

文章编号: 1000-4750(2012)11-0115-08

联肢剪力墙的刚度、稳定性以及二阶效应

童根树, 苏 健

(浙江大学土木工程系, 浙江, 杭州 310058)

摘 要: 该文采用连续化模型, 对双肢剪力墙结构平面内稳定性进行了研究, 求得了顶部作用集中压力时临界荷载的精确显式表达式和显式屈曲波形。这个临界荷载公式表明, 联肢剪力墙是一种双重抗侧力结构, 并且可以采用串并联电路模型来表示两者之间的相互作用。串并联模型推广到线性分析的情况, 得到顶部抗侧刚度的显式表达式, 与精确解进行了比较。推导了顶部作用竖向集中荷载时, 在不同水平荷载作用下结构的侧移、墙肢弯矩、墙肢轴力和连梁弯矩放大系数, 并提供了近似计算公式。

关键词: 双肢剪力墙; 屈曲; 抗侧刚度; 放大系数; 连续介质方法

中图分类号: TU311.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.03.0139

RIGIDITY & BUCKLING OF COUPLED SHEAR WALLS AND SECOND ORDER EFFECT

TONG Gen-shu, SU Jian

(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China)

Abstract: Using the continuum model, this paper made a study on buckling of coupled shear walls. A closed form solution and an explicit formula for the buckling load were obtained. The form of the formula implies that the coupled shear wall is a kind of dual structural system, and the interaction between two structural components may be elucidated by a series-parallel circuit. Based on this circuit, an explicit expression for the lateral stiffness of coupled shear wall was found and compared with the exact solution. Amplification factors of drift, bending moments and axial forces in walls and bending moments in the link beams due to the second order effect were studied and a simple formula for the amplification factor was also provided.

Key words: coupled shear wall; buckling; stiffness; amplification factor; continuous medium method

实际工程中, 建筑的墙体上往往有大量竖向排列的门洞或者窗洞, 洞口将整片墙体分割成两个墙肢, 而洞口之间的混凝土梁或者混凝土墙体可以起到对墙肢的弯曲约束作用, 称之为连梁。这种由平面内墙体和与其相连的抗弯连梁组成的结构称为双肢剪力墙结构。

对于双肢剪力墙结构, 以往的研究大都为一阶线性静力分析或动力分析, 对其结构稳定性方面的研究比较少。Stafford 和 Coull(1991)^[1]是高层结构方面有影响的专著, 其中的第 10 章专门介绍了联肢剪力墙的各种线性分析方法, 其中也介绍了联肢剪

力墙连续化模型, 建立了一阶静力平衡方程, 研究了联肢剪力墙结构的静力特性, 但是对于联肢墙的稳定性没有涉及; Coull 和 Puri(1967, 1968)^[2-3]同样采用连续化模型, 分别分析了剪力墙截面的厚度和高度沿结构高度变化时, 在横向荷载作用下的静力特性, 给出了沿高度位移变化曲线。Rosman(1973)^[4]研究了剪力墙结构的振动和稳定性, 其中包含有联肢剪力墙, 给出了一些表格。文献[5]采用离散-连续化方法分析了弹性约束的双肢剪力墙的振动特性, 并且给出了最大自振频率的加强连梁的最优位置。王寿康和张毛心(1996)^[6]采用能

收稿日期: 2011-03-15; 修改日期: 2011-05-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(50578140); 浙江省重点科技创新团队(2010R50034)

通讯作者: 童根树(1963-), 男, 浙江建德人, 教授, 博士, 博导, 主要从事钢结构的稳定性和抗震研究(E-mail: tonggs@zju.edu.cn).

作者简介: 苏 健(1981-), 男, 山西长治人, 博士生, 主要从事钢结构的稳定性研究(E-mail: sjsujian@gmail.com).

量法, 假设位移函数, 求得厚度变化的联肢剪力墙
的临界荷载, 提供了表格。陈波(2003)^[7]建立总势能,
采用级数形式的位移函数, 研究了多肢剪力墙的稳定
性, 给出了级数形式的近似解。

对于传统的双重抗侧力结构体系, 例如框架-
剪力墙体系, 以及更为一般的是两个弯剪型结构通
过楼板链接而成的双重抗侧力体系的稳定性, 文
献[8—12]进行过一系列的研究, 特别是文献[10],
提供了双重弯剪型结构稳定性的一个解析解, 为理
解两个抗侧力子结构之间的相互作用及其稳定性
提供了极好的参考资料。

本文在文献[1]连续化模型的基础上, 建立双肢
剪力墙失稳时的平衡微分方程, 推导出整体屈曲荷
载的比较简单解析解表达式, 提出了串并联电路
模型来解释和阐述联肢剪力墙各个部分的刚度对
结构稳定性的贡献, 串并联模型推广到线性分析,
求出了联肢剪力墙抗侧刚度的简单显式表达式, 分
析了在不同的水平荷载作用下整体结构的位移和
墙肢轴力、弯矩以及连梁弯矩放大系数。

1 基本微分方程的推导及屈曲荷载的 解析解

1.1 基本假定及变形协调条件

如图 1 所示双肢剪力墙结构, 两墙肢各自的抗
弯刚度分别为 I_1 、 I_2 , 墙肢的中心距为 l , 连梁的
净跨为 b , 连梁等效抗弯刚度为 EI_c 。两墙肢分别
受到顶部集中荷载 P_1 、 P_2 的作用。为了得到一般
的规律, 我们采用连续化方法, 将水平连接构件沿
建筑高度的影响效果用各个竖向构件间形成的等效
连续介质所替代。文献[1]采用以下假定: 墙肢和连
梁的截面沿高度保持不变; 各结构构件变形符合平
截面假定; 考虑剪切变形后的等效抗弯刚度为 EI_c 。

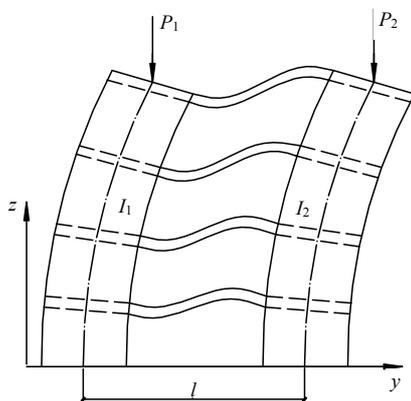


图 1 联肢剪力墙结构

Fig.1 Coupled shear wall structure

的各个连梁可以等效为单位高度上抗弯刚度为
 EI_c/h 的连续介质, h 为层高; 两墙肢的水平方向
位移相同; 两墙肢由于弯曲变形引起的转角沿建筑
高度处处相等。

根据以上假定, 连梁上分布的轴向力、弯矩及
剪力可以分别由连续分布的每单位高度上的等效
荷载集度 n 、 m 、 q 替代。沿连续介质的反弯点连
线竖向切开, 此处只存在单位高度上分布的剪力流
集度 $q(z)$ 和轴向力集度 $n(z)$, 任一高度 z 处的任
一片墙肢上的轴向力 N 等于该层以上的连续介质中
剪力流的积分:

$$N = \int_z^H q dz \quad (1a)$$

表示成微分形式为:

$$q = -\frac{dN}{dz} \quad (1b)$$

文献[1]提供的反弯点竖向变形协调条件是:

$$l \frac{dy}{dz} + \frac{\bar{b}^3 h}{12EI_c} \cdot \frac{dN}{dz} - \frac{1}{E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \int_0^z N dz = 0 \quad (2)$$

式中: \bar{b} 是连梁的有效跨度, 在钢筋混凝土剪力墙
的情况下, $\bar{b} = b + 0.5h_b$; I_c 是考虑了剪切变形影
响折减后连梁的等效抗弯刚度。记连梁截面的惯性
矩是 I_b , 面积是 A_b , 剪切系数 k_s 。

$$\text{则 } \frac{\bar{b}^2}{12EI_c} = \frac{\bar{b}^2}{12EI_b} + \frac{k_s}{GA_b}$$

$$\text{故 } I_c = I_b \frac{GA_b}{GA_b/k_s + 12EI_b/\bar{b}^2}$$

1.2 平衡微分方程的建立及屈曲荷载的求解

给双肢剪力墙结构一个水平扰动, 将变形后的
结构沿连梁连续介质反弯点切开, 取任意截面 z 处
以上部分作为隔离体, 如图 2 所示, 弯矩以顺时针
方向为正, $y(z)$ 为隔离体中任意高度截面处的水平

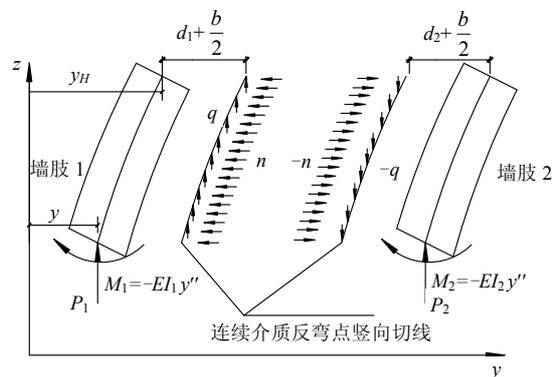


图 2 联肢剪力墙结构的隔离体示意图

Fig.2 Isolated element of coupled shear wall structure

相对位移。对截面 z 的形心取矩，得到两个墙肢平衡微分方程分别为：

$$-EI_1 y'' + P_1(y_H - y) - \int_z^H n(\zeta - z) d\zeta - \int_z^H [(0.5b + d_1) + (y(\zeta) - y)] q d\zeta + M = 0 \quad (3a)$$

$$-EI_2 y'' + P_2(y_H - y) + \int_z^H n(\zeta - z) d\zeta - \int_z^H [(0.5b + d_2) - (y(\zeta) - y)] q dz = 0 \quad (3b)$$

其中： $\int_z^H n(\zeta - z) d\zeta$ 为连梁轴力集度 n 对截面 z 形心产生的弯矩； M 是外荷载的弯矩。式(3a)与式(3b)相加，记 $I_w = I_1 + I_2$ ， $P = P_1 + P_2$ ，得到：

$$-EI_w y'' + P(y_H - y) - l \int_z^H q dz + M = 0 \quad (4)$$

将 $N = \int_z^H q dz$ ，代入式(4)得：

$$N = \frac{1}{l} (-EI_w y'' - Py + Py_H + M) \quad (5)$$

对式(5)分别求一阶和二阶导数得：

$$\frac{dN}{dz} = \frac{1}{l} (-EI_w y''' - Py' + M') \quad (6)$$

$$\frac{d^2 N}{dz^2} = \frac{1}{l} (-EI_w y^{(4)} - Py'' + M'') \quad (7)$$

记 $I_0 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} l^2$ ，注意到 $\frac{12EI_c}{hb^3}$ 是沿高度 h 的平

均，量纲是 N/m^2 ， $\frac{12EI_c}{hb^3} l^2$ 是力的量纲，记为 S ，

$$S = \frac{12EI_c}{hb^3} l^2 = P_s \quad (8)$$

对式(2)微分一次得：

$$y'' + \frac{l}{P_s} \cdot \frac{d^2 N}{dz^2} - \frac{l}{EI_0} N = 0 \quad (9)$$

将式(5)、式(7)代入式(9)，记 $I = I_0 + I_w$ ，有：

$$-\frac{EI_w EI_0}{P_s} y^{(4)} + EI \left(1 - \frac{PI_0}{P_s I} \right) y'' + Py = Py_H + M - \frac{EI_0}{P_s} M'' \quad (10)$$

本文首先研究屈曲问题，此时 $M = 0$ 。式(10)的特征方程为：

$$-\frac{EI_w EI_0}{P_s} \lambda^4 + \left(EI - \frac{P}{P_s} EI_0 \right) \lambda^2 + P = 0$$

上式的4个根分别为： $\lambda_{1,2} = \pm \alpha$ ， $\lambda_{3,4} = \pm \beta i$ ，

其中：

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(EIP_s - EI_0 P)^2 + 4P_s P EI_w EI_0} \pm (EIP_s - PEI_0)}{2EI_w EI_0}}$$

屈曲平衡微分方程的解为：

$$y = C_1 \cosh(\alpha z) + C_2 \sinh(\alpha z) + C_3 \cos(\beta z) + C_4 \sin(\beta z) + y_H \quad (11a)$$

其各阶导数是：

$$y' = \alpha(C_1 \sinh(\alpha z) + C_2 \cosh(\alpha z)) + \beta(-C_3 \sin(\beta z) + C_4 \cos(\beta z)) \quad (11b)$$

$$y'' = \alpha^2(C_1 \cosh(\alpha z) + C_2 \sinh(\alpha z)) - \beta^2(C_3 \cos(\beta z) + C_4 \sin(\beta z)) \quad (11c)$$

$$y''' = \alpha^3(C_1 \sinh(\alpha z) + C_2 \cosh(\alpha z)) - \beta^3(-C_3 \sin(\beta z) + C_4 \cos(\beta z)) \quad (11d)$$

$$y^{(4)} = \alpha^4(C_1 \cosh(\alpha z) + C_2 \sinh(\alpha z)) + \beta^4(C_3 \cos(\beta z) + C_4 \sin(\beta z)) \quad (11e)$$

对于联肢剪力墙结构，考察其边界条件：

底部固定端位移和转角为零： $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 0$ ；将 $y'(0) = 0$ 代入变形协调方程式(2)可得 $N'(0) = 0$ ，再代入式(6)得 $y'''(0) = 0$ 。

顶部自由端弯矩为零可得 $y''(H) = 0$ 。

$z = H$ 时， $N(H) = 0$ ，将其代入式(9)得 $N''(H) = 0$ ，再代入式(7)可得 $y^{(4)}(H) = 0$ 。

这样得到5个边界条件。将式(11a)~式(11e)代入边界条件，得到求解 $C_1 \sim C_4$ 、 y_H 这5个待定系数的5个方程：

$$C_1 + C_3 + y_H = 0 \quad (12a)$$

$$\alpha \cdot C_2 + \beta \cdot C_4 = 0 \quad (12b)$$

$$\alpha^3 C_2 - \beta^3 C_4 = 0 \quad (12c)$$

依式(12b)、式(12c)可以直接得知 $C_2 = C_4 = 0$ ，

从顶部的2个边界条件可以得到：

$$(\alpha^2 \cosh(\alpha H)) C_1 - (\beta^2 \cos(\beta H)) C_3 = 0 \quad (12d)$$

$$(\alpha^4 \cosh(\alpha H)) C_1 + (\beta^4 \cos(\beta H)) C_3 = 0 \quad (12e)$$

要使系数有非零解，下式必须成立：

$$\cosh(\alpha H) \cdot \cos(\beta H) = 0$$

因为， $\cosh(\alpha H) > 0$ ，所以 $\cos(\beta H) = 0$ ，由

此得到 $\beta = \frac{1}{H} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$

为求得最小的 P_{cr} ，取 $\beta = \frac{\pi}{2H}$ ，有：

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(EIP_s - EI_0P)^2 + 4P_sPEI_wEI_0} - (EIP_s - PEI_0)}{2EI_wEI_0}} = \frac{\pi}{2H}$$

解得:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} \left(\frac{\frac{EI_w}{EI} \frac{\pi^2 EI_0}{4H^2} + P_s}{P_s + \frac{\pi^2 EI_0}{4H^2}} \right) = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} \left(1 - \frac{I_0}{I_w + I_0} \cdot \frac{\frac{\pi^2 EI_0}{4H^2 P_s}}{1 + \frac{\pi^2 EI_0}{4H^2 P_s}} \right) \quad (13a)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_w}{4H^2} + \frac{\pi^2 EI_0}{4H^2} \left/ \left(1 + \frac{\pi^2 EI_0}{4H^2 P_s} \right) \right. \quad (13b)$$

由此我们发现联肢剪力墙临界荷载的组成:

式(13b)的第一项 $\frac{\pi^2 EI_w}{4H^2} = \frac{\pi^2 E(I_1 + I_2)}{4H^2}$ 是两个墙肢

自己作为独立的(不相互连接的)两片墙时的临界荷载,第二项类似于钢结构中的缀板柱的临界荷载,其中 P_s 是缀板柱截面的剪切刚度。与真正的缀板柱不同的是,缀板柱通常只需要考虑柱肢弯曲,缀板变形可以忽略。这里与缀板柱的柱肢对应的墙肢,其局部弯曲(类似于框架柱的双曲率弯曲)可以忽略,相当于缀板的连梁的弯曲要加以考虑。在文献[13]中将格构柱的失稳理解成剪切失稳和弯曲失稳的相互作用,在弯曲失稳的临界荷载很大的时候,格构柱的临界荷载就等于其剪切刚度 P_s ;而当剪切刚度等于无穷大的时候,其临界荷载就等于弯曲失稳的临界荷载,此时总的临界荷载是实腹柱的临界荷载:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_w}{4H^2} + \frac{\pi^2 EI_0}{4H^2} = \frac{\pi^2 EI}{4H^2} \quad (14)$$

屈曲波形为 $y = y_H \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2H} \right)$, 这与普通的

悬臂柱是一样的。

分析式(13b)可知,双肢剪力墙结构的抗侧性能由3个抗侧柔度决定。这3个柔度分别为:墙肢绕自身形心轴弯曲对应的抗侧柔度、联肢墙的轴压柔度组成的整体抗侧柔度、连梁的变形提供的整体结构的剪切抗侧柔度。将这些柔度比拟为电路中的电阻,按照图3所示的方式连接成一个串并联电路,通过对电路的分析,可以形象的揭示出双肢剪力墙的抗侧机理。

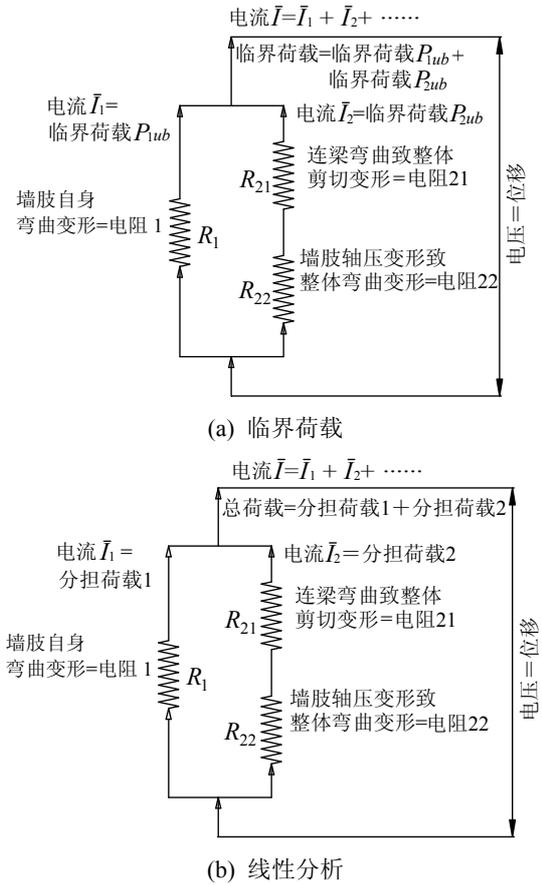


图3 联肢剪力墙内部各部分相互作用的电路比拟
Fig.3 Circuit analog for interaction between stiffness components within couple wall

图3(a)的电路中,总电流是两个分电路电流之和: $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$; 对应于双肢剪力墙结构,则是总的临界荷载是各个子结构单独作用时的临界荷载之和: $P_{cr} = P_{lub} + P_{2ub}$, 这两个临界荷载分别是式(13b)的第1项和第2项。电压被比拟为位移,两个子电路的两端的电压相同代表了子结构的侧向位移相同。

2 双肢剪力墙的抗侧刚度

上述的比拟关系可以推广到线性分析。电压 U 与电流 \bar{I} 和电阻 R 的关系为 $U = \bar{I}R$, 变形与荷载、柔度的关系为 $\Delta = F\delta$ 。在图3(b),电学方面的关系是:

$$\bar{I}_1 = \frac{U}{R_1}, \quad \bar{I}_2 = \frac{U}{R_{21} + R_{22}}$$

在结构中对应的关系式为: $F_1 = \frac{\Delta}{\delta_1}, \quad F_2 =$

$\frac{\Delta}{\delta_{21} + \delta_{22}}$, 所以 $F = F_1 + F_2 = \frac{\Delta}{\delta_1} + \frac{\Delta}{\delta_{21} + \delta_{22}}$ 。

从上式得到:

$$\frac{F}{\Delta} = \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{(\delta_{21} + \delta_{22})} = \frac{F}{\Delta_1} + \frac{F}{\Delta_2} \quad (15)$$

式中, Δ_1 和 Δ_2 分别是两个子结构单独承受 F 时的侧移。因此式(15)的物理意义为: 整体结构的刚度等于两个子结构刚度的简单相加。这相当于电路图中总电流等于分电流之和。相对应的子结构 1 为: 由刚性铰接链杆连接的两个墙肢, 这相当于只考虑两墙肢自身弯曲变形时的结构。子结构 2 为: 两墙肢的抗弯刚度无穷大时的双臂剪力墙, 这相当于只考虑连梁的变形以及墙肢的轴压变形的结构。子结构 1 只发生弯曲变形, 因此 $\Delta_1 = \frac{H^3}{3EI_w}$ 。

子结构 2 的整体位移 Δ_2 由连梁的弯曲变形以及墙肢的轴压变形提供, 根据前面分析, 子结构 2 的结构特征与格构柱完全一致。因此对于子结构 2, 可以当成其为抗弯刚度为 EI_0 , 抗剪刚度为 P_s 的悬臂柱。故 $\Delta_2 = \frac{H}{P_s} + \frac{H^3}{3EI_0}$ 。因此式(15)改用刚度表示即为:

$$K_z = \frac{3EI_w}{H^3} + \frac{3EI_0}{H^3} \frac{1}{1 + \frac{3EI_0}{H^2 P_s}} \quad (16)$$

为验证上述的串并联模型的精确性, 下面对顶部作用水平集中力的双臂剪力墙进行精确的线性

分析。此时的平衡微分方程是:

$$-\frac{EI_w EI_0}{P_s} y^{(4)} + EI y'' = M - \frac{EI_0}{P_s} M'' \quad (17)$$

其中, $M = F(H - z)$ 。根据文献[1]的推导, 可以求得结构位移曲线为:

$$y = C_1 + C_2 z + C_3 \cosh(\gamma z) + C_4 \sinh(\gamma z) - \frac{F}{6EI} (z - H)^3$$

其中, $\gamma = \sqrt{\frac{P_s}{EI_w} + \frac{P_s}{EI_0}}$, 4 个边界条件:

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(H) = 0;$$

$$EI_w y'''(H) - \gamma^2 \cdot EI_w y'(H) = -F \left[1 + \frac{P_s}{2EI_0} H^2 \right]。$$

依此 4 个边界条件求解得:

$$C_1 = -\frac{FHI_0^2 \tanh(\gamma H)}{P_s I^2 \cdot \gamma H} - \frac{FH^3}{6EI}, C_2 = \frac{FI_0^2}{P_s I^2} + \frac{FH^2}{2EI},$$

$$C_3 = \frac{FHI_0^2 \tanh(\gamma H)}{I^2 P_s \cdot \gamma H}, C_4 = -\frac{I_0^2 F}{I^2 P_s \cdot \gamma}。$$

结构所有截面参数都给定后, 即可求得抗侧刚度:

$$K_z = \frac{F}{y_{x=H}} \quad (18)$$

表 1 取 10 个不同的算例进行分析, 对比了以串并联模型得到的抗侧刚度式(16)和抗侧刚度的精确解式(18), 由表 1 中的数据我们看到, 近似式(16)具有比较好的精度。

表 1 抗侧刚度近似解与理论解的比较

Table 1 Comparison of formula (16) and formula (17)

算例	H/m	l/m	$EI_0 / (\text{kN} \cdot \text{m}^2)$	$EI_w / (\text{kN} \cdot \text{m}^2)$	P_s / kN	$3EI_0 / P_s H^2$	式(16)	式(18)	式(16)误差/(%)
1	25	15	4.64×10^{10}	1.72×10^9	1.42×10^6	156.845	386192.7	397256.7	-2.79
2	50	8	7.91×10^9	3.71×10^8	3.24×10^6	2.9296	57210.83	61850.08	-7.50
3	50	8	5.93×10^9	2.78×10^8	3.24×10^6	2.1963	51208.45	54826.28	-6.60
4	75	10	1.24×10^{10}	3.71×10^8	1.85×10^6	3.575	21857.21	23681.56	-7.70
5	75	12	2.97×10^{10}	1.72×10^9	2.66×10^6	5.955	42537.85	46657.67	-8.83
6	100	15	4.64×10^{10}	1.72×10^9	1.42×10^6	9.803	18066.11	19960.73	-9.49
7	120	20	1.32×10^{11}	7.03×10^9	1.46×10^6	18.836	23796.72	25804.06	-7.78
8	150	20	1.83×10^{11}	1.30×10^{10}	2.71×10^6	9.004	27786.15	30322.5	-8.36
9	175	22	2.56×10^{11}	2.11×10^{10}	2.39×10^6	10.493	24273.36	26308.51	-7.74
10	200	25	3.76×10^{11}	3.21×10^{10}	2.14×10^6	13.178	21978.4	23666.81	-7.13

3 不同水平荷载作用下, 双臂剪力墙结构的位移和弯矩放大系数

采用与第 1 部分相同的连续化分析模型, 在不同类型的水平荷载作用下, 考虑结构顶端竖向集中荷载产生的二阶效应, 分析双臂剪力墙结构的弯矩

放大系数以及结构位移放大系数。设 $w(x)$ 为任意分布的水平外荷载。水平外荷载为均布荷载时, $w(z) = w_0$; 为倒三角形分布荷载时, $w(x) = w_0 \frac{z}{H}$; 为顶部集中荷载时, $w(z) = 0$ 。

将一阶、二阶分析的侧移记为 y_1 、 y_2 , 采用与

第 1 部分相同的分析方法, 一阶分析平衡微分方程为式(17), 二阶分析的平衡微分方程是式(10)。其中 M 为水平外荷载对坐标 z 处的截面的弯矩。通过前文分析可知式(10)、式(17)的通解为:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= C_1 + C_2 z + C_3 \cosh(\gamma z) + C_4 \sinh(\gamma z), \\ \bar{y}_2 &= D_1 \cosh(\alpha z) + D_2 \sinh(\alpha z) + \\ &D_3 \cos(\beta z) + D_4 \sin(\beta z) + D_5.\end{aligned}$$

设式(10)、式(17)的特解分别为 y_1^* 、 y_2^* 。则式(10)、式(17)的解为: $y_1 = \bar{y}_1 + y_1^*$, $y_2 = \bar{y}_2 + y_2^*$ 。进而代入边界条件就能求出位移曲线。一阶分析的边界条件: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(H) = 0$,

$$EI_w[y'''(H) - \gamma^2 y'(H)] = M'(H) - \frac{P_s}{EI_0} \int_0^H M dz.$$

根据第 1 部分的研究, 二阶分析的边界条件为: $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 0$;

$$M'(0) - EI_w y'''(0) = 0; \quad M''(H) - EI_w y^{(4)}(H) = 0$$

3.1 水平外荷载为均布荷载: $w(z) = w_0$

此时 $M = \frac{1}{2} w_0 (h - z)^2$, 代入式(10)、式(17)可求得:

$$\begin{aligned}y_1^* &= \frac{w_0}{24EI} (H - z)^4 - \frac{w_0 I_0^2}{2P_s I^2} z^2, \\ y_2^* &= \frac{w_0}{2P} (H - z)^2.\end{aligned}$$

3.2 水平外荷载为倒三角分布荷载: $w(x) = w_0 \cdot \frac{z}{H}$

此时 $M = \frac{w_0}{6H} (2H^3 - 3H^2 z + z^3)$, 代入式(10)、式(17)可求得:

$$\begin{aligned}y_1^* &= \frac{w_0}{120EIH} z^5 - \\ &\left(1 + \frac{2EI_0}{P_s H^2} \cdot \frac{I_0}{I}\right) \frac{H}{12EI} \cdot w_0 z^3 + \frac{w_0 H^2}{6EI} z^2, \\ y_2^* &= \frac{w_0}{6PH} z^3 - \\ &\left[\left(\frac{EI_0}{PP_s H} + \frac{H}{2P}\right) + \left(EI - \frac{EI_0 P}{P_s}\right) \frac{1}{P^2 H}\right] w_0 z.\end{aligned}$$

3.3 水平外荷载为顶部作用水平集中荷载 F

此时 $M = F(H - z)$, 代入式(10)、式(17)可求得:

$$\begin{aligned}y_1^* &= -\frac{F}{6EI} (z - H)^3, \\ y_2^* &= -\frac{F}{P} z.\end{aligned}$$

将以上特解与通解合并, 得到含有待定系数的一阶以及二阶微分方程的解, 再通过边界条件, 就可以求得各个系数 $C_1 \sim C_4$ 、 $D_1 \sim D_5$ 。进而可以求得一阶、二阶分析的位移曲线。由于 $C_1 \sim C_4$ 、 $D_1 \sim D_5$ 表达式过于复杂, 这里不再写出。

3.4 结构位移放大系数和弯矩放大系数

参考文献[11], 记结构水平位移放大系数为 A_y , 记墙肢弯矩放大系数为 A_M , 墙肢轴力放大系数 A_N , 则:

$$\begin{aligned}A_y &= \frac{y_2}{y_1}; \quad A_M = \frac{y_2''}{y_1''}; \\ A_N &= \frac{M - EI_w y_2'' + P(y_{2H} - y_2)}{M - EI_w y_1''}.\end{aligned}\quad (19a)$$

连梁弯矩正比于 q , 因此连梁的弯矩放大系数等于 q 的放大系数, 而 q 放大系数 A_q 为:

$$A_q = \frac{q_2}{q_1} = \frac{N_2'}{N_1'} = \frac{M' - EI_w y_2''' - P y_2'}{M' - EI_w y_1'''}\quad (19b)$$

将本节 3.1~3.3 的推导得出的结果代入式(19a)、式(19b), 可以求得双肢剪力墙结构在任意高度的位移和弯矩放大系数 A_y 、 A_M 、 A_N 、 A_q 。参考文献[13], 引入简化公式(20)与理论解(19a)、(19b)相比较。

$$A_M = \frac{1}{1 - P/P_{cr}}\quad (20)$$

算例. 图 1 所示的双肢剪力墙结构。总高为 $H=50\text{m}$, 两墙肢的中心距 $l=8\text{m}$, 层高 $h=5\text{m}$ 。取 $EI_0=7.9104 \times 10^9 \text{kN} \cdot \text{m}^2$, $EI_w=3.708 \times 10^8 \text{kN} \cdot \text{m}^2$, $P_s=3.2401 \times 10^6 \text{kN}$ 。

分别取 $P/P_{cr}=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, 根据式(19)求出结构的位移以及弯矩放大系数的解析解, 与式(20)求得的近似解比较, 发现如下规律:

1) 对于在三种不同的荷载形式作用下, 双肢剪力墙结构的位移放大系数 A_y 从底部到顶部不断地变大, 顶部的位移放大系数与式(20)相比略小但十分接近。式(20)可以比较精确地求得结构顶部的位移放大系数, 偏安全地, 也可用于求解结构任意高度的位移放大系数。

2) 两墙肢的弯矩放大系数 A_M 总体来说是底部大, 顶部小, 在墙肢的反弯点附近不规律, 这是因为一阶分析和二阶分析反弯点位置的变化引起的。单片的剪力墙在上述三种荷载下, 墙肢不会出现反弯点, 而本文研究的墙肢出现反弯点, 也正好验证了联肢剪力墙具有双重抗侧力结构的特性。

我们注意到, 在墙肢的最底部, 其墙肢弯矩放大系数小于式(20)的值, 因此采用式(20)的值来代替, 也是偏于安全的。

3) 墙肢轴力放大系数 A_N 是底部小、顶部大。这表示, 二阶分析相对应一阶分析, 弯矩更多的是

由格构柱的抗侧力机制承担。考虑到实际结构的二阶效应也在 10%左右, 因此式(20)可以提供轴力放大系数的合理估计。

4) 连梁的弯矩放大系数 A_q 与墙肢轴力放大系数类似, 底部小、顶部大。

表 2 $P/P_{cr}=0.1$ 时的各个放大系数
Table 2 Amplification factors when $P/P_{cr}=0.1$

荷载	z/H	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
均布荷载	A_y	1.050	1.057	1.064	1.0694	1.075	1.080	1.085	1.090	1.095	1.100
	A_M	1.069	1.109	1.213	-0.292	0.909	0.978	1.002	1.012	1.015	—
	A_N	1.099	1.104	1.112	1.121	1.131	1.143	1.156	1.170	1.182	—
	A_q	1.049	1.060	1.070	1.081	1.093	1.107	1.125	1.147	1.173	1.188
倒三角	A_y	1.056	1.063	1.069	1.074	1.079	1.083	1.088	1.093	1.097	1.102
	A_M	1.073	1.103	1.155	1.363	0.703	0.945	0.989	1.005	1.010	—
	A_N	1.101	1.105	1.111	1.118	1.127	1.136	1.148	1.160	1.170	—
	A_q	1.055	1.064	1.074	1.083	1.093	1.105	1.120	1.139	1.162	1.175
集中荷载	A_y	1.071	1.078	1.084	1.089	1.093	1.097	1.100	1.103	1.105	1.107
	A_M	1.088	1.113	1.137	1.158	1.176	1.190	1.200	1.207	1.210	—
	A_N	1.107	1.109	1.112	1.114	1.116	1.118	1.120	1.121	1.121	—
	A_q	1.068	1.079	1.089	1.098	1.105	1.111	1.116	1.119	1.121	1.122
式(20)		1.111									

表 3 $P/P_{cr}=0.3$ 时的各个放大系数
Table 3 Amplification factors when $P/P_{cr}=0.3$

荷载	z/H	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
均布荷载	A_y	1.182	1.207	1.232	1.255	1.277	1.298	1.319	1.340	1.361	1.381
	A_M	1.253	1.409	1.829	-4.379	0.571	0.855	0.957	1.003	1.022	—
	A_N	1.377	1.400	1.431	1.468	1.512	1.563	1.621	1.680	1.731	—
	A_q	1.175	1.216	1.257	1.300	1.350	1.409	1.485	1.583	1.692	1.753
倒三角	A_y	1.205	1.230	1.252	1.273	1.293	1.312	1.332	1.351	1.370	1.389
	A_M	1.269	1.388	1.600	2.473	-0.307	0.716	0.906	0.977	1.004	—
	A_N	1.385	1.403	1.428	1.458	1.494	1.535	1.583	1.634	1.679	—
	A_q	1.196	1.234	1.234	1.310	1.351	1.401	1.465	1.548	1.644	1.699
集中荷载	A_y	1.264	1.291	1.315	1.336	1.354	1.370	1.383	1.394	1.404	1.411
	A_M	1.332	1.433	1.532	1.623	1.702	1.766	1.814	1.847	1.866	—
	A_N	1.410	1.419	1.430	1.441	1.450	1.459	1.465	1.470	1.472	—
	A_q	1.252	1.297	1.337	1.373	1.403	1.428	1.448	1.462	1.471	1.473
式(20)		1.429									

4 结论

本文采用连续化模型, 对双肢剪力墙结构(Coupled shear-wall)的稳定性进行了研究, 求得了顶部作用集中力时临界荷载的精确显式表达式和显式屈曲波形。这个临界荷载公式表明, 联肢剪力墙是一种双重抗侧力结构, 其中抗侧能力由两个子结构共同承担。联肢墙的临界荷载是两个子结构各自承受顶部竖向力的临界值的简单相加。

根据这个临界荷载公式, 本文提出了一个串并联电路模型来表示联肢剪力墙各个变形部分的相互作用, 并将这个电路模型应用到线性分析的情况, 得到以顶部侧移计算的抗侧刚度显式近似表示式。利用平衡微分方程求得抗侧刚度的精确解, 与

近似显式表示式进行了比较, 发现近似式略偏小, 更广泛参数范围的比较表明, 最大误差为-10%。

考察了双肢剪力墙结构在顶部水平集中荷载、均布荷载、倒三角型分布荷载的作用下, 联肢剪力墙侧移和各个内力的二阶效应放大系数(侧移放大系数 A_y 、墙肢弯矩放大系数 A_M 、墙肢轴力放大系数 A_N 和连梁弯矩放大系数 A_q), 并与传统的来自于两端铰支弯曲压杆的放大系数公式(20)进行了比较, 发现近似公式偏安全地应用于侧移和墙肢底部弯矩的放大计算, 而应用于墙肢轴力和连梁弯矩的放大计算虽然偏小, 但考虑到实际工程二阶效应的量级范围, 加以应用也有合适的精度。

参考文献:

- [1] Stafford S B, Coull A. Tall building structures: Analysis and design [M]. New York: John Wiley & Sons, 1991: 213—254.
- [2] Coull A, Puri R D. Analysis of coupled shear walls of variable thickness [J]. Building Science, 1967, 2: 181—188.
- [3] Coull A, Puri R D. Analysis of coupled shear walls of variable cross-section [J]. Building Science, 1968, 2: 313—320.
- [4] Rosman R. Dynamics and stability of shear wall building structures [J]. ICE Proceedings, 1973, 55: 411—423.
- [5] Kuang J S, Chau C K. Dynamic behaviour of stiffened coupled shear walls with flexible bases [J]. Computers and Structures, 1999, 73: 327—339.
- [6] 王寿康, 张毛心. 厚度有突变的联肢剪力墙的整体稳定[J]. 建筑结构学报, 1996, 17(1): 40—45.
Wang Shoukang, Zhang Maoxin. Overall stability of coupled shear walls with step changes in thickness [J]. Journal of Building Structures, 1996, 17(1): 40—45. (in Chinese)
- [7] 陈波. 高层多肢剪力墙结构的整体稳定[J]. 土木工程学报, 2003, 36(8): 43—47.
Chen Bo. Overall stability of multiple shear wall tall building structure [J]. Journal of Civil Engineering, 2003, 36(8): 43—47. (in Chinese)
- [8] Tong Gengshu, Shi Zuyuan. Buckling of weakly braced frame [J]. Advances in Structural Engineering, 2001, 4(4): 211—215.
- [9] Tong G S, Ji Y. Buckling of frames braced by flexural type bracing [J]. Journal of the Constructional Steel Research, 2007, 63(2): 135—145.
- [10] Tong Genshu, Pi Yonglin. Buckling and second-order effects in dual shear-flexural systems [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2008, 134(11): 1726—1732.
- [11] 童根树, 胡进秀. 弯曲型支撑-框架结构的屈曲及位移和弯矩放大系数[J]. 建筑钢结构进展, 2007, 9(1): 52—56.
Tong Genshu, Hu Jinxiu. Buckling of frames braced by shear-walls and amplification factors for drift and moment [J]. Progress in Steel Building Structures, 2007, 9(1): 52—56. (in Chinese)
- [12] Rosman R. Stability and dynamics of shear-wall frame structures [J]. Building Science, 1974, 9: 55—63.
- [13] 童根树. 钢结构的平面内稳定[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005: 157—180.
Tong Genshu. The in-plane stability of steel structure [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005: 157—180. (in Chinese)

(上接第 102 页)

参考文献:

- [1] 易成. 钢纤维混凝土疲劳断裂性能与工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 56—58.
Yi Cheng. Fatigue fracture performance and engineering application of steel fiber reinforced concrete [M]. Beijing: Sciences Press, 2003: 56—58. (in Chinese)
- [2] 张全林. 层布式钢纤维路面混凝土弯曲疲劳性能试验研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2002.
Zhang Quanlin. Experimentation on the flexural fatigue behavior of laver steel fiber reinforced concrete pavement [D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2002. (in Chinese)
- [3] 张小辉. 钢纤维混凝土弯曲疲劳及其损伤特性和细观强度研究[D]. 昆明: 昆明理工大学, 2001.
Zhang Xiaohui. Flexural fatigue and damage properties and micro-strength of steel fiber reinforced concrete [D]. Kunming: Kunming University of Technology, 2001. (in Chinese)
- [4] Byung Hwan Oh. Cumulative damage theory of concrete under variable-amplitude fatigue loading [J]. ACI Materials Journal, 1991, 88(1): 41—48.
- [5] Naaman A E, Hammoud H. Fatigue Characteristics of high performance fiber-reinforced concrete [J]. Cement & Concrete Composites, 1998, 20: 353—363.
- [6] 刘逸平, 汤立群, 黄小清, 等. 钢纤维增强聚合物改性混凝土的疲劳损伤行为[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2007, 35(2): 18—22.
Liu Yiping, Tang Liqun, Huang Xiaoqing, et al. Fatigue damage behavior of steel fiber-reinforced and polymer-modified concrete [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2007, 35(2): 18—22. (in Chinese)
- [7] Chen Yingbo, Lu Zhenan, Huang Da. Fatigue defect of layer steel fiber reinforced concrete [J]. Journal of Wuhan University of Technology (Natural Science Edition), 2003, 18(1): 65—68.
- [8] Cachim P B, Figueiras J A, Pereira P A A. Fatigue behavior of fiber-reinforced concrete in compression [J]. Cement & Concrete Composites, 2002, 24: 211—217.
- [9] 谢建斌, 何天淳, 程赫明, 等. 循环荷载下路面用钢纤维混凝土的弯曲疲劳研究[J]. 兰州理工大学学报, 2004, 30(2): 104—109.
Xie Jianbin, He Tianchun, Cheng Heming, et al. Investigation flexural fatigue behavior of steel fiber reinforced concrete for pavement surface stratum under cyclic load [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2004, 30(2): 104—109. (in Chinese)
- [10] 吴智敏, 赵国藩, 黄承逵. 混凝土疲劳断裂特性研究[J]. 土木工程学报, 1995, 28(3): 59—65.
Wu Zhimin, Zhao Guofan, Huang Chengkui. Investigation of fatigue fracture properties of concrete [J]. China Civil Engineering Journal, 1995, 28(3): 59—65. (in Chinese)