文章编号：1000-4750(2012)11-0143-09

基于共旋坐标法的带刚臂平面梁元非线性分析

邓继华[1,2]，邵旭东[1]

(1. 湖南大学土木工程学院，湖南，长沙 410082；2. 长沙理工大学土木与建筑工程学院，湖南，长沙 410076)

摘 要：为解决平面梁元在相交处可能存在的刚性连接问题，根据带刚臂平面梁元在受力后的运动和变形特点，该文基于共旋坐标法推导出两端带任意刚臂的平面梁元的切线刚度矩阵显式表达式，给出了不平衡力的精确全量算法，并提供了详细的计算步骤。利用该文的研究成果编制了程序，对无刚臂和有刚臂的平面梁结构进行了几何非线性分析。计算结果表明：这种非线性单元列式的正确性和非线性求解过程的收敛性，实用价值较强。

关键词：刚臂；平面梁元；几何非线性；共旋坐标法；切线刚度矩阵

中图分类号：TU311.3 **文献标志码：**A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.03.0123

CO-ROTATIONAL FORMULATION FOR NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE BEAM ELEMENT WITH RIGID ARMS

DENG Ji-hua[1,2] , SHAO Xu-dong[1]

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. College of Bridge and structural Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

Abstract: In order to solve the problem of rigid anchor connection when using plane beam element, an exact expression of non-linear tangent stiffness matrix is derived for the plane beam element with rigid arms by using co-rotational procedure and variational method and considering the characteristic movement and deformation under forces. The precise algorithm of unbalanced forces is proposed, the detailed calculation procedure is presented, and a computer program is developed. Geometric nonlinear analyses for plane beam structures with and without rigid arms are carried out to verify the reliability and computational efficiency of the proposed element formulation. The new element can be used in plane beam structures.

Key words: rigid arm; plane beam element; geometric nonlinear; co-rotational procedure; tangent stiffness matrix

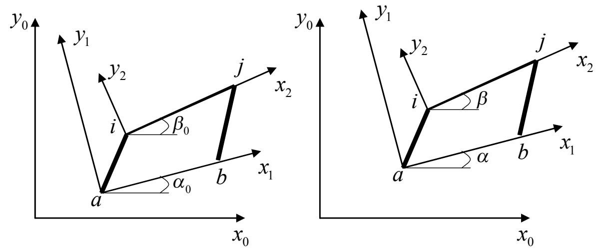
在用有限元法对结构进行分析时，经常会碰到单元在相交处存在的刚性连接问题，此问题在杆单元、梁单元、索单元组成的结构中均存在；为了使理论计算图式尽可能仿真实际结构，工程上常采用杆件与节点由受力后不变形的刚臂相连接的方式来处理[1]。对于索单元，文献[2－3]考虑了索单元中刚臂存在对单元刚度矩阵的非线性影响；在梁单元、杆单元方面，文献[4]按推导带刚臂平面梁单元刚度矩阵的思路，推导出了带刚臂空间梁单元刚度矩阵，文献[5]采用有限元法分析了带刚臂高层建筑结构中不同的刚臂型式对结构所产生的不同效应，在此基础上提出了刚臂形式优化的建议，但上述研究都是基于线性分析的基础上；对于平面梁、空间梁及杆的几何非线性分析，尽管研究成果非常多[6－10]，但都忽视了刚臂效应对切线单元刚度矩阵的影响；工程上为了解决此类结构的几何非线性分析，常采用将刚臂划分为独立的单元，取其刚度为正常单元的数十倍甚至上百倍的方法，此方法不仅

收稿日期：2011-03-14；修改日期：2011-08-05
通讯作者：邓继华(1975－)，男，湖南冷水江人，副教授，博士生，从事桥梁结构分析与设计研究(E-mail: jihuadeng@sina.com)
作者简介：邵旭东(1961－)，男，浙江富阳人，教授，博士，博导，从事大跨与新型桥梁结构的理论研究(E-mail: shaoxd@hnu.cn).

由于增加单元和节点数而导致计算量增大，而且有可能由于刚臂单元的刚度取值不当导致非线性计算收敛困难甚至不收敛；本文在参考上述研究文献的基础上，根据带刚臂平面梁元在受力后的运动和变形特点，基于共旋坐标法准确的导出考虑刚臂效应的带刚臂平面梁元几何非线性切线刚度矩阵显式表达式，给出了不平衡力的精确全量算法，并对无刚臂和有刚臂的平面梁结构进行了几何非线性分析，算例表明本文中的有限元列式和算法是完全正确的。

1 带刚臂平面梁单元几何非线性切线刚度矩阵

如图 1 所示带刚臂平面梁单元，a、b 为带刚臂平面梁单元节点号，i、j 是刚臂与直杆的连接点，图 1(a)中给出初始时刻未变形的带刚臂平面梁单元，它在变形之后任意时刻 t 的位置与形状如图 1(b)所示；为描述单元的几何位置和变形，建立了如图 1 中所示的 3 套坐标系，其中 x_0y_0 为固定不变的结构坐标系，建立非线性平衡方程组所需的总体刚度矩阵、不平衡力及求得的各阶段增量位移均为该结构坐标系下的值，描述初始时刻的节点坐标及节点荷载也是基于该坐标系；x_1y_1 为相对于结构坐标系 x_0y_0 的局部坐标系(随转坐标系)，该坐标系是随 a 节点、b 节点移动而转动的，它始终以 a 节点为原点，以 a 节点到 b 节点的连线方向为 x_1 轴，由 x_1 轴逆时针转 90º 为 y_1 轴，该坐标系就是在结构坐标系 x_0y_0 与局部坐标系 x_2y_2 之间为变量传递和转化起中介作用；x_2y_2 为相对于局部坐标系 x_1y_1 的局部坐标系(随转坐标系)，该坐标系是随直杆 ij 移动而转动的，它始终以 i 点为原点，以 i 点到 j 点的连线方向为 x_2 轴，由 x_2 轴逆时针转 90º 为 y_2 轴，描述扣除刚体平动和转动后的 i 点、j 点位移就是基于该坐标系；设初始时刻 a 节点、b 节点和 i 点、



初始时刻　　　　变形后任意时刻

图 1 变形前后带刚臂平面梁单元

Fig.1 plane beam element with rigid arm before and after deformation

j 点在结构坐标系 x_0y_0 里的坐标分别为 (x_a^0, y_a^0)、(x_b^0, y_b^0)、(x_i^0, y_i^0) 和 (x_j^0, y_j^0)，局部坐标系 x_1y_1 与结构坐标系 x_0y_0 的夹角 α_0、局部坐标系 x_2y_2 与局部坐标系 x_1y_1 的夹角 β_0 计算如下：

$$\begin{cases} \alpha_0 = \arctan\left(\dfrac{y_b^0 - y_a^0}{x_b^0 - x_a^0}\right) \\ \beta_0 = \arctan\left(\dfrac{y_j^0 - y_i^0}{x_j^0 - x_i^0}\right) - \alpha_0 \end{cases} \tag{1}$$

设 a 节点、b 节点在结构坐标系 x_0y_0 中的位移向量为 $\boldsymbol{d}^0 = [u_a^0 \quad v_a^0 \quad \theta_a^0 \quad u_b^0 \quad v_b^0 \quad \theta_b^0]^{\mathrm{T}}$，由刚臂受力后的运动特点得出 i 点、j 点在结构坐标系 x_0y_0 中的位移向量分别为：

$$\begin{Bmatrix} u_i^0 \\ v_i^0 \\ \theta_i^0 \\ u_j^0 \\ v_j^0 \\ \theta_j^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_a^0 + l_{ai} \cdot (\cos(\phi_{ai} + \theta_a^0) - \cos(\phi_{ai})) \\ v_a^0 + l_{ai} \cdot (\sin(\phi_{ai} + \theta_a^0) - \sin(\phi_{ai})) \\ \theta_a^0 \\ u_b^0 + l_{bj} \cdot (\cos(\phi_{bj} + \theta_b^0) - \cos(\phi_{bj})) \\ v_b^0 + l_{bj} \cdot (\sin(\phi_{bj} + \theta_b^0) - \sin(\phi_{bj})) \\ \theta_b^0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

式中：l_{ai}、l_{bj} 为刚臂 ai 和 bj 的长度；ϕ_{ai}、ϕ_{bj} 为初始时刻刚臂 ai、bj 与结构坐标系 x_0 轴的夹角，其计算式如下：

$$\begin{cases} l_{ai} = \sqrt{(x_i^0 - x_a^0)^2 + (y_i^0 - y_a^0)^2} \\ l_{bj} = \sqrt{(x_j^0 - x_b^0)^2 + (y_j^0 - y_b^0)^2} \\ \phi_{ai} = \arctan\left(\dfrac{y_i^0 - y_a^0}{x_i^0 - x_a^0}\right) \\ \phi_{bj} = \arctan\left(\dfrac{y_j^0 - y_b^0}{x_j^0 - x_b^0}\right) \end{cases} \tag{3}$$

变形后任意时刻 t 时 a 节点、b 节点在结构坐标系 x_0y_0 中的坐标为 $(x_a^0 + u_a^0, y_a^0 + v_a^0)$ 和 $(x_b^0 + u_b^0, y_b^0 + v_b^0)$，$i$ 点、j 点在结构坐标系 x_0y_0 下的坐标为 $(x_i^0 + u_i^0,\ y_i^0 + v_i^0)$ 和 $(x_j^0 + u_j^0, y_j^0 + v_j^0)$，可计算出变形后任意时刻 t 局部坐标系 x_1y_1 与结构坐标系 x_0y_0 的夹角 α 及局部坐标系 x_2y_2 与局部坐标系 x_1y_1 的夹角 β 如下：

$$\begin{cases} \alpha = \arctan\left(\dfrac{y_b^0 + v_b^0 - y_a^0 - v_a^0}{x_b^0 + u_b^0 - x_a^0 - u_a^0}\right) \\ \beta = \arctan\left(\dfrac{y_j^0 + v_j^0 - y_i^0 - v_i^0}{x_j^0 + u_j^0 - x_i^0 - u_i^0}\right) - \alpha \end{cases} \tag{4}$$

设变形后 a 节点、b 节点和 i 点、j 点在局部坐标系

x_1y_1 里的坐标分别为 (x_a,y_a)、(x_b,y_b)、(x_i,y_i) 和 (x_j,y_j)，则有：

$$x_a=y_a=y_b=0,$$

$$x_b=\sqrt{(x_b^0+u_b^0-x_a^0-u_a^0)^2+(y_b^0+v_b^0-y_a^0-v_a^0)^2},$$

$$\begin{Bmatrix}x_i\\y_i\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x_i^0+u_i^0-x_a^0-u_a^0\\y_i^0+v_i^0-y_a^0-v_a^0\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}x_j\\y_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x_j^0+u_j^0-x_a^0-u_a^0\\y_j^0+v_j^0-y_a^0-v_a^0\end{Bmatrix} \tag{5}$$

设 i 点、j 点在局部坐标系 x_2y_2 中的位移向量为 $\boldsymbol{d}'=[u_i' \quad v_i' \quad \theta_i' \quad u_j' \quad v_j' \quad \theta_j']^{\mathrm{T}}$，由图 1 可知恒有：

$$\begin{cases}u_i'=v_i'=v_j'=0\\u_j'=l_{ij}'-l_{ij}^0\\\theta_i'=\theta_i^0-(\alpha+\beta-\alpha_0-\beta_0)\\\theta_j'=\theta_j^0-(\alpha+\beta-\alpha_0-\beta_0)\end{cases} \tag{6}$$

其中：l_{ij}^0 为 ij 杆的初始长度；l_{ij}' 为变形后 ij 杆的长度，其具体计算公式为：

$$\begin{cases}l_{ij}^0=\sqrt{(x_j^0-x_i^0)^2+(y_j^0-y_i^0)^2}\\l_{ij}'=\sqrt{(x_j^0-x_i^0+u_j^0-u_i^0)^2+(y_j^0-y_i^0+v_j^0-v_i^0)^2}\end{cases} \tag{7}$$

对式(4)的两式进行变分得到 $\delta\alpha$ 与 $\delta\beta$ 用 $\delta\boldsymbol{d}^0=[\delta u_a^0 \quad \delta v_a^0 \quad \delta\theta_a^0 \quad \delta u_b^0 \quad \delta v_b^0 \quad \delta\vartheta_b^0]^{\mathrm{T}}$ 表示为：

$$\delta\alpha=\frac{1}{l_{ab}'}\cdot[\sin\alpha \quad -\cos\alpha \quad 0 \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad 0]\cdot\delta\boldsymbol{d}^0$$

$$\delta\beta=\frac{1}{l_{ij}'}\cdot[\sin\gamma \quad -\cos\gamma \quad l_a \quad -\sin\gamma \quad \cos\gamma \quad l_b]\cdot\delta\boldsymbol{d}^0-\delta\alpha \tag{8}$$

式中：

$$\gamma=\alpha+\beta,$$

$$l_a=-l_{ai}\cdot\cos(\gamma-\phi_{ai}-\theta_a^0),$$

$$l_b=l_{bj}\cdot\cos(\gamma-\phi_{bj}-\theta_b^0)。$$

由于 u_i'、v_i'、v_j' 恒为 0，对式(6)的最后三项变分，并结合前面各式，可得到 i 点、j 点在局部坐标系 x_2y_2 下的非零位移变分 $\delta\boldsymbol{d}'=[\delta\theta_i' \quad \delta u_j' \quad \delta\theta_j']^{\mathrm{T}}$ 用 a 节点、b 在结构坐标系 x_0y_0 下的位移变分 $\delta\boldsymbol{d}^0$ 表达形式：

$$\delta\boldsymbol{d}'=\boldsymbol{T}\delta\boldsymbol{d}^0 \tag{9}$$

其中：

$$T=\begin{bmatrix}\dfrac{-\sin\gamma}{l_{ij}'} & \dfrac{\cos\gamma}{l_{ij}'} & 1-\dfrac{l_a}{l_{ij}'} & \dfrac{\sin\gamma}{l_{ij}'} & \dfrac{-\cos\gamma}{l_{ij}'} & \dfrac{-l_b}{l_{ij}'}\\-\cos\gamma & -\sin\gamma & l_{ai}\cdot\sin(\phi_{ai}+\theta_a^0-\gamma) & \cos\gamma & \sin\gamma & -l_{bj}\cdot\sin(\phi_{bj}+\theta_b^0-\gamma)\\\dfrac{-\sin\gamma}{l_{ij}'} & \dfrac{\cos\gamma}{l_{ij}'} & \dfrac{-l_a}{l_{ij}'} & \dfrac{\sin\gamma}{l_{ij}'} & \dfrac{-\cos\gamma}{l_{ij}'} & 1-\dfrac{l_b}{l_{ij}'}\end{bmatrix}$$

设单元 a 节点、b 节点在结构坐标系 x_0y_0 下的节点力向量为 $\boldsymbol{F}^0=[X_a^0 \quad Y_a^0 \quad M_a^0 \quad X_b^0 \quad Y_b^0 \quad M_b^0]^{\mathrm{T}}$，$ij$ 杆在局部坐标系 x_2y_2 下的节点力向量为 $\boldsymbol{q}'=[N_i' \quad Q_i' \quad M_i' \quad N_j' \quad Q_j' \quad M_j']^{\mathrm{T}}$，为导出两者的关系，可做如下推导：先由小应变假设，可得到 $\boldsymbol{q}'$ 与 $\delta\boldsymbol{d}'$ 的关系为：

$$\begin{Bmatrix}N_i'\\Q_i'\\M_i'\\N_j'\\Q_j'\\M_j'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{EA}{l_{ij}^0} & 0\\\dfrac{6EI}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0} & 0 & \dfrac{6EI}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}\\\dfrac{4EI}{l_{ij}^0} & 0 & \dfrac{2EI}{l_{ij}^0}\\0 & \dfrac{EA}{l_{ij}^0} & 0\\-\dfrac{6EI}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0} & 0 & -\dfrac{6EI}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}\\\dfrac{2EI}{l_{ij}^0} & 0 & \dfrac{4EI}{l_{ij}^0}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\delta\theta_i'\\\delta u_j'\\\delta\theta_j'\end{Bmatrix} \tag{10}$$

式中，EA、EI 分别为 ij 杆的抗压刚度和抗弯刚度，由虚功原理可以求得在局部坐标系 x_1y_1 下 a 节点、b 节点上的杆端力 $\boldsymbol{F}=[N_a \quad Q_a \quad M_a \quad N_b \quad Q_b \quad M_b]^{\mathrm{T}}$ 与 ij 杆在局部坐标系 x_2y_2 下的节点力向量 $\boldsymbol{q}'$ 之间的关系为：

$$\begin{Bmatrix}N_a\\Q_a\\M_a\\N_b\\Q_b\\M_b\end{Bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{ai} & B_{ai} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{bj} & B_{bj} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N'_i \\ Q'_i \\ M'_i \\ N'_j \\ Q'_j \\ M''_j \end{Bmatrix} \tag{11}$$

式中：

$$\begin{cases} A_{ai} = -AI_y \cdot \cos\beta + AI_x \cdot \sin\beta \\ B_{ai} = AI_y \cdot \sin\beta + AI_x \cdot \cos\beta \\ A_{bj} = -BJ_y \cdot \cos\beta + BJ_x \cdot \sin\beta \\ B_{bj} = BJ_y \cdot \sin\beta + BJ_x \cdot \cos\beta \end{cases} \tag{12}$$

其中，AI_x、AI_y 及 BJ_x、BJ_y 分别为刚臂 ai 和 bj 在 x_1 轴和 y_1 轴上的投影长度，其计算式为：

$$\begin{cases} AI_x = x_i; & AI_y = y_i \\ BJ_x = x_j - x_b; & BJ_y = y_j \end{cases} \tag{13}$$

带刚臂平面梁单元 a 节点、b 节点在结构坐标系下的节点力向量 $\boldsymbol{F}^0$ 与局部坐标系 x_1y_1 下的节点力向量 $\boldsymbol{F}$ 的关系可通过不考虑单元局部变形的静力学关系导出为：

$$\begin{Bmatrix} X_a^0 \\ Y_a^0 \\ M_a^0 \\ X_b^0 \\ Y_b^0 \\ M_b^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_a \\ Q_a \\ M_a \\ N_b \\ Q_b \\ M_b \end{Bmatrix} \tag{14}$$

因此，通过式(14)和式(11)获得了带刚臂平面梁单元 a 节点、b 节点在结构坐标系下的节点力向量 $\boldsymbol{F}^0$ 与 ij 杆在局部坐标系 x_2y_2 下的节点力向量 $\boldsymbol{q}'$ 的关系为：

$$\boldsymbol{F}^0 = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{q}' \tag{15}$$

式中：

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{ai} & B_{ai} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{bj} & B_{bj} & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

将式(15)两边微分，可得：

$$\delta\boldsymbol{F}^0 = \delta\boldsymbol{t}\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{t}\delta\boldsymbol{q}' \tag{17}$$

为得到用 a 节点、b 节点在结构坐标系 x_0y_0 下的位移变分 $\delta\boldsymbol{d}^0$ 表达 a 节点、b 节点在结构坐标系下的节点力变分 $\delta\boldsymbol{F}^0$ 的关系式，可将 $\delta\boldsymbol{t}\boldsymbol{q}'$ 与 $\boldsymbol{t}\delta\boldsymbol{q}'$ 分别写成 $\boldsymbol{K}_n \cdot \delta\boldsymbol{d}^0$ 和 $\boldsymbol{K}_l \cdot \delta\boldsymbol{d}^0$ 的形式，即有：

$$\delta\boldsymbol{F}^0 = (\boldsymbol{K}_n + \boldsymbol{K}_l) \cdot \delta\boldsymbol{d}^0 = \boldsymbol{K}_t \cdot \delta\boldsymbol{d}^0 \tag{18}$$

$\boldsymbol{K}_t$ 即为所求的带刚臂平面梁单元几何非线性切线刚度矩阵，其中 $\boldsymbol{K}_n$ 与 $\boldsymbol{K}_l$ 的计算如下。

设 l'_{ab} 为变形后 a 节点、b 节点间的长度，则有：

$$l'_{ab} = \sqrt{(y_b^0 + v_b^0 - y_a^0 - v_a^0)^2 + (x_b^0 + u_b^0 - x_a^0 - u_a^0)^2} \tag{19}$$

对式(13)的 A_{ai}、B_{ai}、A_{bj}、B_{bj} 进行变分有：

$$\begin{aligned} \delta A_{ai} &= -\delta AI_y \cdot \cos\beta + \delta AI_x \cdot \sin\beta + \\ &\quad (AI_y \sin\beta + AI_x \cdot \cos\beta) \cdot \delta\beta, \\ \delta B_{ai} &= \delta AI_y \cdot \sin\beta + \delta AI_x \cdot \cos\beta + \\ &\quad (AI_y \cos\beta - AI_x \cdot \sin\beta) \cdot \delta\beta, \\ \delta A_{bj} &= -\delta BJ_y \cdot \cos\beta + \delta BJ_x \cdot \sin\beta + \\ &\quad (BJ_y \sin\beta + BJ_x \cdot \cos\beta) \cdot \delta\beta, \\ \delta B_{bj} &= \delta BJ_y \cdot \sin\beta + \delta BJ_x \cdot \cos\beta + \\ &\quad (BJ_y \cos\beta - BJ_x \cdot \sin\beta) \cdot \delta\beta \end{aligned} \tag{20}$$

结合式(5)对式(12)进行变分有：

$$\begin{aligned} \delta AI_y &= a_1 \cdot \delta\alpha + b_1 \cdot \delta\theta_a^0, \\ \delta AI_x &= c_1 \cdot \delta\alpha + d_1 \cdot \delta\theta_a^0, \\ \delta BJ_y &= a_2 \cdot \delta\alpha + \sin\alpha \cdot (\delta u_a^0 - \delta u_b^0) - \cos\alpha \cdot \\ &\quad (\delta v_a^0 - \delta v_b^0) + l_{bj} \cdot \cos(\alpha - \phi_{bj} - \theta_b^0) \cdot \delta\theta_b^0, \\ \delta BJ_x &= c_2 \cdot \delta\alpha + d_2 \cdot \delta\theta_b^0 \end{aligned} \tag{21}$$

式中：

$$\begin{aligned} a_1 &= -[\cos\alpha \cdot (x_i^0 + u_i^0 - x_a^0 - u_a^0) + \\ &\quad \sin\alpha \cdot (y_i^0 + v_i^0 - y_a^0 - v_a^0)], \\ b_1 &= l_{ai} \cdot \cos(\alpha - \phi_{ai} - \theta_a^0), \\ c_1 &= [-\sin\alpha \cdot (x_i^0 + u_i^0 - x_a^0 - u_a^0) + \\ &\quad \cos\alpha \cdot (y_i^0 + v_i^0 - y_a^0 - v_a^0)], \end{aligned}$$

$d_1 = l_{ai} \cdot \sin(\alpha - \phi_{ai} - \theta_a^0)$，

$a_2 = -[\cos\alpha \cdot (x_j^0 + u_j^0 - x_a^0 - u_a^0) + \sin\alpha \cdot (y_j^0 + v_j^0 - y_a^0 - v_a^0)]$，

$c_2 = [-\sin\alpha \cdot (x_j^0 + u_j^0 - x_a^0 - u_a^0) + \cos\alpha \cdot (y_j^0 + v_j^0 - y_a^0 - v_a^0)]$，

$d_2 = l_{bj} \cdot \sin(\alpha - \phi_{bj} - \theta_b^0)$。

通过式(20)并结合式(21)、式(8)得到δA_{ai}、δB_{ai}、δA_{bj}与δB_{bj}用$\delta \boldsymbol{d}^0$的表达式为：

$$\begin{cases} \delta A_{ai} = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad -A_1 \quad -A_2 \quad A_4] \cdot \delta \boldsymbol{d}^0 \\ \delta B_{ai} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad -B_1 \quad -B_2 \quad B_4] \cdot \delta \boldsymbol{d}^0 \\ \delta A_{bj} = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad -C_1 \quad -C_2 \quad C_4] \cdot \delta \boldsymbol{d}^0 \\ \delta B_{bj} = [D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad -D_1 \quad -D_2 \quad D_4] \cdot \delta \boldsymbol{d}^0 \end{cases} \tag{22}$$

式中，$A_1 \cdots A_4$的值为：

$A_1 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(-a_1 \cdot \cos\beta + c_1 \cdot \sin\beta - I_y \cdot \sin\beta - AI_x \cdot \cos\beta) \cdot \sin\alpha + A\dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \sin\beta + AI_x \cdot \cos\beta) \cdot \sin\gamma$，

$A_2 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(-a_1 \cdot \cos\beta + c_1 \cdot \sin\beta - AI_y \cdot \sin\beta - AI_x \cdot \cos\beta) \cdot (-\cos\alpha) + \dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \sin\beta + AI_x \cdot \cos\beta) \cdot (-\cos\gamma)$，

$A_3 = -b_1 \cdot \cos\beta + d_1 \cdot \sin\beta + \dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \sin\beta + AI_x \cdot \cos\beta) \cdot l_a$，

$A_4 = \dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \sin\beta + AI_x \cdot \cos\beta) \cdot l_b$。

$B_1 \cdots B_4$的值为：

$B_1 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(a_1 \cdot \sin\beta + c_1 \cdot \cos\beta - AI_y \cdot \cos\beta + AI_x \cdot \sin\beta) \cdot \sin\alpha + \dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \cos\beta - AI_x \cdot \sin\beta) \cdot \sin\gamma$，

$B_2 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(a_1 \cdot \sin\beta + c_1 \cdot \cos\beta - AI_y \cdot \cos\beta + AI_x \cdot \sin\beta) \cdot (-\cos\alpha) + \dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \cos\beta - AI_x \cdot \sin\beta) \cdot (-\cos\gamma)$，

$B_3 = b_1 \cdot \sin\beta + d_1 \cdot \cos\beta + \dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \cos\beta - AI_x \cdot \sin\beta) \cdot l_a$，

$B_4 = \dfrac{1}{l'_{ij}}(AI_y \cdot \cos\beta - AI_x \cdot \sin\beta) \cdot l_b$。

$C_1 \cdots C_4$的值为：

$C_1 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(-a_2 \cdot \cos\beta + c_2 \cdot \sin\beta - BJ_y \cdot \sin\beta - BJ_x \cdot \cos\beta) \cdot \sin\alpha + \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \sin\beta + BJ_x \cdot \cos\beta) \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\beta$，

$C_2 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(-a_2 \cdot \cos\beta + c_2 \cdot \sin\beta - BJ_y \cdot \sin\beta - BJ_x \cdot \cos\beta) \cdot (-\cos\alpha) + \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \sin\beta + BJ_x \cdot \cos\beta) \cdot (-\cos\gamma) + \cos\alpha \cdot \cos\beta$，

$C_3 = \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \sin\beta + BJ_x \cdot \cos\beta) \cdot l_a$，

$C_4 = d_2 \cdot \sin\beta + \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \sin\beta + BJ_x \cdot \cos\beta) \cdot l_b - l_{bj} \cdot \cos(\alpha - \phi_{bj} - \theta_b^0) \cdot \cos\beta$。

$D_1 \cdots D_4$的值为：

$D_1 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(a_2 \cdot \sin\beta + c_2 \cdot \cos\beta - BJ_y \cdot \cos\beta + BJ_x \cdot \sin\beta) \cdot \sin\alpha + \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \cos\beta - BJ_x \cdot \sin\beta) \cdot \sin\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta$，

$D_2 = \dfrac{1}{l'_{ab}}(a_2 \cdot \sin\beta + c_2 \cdot \cos\beta - BJ_y \cdot \cos\beta + BJ_x \cdot \sin\beta) \cdot (-\cos\alpha) + \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \cos\beta - BJ_x \cdot \sin\beta) \cdot (-\cos\gamma) - \cos\alpha \cdot \sin\beta$，

$D_3 = \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \cos\beta - BJ_x \cdot \sin\beta) \cdot l_a$，

$D_4 = d_2 \cdot \cos\beta + \dfrac{1}{l'_{ij}}(BJ_y \cdot \cos\beta - BJ_x \cdot \sin\beta) \cdot l_b + l_{bj} \cdot \cos(\alpha - \phi_{bj} - \theta_b^0) \cdot \sin\beta$。

对式(16)进行变分并结合式(8)、式(21)可得到$\delta \boldsymbol{tq}' = \boldsymbol{K}_n \cdot \delta \boldsymbol{d}^0$中$\boldsymbol{K}_n$的具体表达式为：

$$K_n=\begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & -n_1 & -n_2 & n_4 \\ n_5 & n_6 & n_7 & -n_5 & -n_6 & n_8 \\ n_9 & n_{10} & n_{11} & -n_9 & -n_{10} & n_{12} \\ n_{13} & n_{14} & n_{15} & -n_{13} & -n_{14} & n_{16} \\ n_{17} & n_{18} & n_{19} & -n_{17} & -n_{18} & n_{20} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & -n_{21} & -n_{22} & n_{24} \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中：

$$n_1=\frac{-(\sin\gamma\cdot N_i'+\cos\gamma\cdot Q_i')\cdot\sin\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_2=\frac{(\sin\gamma\cdot N_i'+\cos\gamma\cdot Q_i')\cdot\cos\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_3=\frac{-(\sin\gamma\cdot N_i'+\cos\gamma\cdot Q_i')\cdot l_a}{l_{ij}'},$$

$$n_4=\frac{-(\sin\gamma\cdot N_i'+\cos\gamma\cdot Q_i')\cdot l_b}{l_{ij}'},$$

$$n_5=\frac{(\cos\gamma\cdot N_i'-\sin\gamma\cdot Q_i')\cdot\sin\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_6=\frac{-(\cos\gamma\cdot N_i'-\sin\gamma\cdot Q_i')\cdot\cos\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_7=\frac{(\cos\gamma\cdot N_i'-\sin\gamma\cdot Q_i')\cdot l_a}{l_{ij}'},$$

$$n_8=\frac{(\cos\gamma\cdot N_i'-\sin\gamma\cdot Q_i')\cdot l_b}{l_{ij}'},$$

$$n_9=A_1\cdot N_i'+B_1\cdot Q_i',$$

$$n_{10}=A_2\cdot N_i'+B_2\cdot Q_i',$$

$$n_{11}=A_3\cdot N_i'+B_3\cdot Q_i',$$

$$n_{12}=A_4\cdot N_i'+B_4\cdot Q_i',$$

$$n_{13}=\frac{-(\sin\gamma\cdot N_j'+\cos\gamma\cdot Q_j')\cdot\sin\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_{14}=\frac{(\sin\gamma\cdot N_j'+\cos\gamma\cdot Q_j')\cdot\cos\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_{15}=\frac{-(\sin\gamma\cdot N_j'+\cos\gamma\cdot Q_j')\cdot l_a}{l_{ij}'},$$

$$n_{16}=\frac{-(\sin\gamma\cdot N_j'+\cos\gamma\cdot Q_j')\cdot l_b}{l_{ij}'},$$

$$n_{17}=\frac{(\cos\gamma\cdot N_j'-\sin\gamma\cdot Q_j')\cdot\sin\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_{18}=\frac{-(\cos\gamma\cdot N_j'-\sin\gamma\cdot Q_j')\cdot\cos\gamma}{l_{ij}'},$$

$$n_{19}=\frac{(\cos\gamma\cdot N_j'-\sin\gamma\cdot Q_j')\cdot l_a}{l_{ij}'},$$

$$n_{20}=\frac{(\cos\gamma\cdot N_j'-\sin\gamma\cdot Q_j')\cdot l_b}{l_{ij}'},$$

$$n_{21}=C_1\cdot N_j'+D_1\cdot Q_j',$$

$$n_{22}=C_2\cdot N_j'+D_2\cdot Q_j',$$

$$n_{23}=C_3\cdot N_j'+D_3\cdot Q_j',$$

$$n_{24}=C_4\cdot N_j'+D_4\cdot Q_j'。$$

对式(10)进行变分并结合式(16)和式(9)，得到 $t\delta\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{K}_l\cdot\delta\boldsymbol{d}^0$ 中 $\boldsymbol{K}_l$ 的表达式为：

$$\boldsymbol{K}_l=\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & -l_1 & -l_2 & l_4 \\ l_2 & l_5 & l_6 & -l_2 & -l_5 & l_7 \\ l_8 & l_9 & l_{10} & -l_8 & -l_9 & l_{11} \\ -l_1 & -l_2 & -l_3 & l_1 & l_2 & -l_4 \\ -l_2 & -l_5 & -l_6 & l_2 & l_5 & -l_7 \\ l_{12} & l_{13} & l_{14} & -l_{12} & -l_{13} & l_{15} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中：

$$l_1=\frac{12EI\sin^2\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}+\frac{EA\cdot\cos^2\gamma}{l_{ij}^0},$$

$$l_2=\frac{-12EI\sin\gamma\cdot\cos\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}+\frac{EA\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma}{l_{ij}^0},$$

$$l_3=\frac{-6EI\sin\gamma}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}+\frac{12EI\cdot l_a\cdot\sin\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}-\frac{EA\cdot L_{ai}\cdot\cos\gamma\cdot\sin(\phi_{ai}+\theta_a^0-\gamma)}{l_{ij}^0},$$

$$l_4=\frac{-6EI\sin\gamma}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}+\frac{12EI\cdot l_b\cdot\sin\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}+\frac{EA\cdot L_{bj}\cdot\cos\gamma\cdot\sin(\phi_{bj}+\theta_b^0-\gamma)}{l_{ij}^0},$$

$$l_5=\frac{12EI\cos^2\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}+\frac{EA\cdot\sin^2\gamma}{l_{ij}^0},$$

$$l_6=\frac{6EI\cos\gamma}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}-\frac{12EI\cdot l_a\cdot\cos\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}-\frac{EA\cdot L_{ai}\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\phi_{ai}+\theta_a^0-\gamma)}{l_{ij}^0},$$

$$l_7=\frac{6EI\cos\gamma}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}-\frac{12EI\cdot l_b\cdot\cos\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}+\frac{EA\cdot L_{bj}\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\phi_{bj}+\theta_b^0-\gamma)}{l_{ij}^0},$$

$$l_8=\frac{-12EI\cdot B_{ai}\cdot\sin\gamma}{l_{ij}'\cdot l_{ij}^0\cdot l_{ij}^0}-\frac{6EI\cdot\sin\gamma}{l_{ij}^0\cdot l_{ij}'}+$$

$$\frac{EA \cdot A_{ai} \cdot \cos\gamma}{l_{ij}^0},$$

$$l_9 = \frac{12EI \cdot B_{ai} \cdot \cos\gamma}{l'_{ij} \cdot l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} + \frac{6EI \cdot \cos\gamma}{l_{ij}^0 \cdot l'_{ij}} + \frac{EA \cdot A_{ai} \cdot \sin\gamma}{l_{ij}^0},$$

$$l_{10} = \frac{6EI \cdot B_{ai}}{l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} + \frac{4EI}{l_{ij}^0} - \frac{12EI \cdot l_a \cdot B_{ai}}{l'_{ij} \cdot l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} - \frac{6EI \cdot l_a}{l_{ij}^0 \cdot l'_{ij}} - \frac{EA \cdot L_{ai} \cdot A_{ai} \cdot \sin(\phi_{ai} + \theta_a^0 - \gamma)}{l_{ij}^0},$$

$$l_{11} = \frac{6EI \cdot B_{ai}}{l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} + \frac{2EI}{l_{ij}^0} - \frac{12EI \cdot l_b \cdot B_{ai}}{l'_{ij} \cdot l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} - \frac{6EI \cdot l_b}{l_{ij}^0 \cdot l'_{ij}} + \frac{EA \cdot L_{bj} \cdot A_{ai} \cdot \sin(\phi_{bj} + \theta_b^0 - \gamma)}{l_{ij}^0},$$

$$l_{12} = \frac{12EI \cdot B_{bj} \cdot \sin\gamma}{l'_{ij} \cdot l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} - \frac{6EI \cdot \sin\gamma}{l_{ij}^0 \cdot l'_{ij}} - \frac{EA \cdot A_{bj} \cdot \cos\gamma}{l_{ij}^0},$$

$$l_{13} = \frac{-12EI \cdot B_{bj} \cdot \cos\gamma}{l'_{ij} \cdot l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} + \frac{6EI \cdot \cos\gamma}{l_{ij}^0 \cdot l'_{ij}} - \frac{EA \cdot A_{bj} \cdot \sin\gamma}{l_{ij}^0},$$

$$l_{14} = \frac{-6EI \cdot B_{bj}}{l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} + \frac{2EI}{l_{ij}^0} + \frac{12EI \cdot l_a \cdot B_{bj}}{l'_{ij} \cdot l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} - \frac{6EI \cdot l_a}{l_{ij}^0 \cdot l'_{ij}} + \frac{EA \cdot L_{ai} \cdot A_{bj} \cdot \sin(\phi_{ai} + \theta_a^0 - \gamma)}{l_{ij}^0},$$

$$l_{15} = \frac{-6EI \cdot B_{bj}}{l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} + \frac{4EI}{l_{ij}^0} + \frac{12EI \cdot l_b \cdot B_{bj}}{l'_{ij} \cdot l_{ij}^0 \cdot l_{ij}^0} - \frac{6EI \cdot l_b}{l_{ij}^0 \cdot l'_{ij}} - \frac{EA \cdot L_{bj} \cdot A_{bj} \cdot \sin(\phi_{bj} + \theta_b^0 - \gamma)}{l_{ij}^0}。$$

2　不平衡力算法及迭代步骤

不平衡力的计算是非线性分析程序中的关键，在本文中不平衡力是完全基于全量平衡计算的，具体方法为：基于单元 a 节点、b 节点在截止到计算阶段的迭代步所得的总位移，利用式(2)求出 i 点、j 点在结构坐标系 x_0y_0 中的位移，利用式(6)求出 i 点、j 点在局部坐标系 x_2y_2 下的位移向量，利用式(10)求出点 i、点 j 在局部坐标系 x_2y_2 下的力向量，利用式(11)和式(14)获得带刚臂平面杆单元 a 节点、b 节点在结构坐标系下的节点力向量，再叠加形成结构的抗力矩阵，截止到计算阶段已施加到结构上的荷载矩阵与抗力矩阵之差就形成不平衡力矩阵。

综上所述，第 i 阶段的迭代步骤为：

1) 根据结构坐标系下的总位移向量 $\boldsymbol{\delta}$ 确定单元左右 a 节点、b 节点在结构坐标系下的位移向量 $\boldsymbol{d}^0$，利用式(2)求出 i 点、j 点在结构坐标系 x_0y_0 中的位移 $\boldsymbol{d}_i^0$ 和 $\boldsymbol{d}_j^0$，利用式(6)求出 i 点、j 点在局部坐标系 x_2y_2 下的位移向量 $\boldsymbol{u}'_j$。

2) 通过位移向量 $\boldsymbol{u}'_j$ 由式(10)形成单元在局部坐标系下的力向量 $\boldsymbol{q}'$，再由结构当前构形的几何参数由式(23)形成 $\boldsymbol{k}_n$。

3) 结合式(16)、式(10)、式(9)由式(24)形成 $\boldsymbol{k}_l$，与 $\boldsymbol{k}_n$ 相加形成单元切线刚度矩阵 $\boldsymbol{k}_t$，计算涉及到的几何参数都是结构当前构形下的值。

4) 将 i 点、j 点在局部坐标系下的力向量 $\boldsymbol{q}'$ 由式(11)和式(14)转换到结构坐标系得到 $\boldsymbol{F}^0$。

5) 对所有单元重复步骤 1)~步骤 4)，生成结构切线刚度矩阵 $\boldsymbol{k} = \sum \boldsymbol{k}_t$ 和节点合力 $\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}^0$；

6) 计算不平衡力 $\Delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{F}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为截止到第 i 阶段施加的总外荷载的等效节点力；

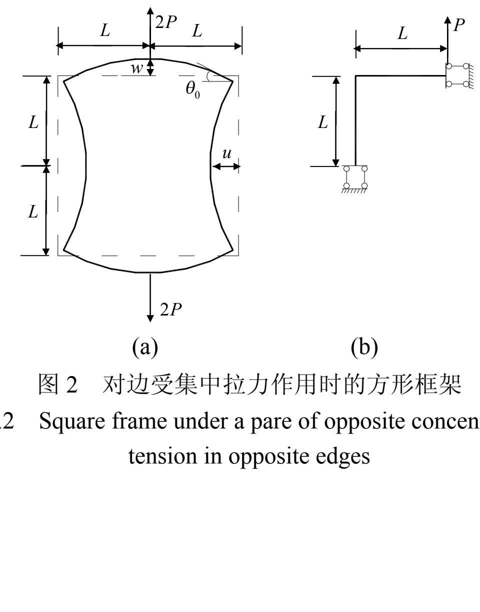
7) 求解结构方程 $\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{\delta} = \Delta\boldsymbol{R}$，得到节点位移增量 $\Delta\boldsymbol{\delta}$，并将其叠加到总位移向量 $\boldsymbol{\delta}$ 中。

8) 收敛判断，如收敛，则转到第 i+1 阶段计算，如不收敛，则返回步骤 1)，进行下一次迭代计算。

3　算例分析

以下算例的解析解均见文献[11]。

例 1. 如图 2(a)所示为方框架在对边中点受一对集中拉力 $2P$ 作用，框架每条边长为 $2L$、弯曲刚度为 EI、框架对边受荷点垂直位移为 w、框架另对



(a)　(b)

图 2　对边受集中拉力作用时的方形框架

Fig.2　Square frame under a pare of opposite concentrated tension in opposite edges

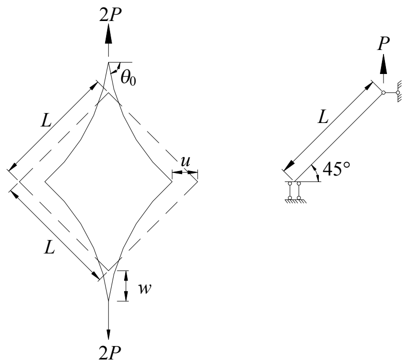
边中点水平位移为u、框架结点转角为θ_0。根据荷载及结构对称的特点，取 1/4 结构进行计算，如图 2(b)所示，每杆划分成 10 个单元， 共分成 20 个单元，所得计算结果见表 1。

表 1 方形框架受集中拉力作用时的变形

Table 1 Deformation of square frame under a pare of opposite concentrated tension

$\frac{PL^2}{EI}$	w/L		u/L		θ_0	
	解析解	本文解	解析解	本文解	解析解	本文解
1.0	0.17889	0.17897	0.11699	0.11699	0.21082	0.21090
2.0	0.30833	0.30860	0.21453	0.21453	0.35658	0.35685
3.0	0.40287	0．40337	0.29298	0.29298	0.45752	0.45797
4.0	0.47375	0.47450	0.35581	0.35581	0.52892	0.52954

例 2. 如图 3(a)所示为铰接方棱形框架在对角点受一对拉力$2P$作用，框架每条边长为L、弯曲刚度为EI、框架受力角点垂直位移为w、不受力角点水平位移为u、框架边与水平方向的夹角为θ_0。根据荷载及结构对称的特点，取 1/4 结构进行计算，如图 3(b)所示，划分成 10 个单元，采用荷载增量法，迭代容许误差限定为10^{-5}，所得计算结果见表 2。



(a) (b)

图 3 对角点受拉力作用时的铰接方棱形框架

Fig.3 Diamond-shaped frame under a pare of opposite concentrated tensions in opposite angles

表 2 铰接方棱形框架受拉力作用时的变形

Table 2 Deformation of diamond-shaped frame under a pare of opposite concentrated compression

$\frac{PL^2}{EI}$	w/L		u/L		θ_0	
	解析解	本文解	解析解	本文解	解析解	本文解
1.0	0.11252	0.11256	0.13960	0.13959	1.05144	1.05151
2.0	0.16429	0.16444	0.23184	0.23190	1.20263	1.20290
3.0	0.19183	0.19206	0.29447	0.29461	1.29613	1.29656
5.0	0.21931	0.21967	0.37322	0.37353	1.40209	1.40275
10.0	0.24380	0.24435	0.46601	0.46658	1.50351	1.50432

例 3. 如图 4 所示为悬臂端承受集中荷载P的大挠度变刚度悬臂梁，梁跨为L、左半跨抗压和抗弯刚度分别为EA和EI、右半跨抗压和抗弯刚度为E_1A_1和E_1I_1，梁端水平位移为u、垂直位移为w、转角为θ_0，为验证考虑刚臂效应情况下本文推导的平面梁元切线刚度矩阵，对本算例按以下两种方法进行计算：

方法 1) 按无刚臂的平面梁元进行计算，将梁均匀划分成 20 个单元，E_1A_1、E_1I_1与EA、EI的比值(通过调整弹性模量E实现)分别取 1、2、5、10、100、200、300、500 进行计算，从计算结果发现，计算结果开始对比值反应较敏感，但在大于 100 以后基本上就没有变化了，将比值等于 200 时的计算结果列入表 3，此种情况下可以认为右半跨近似为刚臂了。

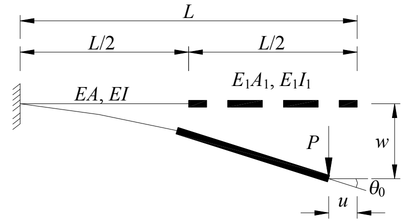


图 4 集中荷载作用下的大挠度变刚度悬臂梁

Fig.4 Cantilever of large deflection under concentrated load

方法 2) 将左半跨梁从左至右均匀划分成 20 个单元，将右半跨梁作为其相邻单元的刚臂，用本文推导的带刚臂的平面梁元刚度矩阵进行计算。

两种方法所得的计算结果如表 3 所示，作为比较，还将比值为 1(即沿梁全长刚度相同)时w/L的解析解也列于表 3 最右列。

表 3 变刚度悬臂梁承受集中荷载时的大挠度变形

Table 3 Cantilever's deformation under concentrated load

$\frac{PL^2}{EI}$	w/L		u/L		θ_0		w/L
	方法 1	方法 2	方法 1	方法 2	方法 1	方法 2	解析解
1.0	0.27190	0.27154	0.43605	0.43501	0.35577	0.35495	0.30172
2.0	0.46340	0.46317	0.13362	0.13352	0.62802	0.62710	0.49346
3.0	0.58269	0.58245	0.22339	0.22325	0.81882	0.81770	0.60325
4.0	0.65796	0.65769	0.29912	0.29894	0.95403	0.95272	0.66996
5.0	0.70829	0.70765	0.36134	0.36060	1.05430	1.05199	0.71379
6.0	0.74276	0.74253	0.41095	0.41081	1.12876	1.12743	0.74457

从表 3 可看出：方法 1 与方法 2 的计算结果是非常接近的；在PL^2/EI值较小时，两种方法的计算结果与沿梁全长刚度相同时的解析解相差较大。以w/L为例，在$PL^2/EI=1$时，两者相差$(0.30172-0.27154)/0.27154=11.2\%$，但在$PL^2/EI=6$时，两者相差$(0.74457-0.74253)/0.74253=0.27\%$，显然这也是符合实际情况的。

以上算例表明：本文推导的两端带任意刚臂的平面梁元的切线刚度矩阵表达式是正确的，可用于

有刚臂、无刚臂的平面梁结构几何非线性分析。

4 结论

本文根据带刚臂平面梁元在受力后的运动和变形特点，基于共旋坐标法推导出两端带任意刚臂的平面梁元，较好解决了平面梁元在相交处可能存在的刚性连接问题；这种非线性单元具有列式清晰、力学概念明确的优点，相应程序可用于无刚臂和有刚臂的平面梁结构几何非线性分析。

参考文献：

[1] 肖汝诚. 桥梁结构分析及程序系统[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002: 88－91.
Xiao Rucheng. Analysis of bridge structures and program system [M]. Beijing: China Communication Press, 2002: 88－91. (in Chinese)

[2] 罗喜垣, 肖汝城, 项海帆. 基于精确解析解的索单元[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2005, 33(4): 445－450.
Luo Xiyuan, Xiao Rucheng, Xiang Haifan. Cable element based on exact analytical expressions [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2005, 33(4): 445－450. (in Chinese)

[3] 陈常松, 颜东煌, 陈政清. 带刚臂的两节点精确悬链线索元的非线性分析[J]. 工程力学, 2007, 24(5): 29－34.
Chen Changsong, Yan Donghuang, Chen Zhengqing. Nonlinear analysis of two-node accurate catenary cable element with arbitrary rigid arms [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(5): 29－34.(in Chinese)

[4] 颜东煌, 陈常松. 带刚臂空间梁单元及其在斜拉桥计算中的应用[J]. 湖南大学学报, 1999, 26(2): 72－77.
Yan Donghuang, Chen Changsong. Space beam element with stiff arm and its application in cable stayed bridges [J]. Journal of Hunan University, 1999, 26(2): 72－77. (in Chinese)

[5] 刘睫, 梅占馨, 傅学怡. 带刚臂超高层结构工作性能研究[J]. 西安公路交通大学学报, 1998, 18(3): 28－33.
Liu Jie, Mei Zhanxin, Fu Xueyi. Structural feature studies of super highrise building with stiffen outriggers [J]. Journal of Xi’an Highway University, 1998, 18(3): 28－33. (in Chinese)

[6] 吕和祥, 朱菊芬, 马莉颖. 大转动梁的几何非线性分析讨论[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(4): 485－490.
Lü Hexiang, Zhu Jufen, Ma Liying. Discussion of analyzing of geometric non-linear beams with large rotations [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1995, 12(4): 485－490. (in Chinese)

[7] Saafan S A. Theorefical analysis of suspension bridges [J]. Journal of the Structural Division, ASCE, 1966, 92(ST4): 1－11.

[8] Fleming J F. Nonlinear static analysis of cable-stayed bridge structures [J]. Computers and Structures, 1979, 10: 621－635.

[9] 蔡松柏, 沈蒲生. 大转动平面梁有限元分析的共旋坐标法[J]. 工程力学, 2006, 23(增刊 I): 69－72, 68.
Cai Songbai, Shen Pusheng. Co-rotational procedure for finite element analysis of plane beam element of large rotational displacement [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(Suppl I): 69－72, 68. (in Chinese)

[10] 邓继华, 蔡松柏. 平面桁架的几何非线性有限元分析[J]. 长沙交通学院学报, 2005, 21(4): 39－41.
Deng Jihua, Cai Songbai. Finite element analysis of geometric nonlinearity for plane truss [J]. Journal of Changsha Communications University, 2005, 21(4): 39－41. (in Chinese)

[11] 陈至达. 杆、板、壳大变形理论[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 68－74.
Chen Zhida. Large deflection theory of truss,plate and shell [M]. Beijing: Science Press, 1996: 68－74. (in Chinese)