的影响, 可以看出随着小尺度参数 e_0 值的增大, 频散关系呈现出下降趋势, 其中 $n=3$ 、 $m=6$ 、 $R_1=0.5\text{nm}$ 、 $L=10\text{nm}$ 。

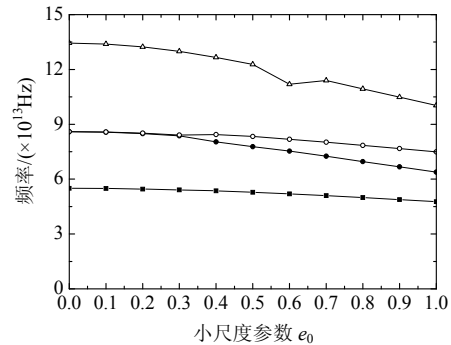


图 8 小尺度参数 e_0 对频散关系的影响

Fig.8 Variation of scale coefficient e_0 with frequency

4 结论

本文基于非局部弹性理论和 Flügge 壳理论, 分析了简支边界条件下充液双壁碳纳米管的振动特性。通过求解纳米管振动方程, 得到了碳纳米管振动的固有频率。根据数值计算结果讨论了环向波数和轴向半波数, 以及纳米管长度、半径、材料参数的变化对固有频率的影响。通过对比分别采用局部和非局部弹性理论计算得到的结果, 发现考虑小尺度效应的非局部理论计算的结果要更为精确, 且小尺度参数的增大使得频率呈现出下降趋势。

参考文献:

- [1] Xie G Q, Han X, Long S Y. Effect of small size on dispersion characteristics of wave in carbon nanotubes [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44: 1242—1255.
- [2] Narendar S, Gopalakrishnan S. Terahertz wave characteristics of a single-walled carbon nanotube containing a fluid flow using the nonlocal Timoshenko beam model [J]. Physica E, 2010, 42(5): 1706—1712.
- [3] He X Q, Kitipornchai S, Wang C M, Liew K M. Modeling of van der Waals force for infinitesimal deformation of multi-walled carbon nanotubes treated as cylindrical shells [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(23): 6032—6047.
- [4] He X Q, Kitipornchai S, Liew K M. Buckling analysis of multi-walled carbon nanotubes: a continuum model accounting for van der Waals interaction [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, 53(2): 303—326.

(参考文献[5]—[11]转第 229 页)

可分析在突发地震情况下风力发电机结构动力学。

(2) 算例分析表明, 本文采用的数值计算方法分析风力机在气动和地震载荷作用下的动力响应, 可为风力机结构动力学分析及载荷计算提供可行的分析手段。

参考文献:

- [1] 贺广零. 考虑土-结构相互作用的风力发电高塔系统地震动响应分析[J]. 机械工程学报, 2009, 45(7): 87—94.
He Guangling. Seismic response analysis of wind turbine tower systems considering soil-structure interaction [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(7): 87—94. (in Chinese)
- [2] 贺广零, 周勇, 李杰. 风力发电高塔系统地震动响应分析[J]. 工程力学, 2009, 26(7): 72—77.
He Guangling, Zhou Yong, Li Jie. Seismic analysis of wind turbine system [J] Engineering Mechanics, 2009, 26(7): 72—77. (in Chinese)
- [3] 李长风. 风力发电结构动力反应的一体化有限元模型分析[J]. 特种结构, 2008, 25(2): 17—19.
Li Changfeng. Researching on a integrated finite element model for dynamic response analysis of wind turbine structure [J]. Special Structures, 2008, 25(2): 17—19. (in Chinese)
- [4] 金鑫, 何玉林, 杜静, 刘桦. 风力机结构耦合振动分析[J]. 中国机械工程, 2008, 19(1): 9—13.
Jin Xin, He Yulin, Du Jing, Liu Hua. Coupled vibration analysis of wind turbine [J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(1): 9—13. (in Chinese)
- [5] 刘桦, 何玉林, 金鑫, 杨兴满. 基于 GDW 理论的失速型风力机整机性能分析[J]. 太阳能学报, 2008, 29(3): 343—348.
Liu Hua, He Yulin, Jin Xin, Yang Xingman. Joint-analysis of stall-regulated turbine's performance based on GDW [J]. Acta Energiæ Solaris Sinica, 2008, 29(3): 343—348. (in Chinese)
- [6] Bazeos N, Halzigeorgious G D, Hondros I D. Static, seismic and stability analyses of a prototype wind turbine steel tower [J]. Engineering Structures, 2002, 24(8): 1015—1025.
- [7] European Committee for Standardization. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance [S]. London: London South Bank University, 2003.
- [8] 沈聚敏. 抗震工程学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2004.
Shen Jumin. Aseismic engineering [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2004. (in Chinese)
- [9] 洪嘉振. 计算多体系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
Hong Jiazhen. Computational dynamics of multibody systems [M]. Beijing: High Education Press, 2003. (in Chinese)
- [10] 齐朝晖. 多体系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
Qi Chaohui. Multi-body system dynamics [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [11] Homer Rahnejat. Multi-body dynamics [M]. New York: Monitoring and Simulation Techniques III, 2004.

(上接第 218 页)

- [5] Hu Y G, Liew K M, Wang Q, He X Q, Yakobson B I. Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56: 3475—3485.
- [6] Reddy C D, Lu C, Rajendran S, Liew K M. Free vibration analysis of fluid conveying single-walled carbon nanotubes [J]. Applied Physics Letters, 2007, 90: 133122-1—133122-3.
- [7] Chang W J, Lee H L. Free vibration of a single-walled carbon nanotube containing a fluid flow using the Timoshenko beam model [J]. Physics Letters A, 2009, 373: 982—985.
- [8] Yan Y, Wang W Q, Zhang L X. Noncoaxial vibration of fluid-filled multi-walled carbon nanotubes [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34: 122—128.
- [9] Eringen A C. Nonlocal continuum field theories [M]. New York: Springer, 2002.
- [10] Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [11] Duan W H, Wang C M, Zhang Y Y. Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics [J]. Journal of Applied Physics, 2007, 101: 024305-1—024305-7.