

文章编号: 1000-4750(2012)08-0028-05

# 一种模态振型的直接扩阶方法

刘福顺<sup>1</sup>, 郭 鹏<sup>2</sup>, 王 超<sup>1</sup>, 董莎莎<sup>1</sup>

(1. 中国海洋大学工程学院, 青岛 266100; 2. 青岛理工大学土木工程学院, 青岛 266033)

**摘 要:** 传统的模型缩阶及模态扩阶方法是以计算传递矩阵为手段。该文提出一种实测模态振型空间不完备问题的直接处理方法, 即未测试自由度振型值的直接估计方法。通过引入一复合向量, 该向量由对应于主自由度的实测振型值与对应于从自由度的待估算值组成。依靠实测模态及有限元模型信息对复合向量中未测试自由度的振型值进行重新估算, 进而获得空间完备的模态振型。该文采用 5 自由度的弹簧-质量体系验证方法的正确性; 借助平面框架结构探讨新方法较传统方法在低阶模态振型估算精度上的优势。数值结果表明: 所提出方法不需质量归一化条件以及实测模态与有限元振型的比例条件; 同时, 该方法较传统方法在低阶模态振型扩阶上具有更好的精度, 并允许有限元模型具有一定的模型误差。

**关键词:** 振型; 模型缩阶; 模态扩阶; 直接扩阶; 复合向量

**中图分类号:** O327      **文献标志码:** A      **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2010.11.0834

## A DIRECT MODE SHAPE EXPANSION METHOD

LIU Fu-shun<sup>1</sup>, GUO Peng<sup>2</sup>, WANG Chao<sup>1</sup>, DONG Sha-sha<sup>1</sup>

(1. College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China;

2. School of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao, 266033, China)

**Abstract:** Traditional methods dealing with spatial incompleteness is by employing transformation matrix for model reduction and modal expansion. This article presents a different mode shape expansion method without obtaining transformation matrix, i.e., a direct mode shape expansion method. A hybrid vector is employed, which is constructed by values corresponding to master degrees of freedom (DOF) and values corresponding to slave DOFs. Spatial complete mode shape is estimated by modifying the above values at slave DOFs based on information such as measured spatial incomplete mode shape and stiffness and mass matrices from the analytical model. A five DOFs mass-spring system is used to examine the accuracy of the proposed method; and a planar frame structure is used to identify the performance for lower order mode shapes estimation. Numerical results show that: 1) Mass normalization and scaling for mode shapes are not needed in the proposed method; and 2) The proposed method outperforms traditional expansion method for lower order mode shape expansion, and a certain modeling errors are permitted in finite element model of the test structure.

**Key words:** mode shape; model reduction; modal expansion; direct expansion; hybrid vector

有限元方法是进行结构静力、动力分析的重要手段。然而, 该技术的应用将产生相当数量的离散单元及结点, 以致模态振型的自由度数目比较庞大。而实际结构测试时只能借助有限数量的传感器

收稿日期: 2010-11-17; 修改日期: 2011-01-29

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(2011CB013704); 国家自然科学基金项目(51009124); 山东省自然科学基金项目(ZR2009FQ007); 中国海洋大学“高校基本科研业务费青年教师科研专项基金项目”(201013024)

通讯作者: 刘福顺(1978—), 男, 山东曲阜人, 副教授, 博士, 从事结构动力特性研究(E-mail: percyliu@ouc.edu.cn).

作者简介: 郭 鹏(1974—), 男, 山东淄博人, 讲师, 硕士, 从事钢结构混凝土结构设计(E-mail: guopeng5995@sina.com);

王 超(1986—), 男, 山东滨州人, 硕士生, 从事模态参数识别技术研究(E-mail: wangc@ouc.edu.cn);

董莎莎(1985—), 女, 山东潍坊人, 硕士生, 从事结构阻尼特性识别技术研究(E-mail: shashadong111@163.com).

获得结构的振动信息, 故而通过模态参数识别技术获得的实测振型相对于有限元模型的振型而言, 其在空间上的不完备问题比较突出。因此, 模型缩阶与模态扩阶技术得到了广泛关注。该类技术在模型修正、损伤检测等方面也有广泛的应用<sup>[1-4]</sup>。

Guyan<sup>[5]</sup>与 Irons<sup>[6]</sup>最早提出了模型缩阶方法。该方法将质量矩阵、刚度矩阵分别对应于主自由度、从自由度进行分解, 借助分解后的刚度矩阵计算并获取传递矩阵以达到模型缩阶的目的。虽然该方法是目前最简单的方法, 但该方法在很大程度上依赖于主自由度的数量与类型。更重要的是该方法只能在低阶动力特性上具有较好的精度, 而对于高阶模态误差较大。为此, 许多学者试图进一步提高 Guyan 方法的精度。Kidder<sup>[7]</sup>、Miller<sup>[8]</sup>等人在一定程度上考虑了惯性力项的影响。Michael P 与 Ephraim G<sup>[9]</sup>提出了两个策略以提高缩减模型的精度。但是, 这些改进只有在主自由度选取非常合适的时候才成立。O'Callahan 亦在静态缩阶法的基础上进行了改进, 提出了改进的缩阶系统(Improved Reduced System)<sup>[10]</sup>。该方法实际上是通过加入假设的静荷载作为惯性项, 在由静态缩阶法得到的转换矩阵中加入了一个修正项。系统等效缩阶扩展(SEREP)方法<sup>[11]</sup>, 利用计算的特征向量构造主自由度与从自由度之间的传递矩阵。同静态缩阶方法类似, 特征向量也分解为与主自由度和从自由度相对应的两部分, 当主自由度数目大于振型阶数时, SEREP 的传递矩阵可应用伪逆技术计算获得。值得注意的是, SEREP 是一种精确的模型缩阶技术。也就是说, 在主自由度测试信息精确的前提下, 可获得结构的所有自由度的振型信息。但是, 如果实测模态与有限元模态的相关性欠佳, SEREP 方法将无法应用。罚函数法<sup>[12]</sup>借助权重变量作为实测模态的相对可信判别指标, 通过使模态应变能最小实现模态扩阶。最近, Chen (2010)<sup>[13]</sup>提出了一种可以考虑有限元模型误差并且允许实测数据具有一定程度测试误差的振型扩阶新方法。该方法利用了质量归一化条件将实测振型表述为各有限元振型的线性组合。

上述方法是通过求解传递矩阵实现模态振型扩阶或模型缩阶的。本文将引入一复合向量, 通过对其未测试自由度的振型值进行修正而实现模态振型的直接扩阶, 无需求解传递矩阵。文中将选用一个 5 自由度弹簧-质量体系验证方法的正确性; 借

助一平面框架结构进一步验证提出方法在低阶模态估计中的优势。

## 1 模态振型的直接扩阶方法

对于第  $j$  阶模态, 定义一复合向量  $\Phi_j'$ , 该向量由对应于主自由度的实测数值及对应于从自由度的待估算数值组成, 即:

$$\Phi_j' = \begin{Bmatrix} v_m \\ v_m \\ \mathbf{M} \\ v_s \\ v_s \\ \mathbf{M} \\ v_s \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中, 下标  $m$  与  $s$  分别表示主自由度和从自由度。

假定第  $j$  阶空间完备的真实振型  $\Phi_j^*$  是对复合向量  $\Phi_j'$  在从自由度上修正的结果:

$$\Phi_j^* = \Phi_j' + \sum_{s=1}^N \delta_s \Phi_{s,j}' \quad (2)$$

式中:  $\Phi_{s,j}'$  为在第  $s$  个自由度上为非零值而其他自由度上均为零值的与  $\Phi_j'$  同维的向量;  $N$  为待修正项(从自由度)的个数,  $\delta_s$  为对应的修正系数。

将真实结构的质量矩阵、刚度矩阵分别用  $\mathbf{K}^*$  与  $\mathbf{M}^*$  表示, 则该结构第  $j$  阶特征值与特征向量的关系可表示为:

$$\mathbf{K}^* \Phi_j^* = \lambda_j^* \mathbf{M}^* \Phi_j^* \quad (3)$$

实际上, 真实结构的刚度矩阵  $\mathbf{K}^*$  是未知的, 并且该矩阵不同于借助有限元手段获取的刚度矩阵  $\mathbf{K}$ 。对于真实结构的质量矩阵  $\mathbf{M}^*$ , 相对于  $\mathbf{K}^*$  而言, 用有限元方法能够精度较高的模拟, 故在提出的方法中, 我们暂时先不考虑二者的区别, 即假定:

$$\mathbf{K}^* \approx \mathbf{K} \quad (4)$$

$$\mathbf{M}^* \approx \mathbf{M} \quad (5)$$

假如通过动力测试可获得实测模型的第  $j$  阶特征值与特征向量分别为  $\lambda_j^*$ 、 $\Phi_j^*$ , 用  $\Phi_i^T$  左乘式(3)的两边, 得:

$$\Phi_i^T \mathbf{K}^* \Phi_j^* = \lambda_j^* \Phi_i^T \mathbf{M}^* \Phi_j^* \quad (6)$$

将式(2)、式(4)及式(5)代入式(6), 可得:

$$\mathbf{K}_{ij}^\ominus + \sum_{s=1}^N \delta_s \mathbf{K}_{s,ij}^\ominus = \lambda_j^* \mathbf{M}_{ij}^\ominus + \lambda_j^* \sum_{s=1}^N \delta_s \mathbf{M}_{s,ij}^\ominus \quad (7)$$

其中:

$$\mathbf{K}_{ij}^{\ominus} = \Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_j' \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_{s,ij}^{\ominus} = \Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_{s,j}' \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{\ominus} = \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_j' \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{s,ij}^{\ominus} = \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_{s,j}' \quad (11)$$

将式(7)整理后, 得:

$$\sum_{s=1}^N \delta_s (\mathbf{K}_{s,ij}^{\ominus} - \lambda_j^* \mathbf{M}_{s,ij}^{\ominus}) = \mathbf{f}_{ij}^{\ominus} \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{f}_{ij}^{\ominus} = \lambda_j^* \mathbf{M}_{ij}^{\ominus} - \mathbf{K}_{ij}^{\ominus} \quad (13)$$

当有  $N_j$  阶实测模态, 并且从有限元模型中取  $N_i$  阶时, 依据式(8)可构造  $Nm = N_i \times N_j$  方程, 记:

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}_{s,ij}^{\ominus} - \lambda_j^* \mathbf{M}_{s,ij}^{\ominus} \quad (14)$$

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \mathbf{M} \\ \delta_N \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{f}\mathbf{f} = \mathbf{f}_{ij}^{\ominus} \quad (16)$$

式(12)可进一步写成矩阵的形式, 即:

$$\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{f}\mathbf{f} \quad (17)$$

理论上, 如果  $\mathbf{G}$  为非奇异的方阵, 则式(17)可依据标准的求逆算法得到  $\mathbf{A}$ , 即:

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{f}\mathbf{f} \quad (18)$$

当  $\mathbf{G}$  非方阵时, 即方程数量与未知数的个数不等时, 一个等效的算法就是伪逆技术(Pseudo-Inverse)。若矩阵  $\mathbf{G}$  的行数多于列数, 则该问题为超静定问题, 伪逆算法关于超静定问题的定义为(Gelb,1974)<sup>[14]</sup>:

$$\mathbf{G}^{\ominus} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \quad (19)$$

## 2 振型评估指标

为了评估实测振型  $\Phi_j^*$  与估算振型  $\hat{\Phi}_i$  的相关性, MAC(Modal Assurance Criterion)<sup>[15]</sup>定义为:

$$\text{MAC}(i, j) = \frac{|\hat{\Phi}_i^T \Phi_j^*|^2}{|\hat{\Phi}_i^T \hat{\Phi}_i| |(\Phi_j^*)^T \Phi_j^*|} \quad (20)$$

式(20)表明, MAC 越大, 说明两个振型的相关性越好; 反之越差。

为了评估实测振型  $\Phi_j^*$  与估算振型  $\hat{\Phi}_i$  在每一个自由度上的误差, 相对模态误差定义为:

$$e_p^j = \frac{(\hat{\Phi}_j - \Phi_j^*)^T \mathbf{M}^* (\hat{\Phi}_j - \Phi_j^*)}{(\Phi_j^*)^T \mathbf{M}^* \Phi_j^*} \quad (21)$$

如果估计的振型足够精确, 则相对模态误差为

零; 对  $N_j$  阶模态, 则平均累计模态误差定义为:

$$E_p = \frac{1}{N_j} \sum_{j=1}^{N_j} e_p^j \quad (22)$$

## 3 数值算例——质量-弹簧体系

数值算例采用 5 自由度弹簧-质量模型, 如图 1 所示。每个单元的质量、刚度系数分别取为:  $m_n = 50\text{kg}$ ,  $k_n = 2.9 \times 10^7 \text{N/m}$ , 位移记为  $x_n$ , 其中  $n = 1, 2, \dots, 5$ 。

实测模型假定具有一定程度的损伤, 即单元刚度  $k_1$ 、 $k_2$  与  $k_4$  降低 10%,  $k_3$  与  $k_5$  降低 20%。通过特征值分析, 得到 5 阶模态频率的理论值为: 34.499Hz、100.704Hz、158.750Hz、203.935Hz、232.598Hz。该模型与刚度未降低模型(有限元基准模型)的频率误差在 6.96%~9.82%之间。

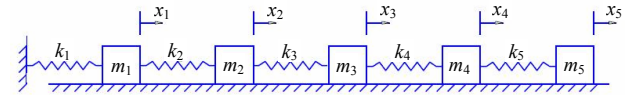


图 1 5 自由度弹簧-质量体系示意图

Fig.1 Sketch of 5-DOF mass-spring structure

假定传感器安置于质量  $m_1$  与  $m_3$  上, 即这两个质量块对应的自由度为主自由度, 其余质量块对应的自由度为从自由度。如果实测结构的刚度  $\mathbf{K}^*$  可准确确定, 从有限元基准模型中取 5 阶模态, 应用式(17)可构造 5 个方程, 该方程组中包含 3 个未知数, 理论上可以求解。图 2 为实测结构第 1 阶振型真实值与应用本文方法的估算值对比图。从图 2 中可以看出, 如果  $\mathbf{K}^*$  已知, 所发展方法可对实测结构振型中未测试位置给出准确的估算。

实际上,  $\mathbf{K}^*$  往往是未知的, 接下来的工作就是近似取  $\mathbf{K}^* \approx \mathbf{K}$ , 研究能否对所关心的振型给出合理的估计。假定  $\mathbf{K}^* \approx \mathbf{K}$ , 其他条件同图 2, 重新执行所提出的方法得到图 3。该图表明, 第 1 阶模态未测试自由度的振型值得到了很好的估计, 其与真实振型的 MAC 值为 1, 模态误差为 0.0103%。按照图 3 的条件估算的第 2 阶至第 5 阶振型 MAC 值与模态误差列于表 1。数值结果表明, 所发展的方法整体上优于 Guyan 方法, MAC 值的计算具有与 Dynamic 方法、SEREP 方法近似的效果, 但模态累积误差较 Dynamic 方法小。模态误差在第 1 阶上优于 SEREP 方法。从表 1 可以推断, 本文的方法在低阶模态上可能优于 SEREP 方法, 该问题将在下一个数值算例中进一步探讨。

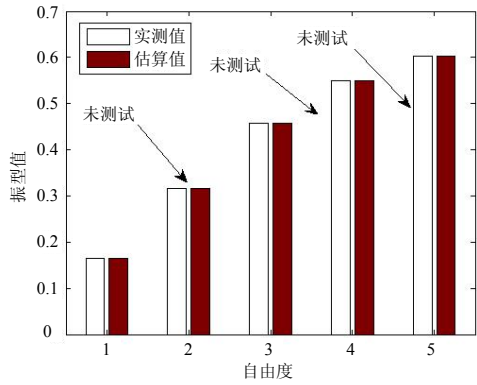


图2 实测结构刚度已知时第1阶振型估算对比图

Fig.2 Comparison of the first mode shape when stiffness matrix of the actual structure is known

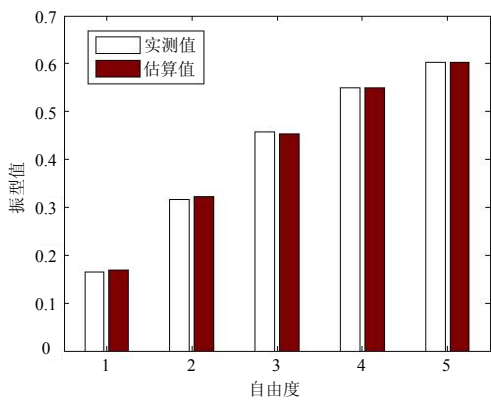


图3 实测结构刚度未知时第1阶振型估算对比图

Fig.3 Comparison of the first mode shape when stiffness matrix of the actual structure is unknown

表1 应用传统方法与提出方法计算的MAC与模态误差

Table 1 Expanded mode shapes from the existing methods and the proposed approach

模态 阶次	Guyan		Dynamic		Serep		本文方法	
	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC
1	2.89	0.9934	0.01	1.0000	0.02	0.9999	0.01	1.0000
2	103.38	0.3871	0.11	0.9995	0.11	0.9995	0.17	0.9995
3	109.81	0.4929	3.95	0.9808	1.11	0.9958	1.87	0.9927
4	104.43	0.3386	11.28	0.9765	1.84	0.9952	7.87	0.9747
5	229.49	0.0353	0.04	0.9999	0.25	0.9988	2.37	0.9890
$E_p$	110.00		3.08		0.67		2.46	

实际应用时，由于模态测试中包含各种测试误差，这些误差势必影响到所发展方法的效果，故接下来的数值分析将进一步研究应用具有测试误差的模态信息进行未测试自由度的振型值估算。将不考虑测试误差的实测模态在对应的每一个自由度上均乘上一个系数  $(1 + \varepsilon)$ ，其中  $\varepsilon$  为服从高斯分布的均值为 0、方差为指定误差影响程度的系数。

表 2 为传感器安置于质量  $m_1$  与  $m_3$  上并且误差水平为 5% 时各阶振型与真实振型的 MAC 值及模态误差。数值结果表明，所提出方法的模态累计误

差优于 Guyan 方法、Dynamic 方法，在第 1 阶、第 2 阶振型的模态误差与 SEREP 方法相当，并且第 1 阶的模态误差优于 SEREP 方法，故我们推断所提出的方法在测试误差水平适当时对结构的低阶振型依然保持较高的估算精度。

表 2 测试误差水平为 5% 时分别应用传统方法与提出方法计算的 MAC 与模态误差

Table 2 Expanded mode shapes from the existing methods and the proposed approach when the measured mode had a 5 percent noise level

模态 阶次	Guyan		Dynamic		Serep		本文方法	
	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC
1	3.20	0.9927	0.02	0.9999	0.02	0.9999	0.02	0.9999
2	101.43	0.3987	0.11	0.9995	0.10	0.9995	0.13	0.9994
3	107.07	0.5017	1.89	0.9917	1.01	0.9962	1.73	0.9935
4	103.47	0.3472	10.22	0.9794	2.13	0.9950	6.92	0.9779
5	227.93	0.0350	0.04	0.9998	0.35	0.9983	2.85	0.9866
$E_p$	108.62		2.46		0.72		2.33	

#### 4 数值算例——二维框架结构

本部分选用一平面框架结构检验所发展的方法是否在低阶模态上具有更好的估算精度。该平面框架结构共 12 个节点，15 个单元，每个节点 3 个自由度，如图 4。各构件截面惯性矩为  $I = 2.89 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ，截面面积为  $A = 2.825 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ，弹性模量  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ，密度  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ 。

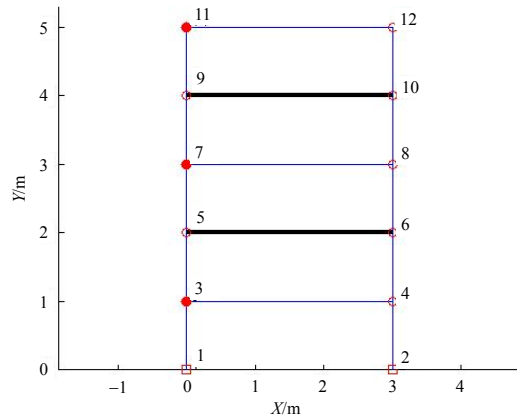


图 4 二维平面框架结构

Fig.4 Two dimensional frame structure

实际结构假定单元 6、单元 12 分别具有 30%、20% 的刚度降低，其他单元刚度均乘上均值为 0、方差为 0.05 的服从高斯分布的刚度变化系数；所有的质量单元均乘上均值为 0、方差为 0.02 的服从高斯分布的质量变化系数。

假定布置 3 个传感器，分别安装于节点 3、节点 7 与节点 11 的 x 方向。从有限元模型取 30 阶模

态, 并且假定实际结构可以测得前 5 阶模态。表 3 为各阶振型与真实振型的 MAC 值及模态误差。数值结果证实所发展的方法对于该框架结构的前 5 阶模态具有较高的精度; 前 5 阶模态累积误差优于 Guyan 方法、Dynamic 方法与 SEREP 方法, 具有更好的工程应用前景。

表 3 应用传统方法与提出方法计算的 MAC 与模态误差  
Table 3 Expanded mode shapes from the existing methods and the proposed approach

模态 阶次	Guyan		Dynamic		Serep		本文方法	
	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC	$e_p^j / (\%)$	MAC
1	0.01	0.9999	0.00	1.0000	0.00	1.0000	0.00	1.0000
2	1.03	0.9947	0.01	0.9999	0.02	0.9998	0.01	0.9999
3	15.49	0.9343	0.81	0.9970	0.12	0.9991	0.11	0.9993
4	100.14	0.0066	57.31	0.9986	388.14	0.9979	44.26	0.9986
5	144.84	0.1795	0.77	0.9969	0.46	0.9974	0.35	0.9978
$E_p$	52.301		11.78		77.75		8.95	

## 5 结论

与传统的计算传递矩阵实现模态扩阶或模型缩阶的方法不同, 本文提出了一种处理实测振型空间不完备问题的直接计算方法。通过引入一复合向量并对其未测试自由度振型值进行修正而实现模态振型的直接扩阶, 无需求解传递矩阵。所提出方法的一个优点是无需质量归一化条件以及实测模态与有限元振型的比例条件; 另一个则是该方法较传统方法在低阶模态振型估计上具有更好的精度, 并允许有限元模型具有一定的模型误差。更合理的考虑有限元模型误差的模态振型直接扩阶方法将在今后的工作中完善。

### 参考文献:

[1] Mottershead J E, Friswell M I. Model updating in structural dynamics: A survey [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 167(2): 347—375.

[2] Chen H P, Bicanic N. Inverse damage prediction in structures using nonlinear dynamic perturbation theory [J]. *Computational Mechanics*, 2006, 37(5): 455—467.

[3] Hu S-L J, Li H J, Wang S Q. Cross-model cross-mode method for model updating [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, 21(4): 1690—1703.

[4] Li H J, Liu F S, Hu S-L J. Employing incomplete complex modes for model updating and damage detection of damped structures [J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2008, 51(12): 2254—2268.

[5] Guyan R. Reduction of stiffness and mass matrices [J]. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 380.

[6] Irons B. Structural eigenvalue problems: Elimination of unwanted variables [J]. *AIAA Journal*, 1965, 3(5): 961—962.

[7] Kidder R L. Reduction of structural frequency equations [J]. *AIAA Journal*, 1973, 11(6): 892.

[8] Miller C A. Dynamic reduction of structural models [J]. *Journal of the Structural Division*, 1980, 106(10): 2097—2108.

[9] Michael P, Ephraim G. Improvement in model reduction schemes using the system equivalent reduction expansion process [J]. *AIAA Journal*, 1996, 34(10): 2217—2219.

[10] O'Callahan J C. A procedure for an improved reduced system (IRS) [C]. *Seventh International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, Nevada, USA, February 1989.

[11] Levine-West M, Milman M, Kissil A. Mode shape expansion techniques for prediction: Experimental evaluation [J]. *AIAA Journal*, 1996, 34(4): 821—829.

[12] Tikhonov A N, Arsenin V Y. *Solutions of ill-posed problems* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1977: 191—202.

[13] Chen H P. Mode shape expansion using perturbed force approach [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329: 1177—1190.

[14] Gelb A. *Applied optimal estimation* [M]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology Press, 1974: 157—173.

[15] Ewins D J. *Modal testing: Theory, practice and application* [M]. 2nd ed. Baldock, Hertfordshire, England: Research Studies Press, 2000: 34—49.