

文章编号: 1000-4750(2011)04-0172-06

# 随机参数齿轮-转子系统扭转振动固有频率分析

\*魏永祥, 陈建军, 王敏娟

(西安电子科技大学机电工程学院, 西安 710071)

**摘 要:** 应用拓广的随机因子法分析了物理参数和几何参数均为随机变量的齿轮-转子系统的时变固有频率。将系统的刚度矩阵和质量矩阵分解为具有相同随机因子的矩阵之和的形式, 再由求解系统固有频率的瑞利商公式出发, 将系统频率展成部分频率分量之和的形式, 利用求解随机函数数字特征的代数综合法求解系统固有频率的数字特征。通过算例分析了随机参数对系统固有频率的影响, 并验证了方法的可行、有效和正确性。

**关键词:** 随机参数齿轮-转子系统; 固有频率; 随机因子法; 数字特征; 代数综合法

**中图分类号:** TH113.1 **文献标识码:** A

## NATURAL FREQUENCY ANALYSIS FOR TORSIONAL VIBRATION OF A GEAR-ROTOR SYSTEM WITH RANDOM PARAMETERS

\*WEI Yong-xiang, CHEN Jian-jun, WANG Min-juan

(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Based on the generalized random factor method, the time-variable natural frequencies were analyzed for the torsional vibration of a gear-rotor system with random physical and geometrical parameters. Its stiffness matrix and mass matrix were decomposed into a sum of matrices with same random factors, respectively. Based on the Rayleigh quotient formula, the natural frequencies of the system were changed into a sum of partial ones. And then the mathematic characteristics expressions of the natural frequencies were obtained by utilizing the algebra synthesis method. Finally, an example showed the influence of the randomness of the physical and geometrical parameters on the natural frequencies, and verified the feasibility of the proposed method.

**Key words:** gear-rotor system with random parameters; natural frequencies; generalized random factor method; mathematic characteristics; algebra synthesis method

齿轮是各种机械装备中应用最广的运动或动力传递装置, 其动力学行为和工作性能对整个机械系统有重要影响。由于材料属性、几何尺寸、负载状况等因素, 齿轮系统在工作过程中经常会出现异常振动现象, 产生较大的噪音, 甚至使系统无法正常工作<sup>[1]</sup>。自 Tuplin 提出齿轮副振动力学模型后, 考虑各种不同因素的齿轮模型不断地被提出, 齿轮转子系统动力学方面的研究也日益深入。文献[2]讨论了直齿圆柱齿轮在啮合过程中有关齿轮刚度、齿

面荷载分配以及齿根应力的计算方法。文献[3-5]分别研究了齿轮转子系统的弯曲振动、扭转振动特性、系统的固有频率和动态响应, 并探讨了齿轮啮合刚度、啮合阻尼的周期变化以及支承对系统固有频率的影响。这些研究成果均是考虑齿轮转子系统参数为确定性时的情况。然而在实际问题中, 齿轮转子系统中的很多参数是不确定性的, 故研究随机参数齿轮系统的动力分析问题具有重要的理论意义和工程背景。目前, 对随机参数系统的动力分析

收稿日期: 2009-09-25; 修改日期: 2010-03-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(50905134)

作者简介: \*魏永祥(1982—), 男, 河南舞阳县人, 博士生, 从事机械系统的动力分析及可靠性研究(E-mail: wyx3710@163.com);

陈建军(1951—), 男, 河北保定人, 教授, 硕士, 博导, 从事机械可靠性工程研究(E-mail: jjchen@xidian.edu.cn);

王敏娟(1981—), 女, 山东单县人, 博士生, 从事机电系统智能控制研究(E-mail: wang.min.juan@126.com).

已取得一些成果。在随机系统的动力特性分析方面,一种方法是采用 Monte Carlo 数值模拟方法<sup>[6]</sup>,此法具有普适性,但往往为获得一个满意的结果,需要海量计算;另一种方法是摄动法<sup>[7]</sup>。而文献[8]将随机因子法<sup>[9]</sup>拓广到不均匀随机刚架结构的动力特性分析中,为研究复杂随机系统的动力特性提供了较为快捷的方法。

本文应用拓广随机因子法分析了物理参数和几何参数均为随机变量的齿轮-转子系统的动力特性。将系统的刚度和质量矩阵分解为具有相同随机因子的矩阵之和的形式,从而将系统的固有频率计算式实现了加法分解以便提取随机因子,在此基础上,利用求解随机函数数字特征的代数综合法分析系统固有频率的数字特征。

### 1 自由齿轮-转子系统扭转振动模型

在一对齿轮副纯扭转振动模型的基础上,考虑传动轴的扭转刚度和原动机(电机等)和负载(执行机构等)的转动惯量,形成了齿轮-转子系统的扭转振动问题,其典型的动力学模型见图 1。将原动机、主被动齿轮和负载分别等效成 4 个转动惯量元件。此模型是 4 自由度扭转振动系统,4 个自由度分别描述了 4 个转动惯量元件的扭转振动位移  $q_m$ 、 $q_p$ 、 $q_g$ 、 $q_l$ 。该系统的动力分析模型为<sup>[1]</sup>:

$$I_m \ddot{q}_m + c_p (\dot{q}_m - \dot{q}_p) + k_p (q_m - q_p) = T_m \quad (1a)$$

$$I_p \ddot{q}_p + c_p (\dot{q}_p - \dot{q}_m) + k_p (q_p - q_m) + R_p W_d = 0 \quad (1b)$$

$$I_g \ddot{q}_g + c_g (\dot{q}_g - \dot{q}_l) + k_g (q_g - q_l) + R_g W_d = 0 \quad (1c)$$

$$I_l \ddot{q}_l + c_p (\dot{q}_l - \dot{q}_g) + k_g (q_l - q_g) = -T_l \quad (1d)$$

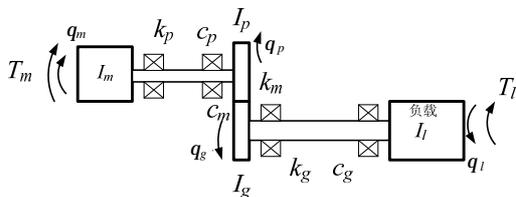


图 1 齿轮-转子系统扭转振动模型

Fig.1 The model of torsional vibration of gear-rotor

式中:  $I_m$ 、 $I_p$ 、 $I_g$ 、 $I_l$  分别为 4 个质量元件的转动惯量,其中计入了连接轴和轴承内环的转动惯量,并将它们平均等效至 4 个转动惯量元件上;  $c_p$ 、 $c_g$  为主动、被动连接轴的扭转阻尼;  $k_p$ 、 $k_g$  为主动、被动连接轴的扭转刚度;  $T_m$ 、 $T_l$  为作用在原动机和负载上的扭矩;  $R_p$ 、 $R_g$  为主动、被动齿轮的基圆

半径;  $W_d$  为轮齿的动态啮合力,其计算公式为<sup>[1]</sup>:

$$W_d = c_m (R_p \dot{q}_p - R_g \dot{q}_g - e) + k_m (R_p q_p - R_g q_g - e) \quad (2)$$

式中:  $c_m$ 、 $k_m$ 、 $e$  分别为齿轮的综合啮合阻尼、刚度和制造误差。

以上各式经整理可得齿轮-转子系统扭转振动分析模型。本文只研究系统的动力特性,故列出其自由振动方程为:

$$[m]\{\ddot{d}\} + [k]\{d\} = \{0\} \quad (3)$$

其中:

$$\{d\} = (q_m \ q_p \ q_g \ q_l)^T \quad (4)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} I_m & & & 0 \\ & I_p & & \\ & & I_g & \\ 0 & & & I_l \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_p & -k_p & 0 & 0 \\ -k_p & k_p + k_m R_p^2 & -k_m R_p R_g & 0 \\ 0 & -k_m R_p R_g & k_g + k_m R_g^2 & -k_g \\ 0 & 0 & -k_g & k_g \end{bmatrix} \quad (6)$$

由于齿轮啮合时齿间间隙很小,故可将齿轮副等效为两个等厚薄圆柱。由此得齿轮副和轴及两个轴承内环的转动惯量、轴的扭转刚度分别为:

$$I'_p = r\pi R_p^4 b / 2, \quad I'_g = r\pi R_g^4 b / 2 \quad (7)$$

$$R_p = m_o z_1 \cos f / 2, \quad R_g = m_o z_2 \cos f / 2 \quad (8)$$

$$I_{ai} = r\pi R_{ai}^4 l_{ai} / 2 + r\pi h (R_{ai}^4 - R_{ai}^4), \quad i=1,2 \quad (9)$$

$$k_p = GJ_{a1} / l_{a1}, \quad k_g = GJ_{a2} / l_{a2} \quad (10)$$

式中:  $r$  为材料密度;  $b$  为齿轮宽度;  $m_o$  为齿轮模数;  $z_1$ 、 $z_2$  分别为主被动齿轮的齿数;  $f$  为压力角;  $R_{a1}$ 、 $R_{a2}$  分别为原动机和负载端连接轴的半径;  $R_{a1}$ 、 $R_{a2}$  分别为主被动连接轴轴承内环的外径;  $h$  为主被动连接轴轴承内环的宽度;  $G$  为剪切模量;  $E$  为弹性模量;  $J_{a1}$ 、 $J_{a2}$  分别为原动机和负载端连接轴的极惯性矩。易知:

$$J_{a1} = \pi R_{a1}^4 / 2, \quad J_{a2} = \pi R_{a2}^4 / 2 \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)得:

$$k_p = G\pi R_{a1}^4 / (2l_{a1}), \quad k_g = G\pi R_{a2}^4 / (2l_{a2}) \quad (12)$$

其中单齿付啮合时的刚度  $k(t)$  采用魏氏挠度公式和两圆柱接触变形的赫兹公式<sup>[2]</sup>计算:

$$k(t) = 1 / (1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_c) \quad (13)$$

式中： $k_1$ 、 $k_2$  分别为主被齿轮轮齿的挠曲刚度； $k_c$  为轮齿在啮合点的接触刚度，其中<sup>[2]</sup>：

$$k_i = \frac{Eb(\chi + 1)^{B_i}(\lambda + 1)^{C_i}}{A_i \cdot 10^3}, \quad i=1, 2 \quad (14)$$

式中： $A_i = 11.05 \pm 0.166 |z_i - 25|^{0.2}$ ， $B_i = 0.32 \pm (|z_i - 25|^{0.35} / 20)$ ， $C_i = (|z_i - 17|^{0.15} / 38.4) + 1.22$ ，下标  $i=1, 2$  分别表示主、被齿轮所对应的参数， $\chi$  为变位系数， $\lambda = (r_h - r_n) / m_o$  为加载位置系数， $r_h$  为齿顶圆半径， $r_n$  为啮合点处圆半径。当齿数  $z_i > 25$  时，式  $A_i$ 、 $B_i$  中取正号，反之取负； $z_i > 135$  时  $z_i$  都取 135。

$$k_c = 2000Eb / \{ \pi(1 - \nu)[\ln(2\gamma_1 / \beta) + \ln(2\gamma_2 / \beta) + 0.814] \} \quad (15)$$

其中： $\beta = \left[ \frac{4}{\pi} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \left( \frac{1 + \nu^2}{E} \right) W_n \right]^{0.5}$ ； $\nu$  为材料的泊松比； $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$  为主动、被动齿轮啮合点处的曲率半径； $W_n$  为齿轮单位齿宽法向荷载。

则齿轮的综合啮合刚度可表为：

$$k_m = \begin{cases} k(t), & \text{单齿付啮合} \\ k_1(t) + k_{II}(t), & \text{双齿付啮合} \end{cases} \quad (16)$$

由式(16)可知：齿轮单齿啮合刚度随加载位置系数变化，即在不同啮合位置齿轮啮合刚度不同；由于齿轮的重合度一般都大于 1，故会有双齿或多齿啮合的情况。在单齿、双齿交替啮合时齿轮啮合刚度将发生突变，导致该刚度的时变性。本文将一个啮合周期(单齿从啮入到啮出的时间)进行等分，逐次计算不同啮合位置处的齿轮啮合刚度值。

## 2 随机参数系统质量和刚度矩阵分析

以上分析了齿轮-转子系统扭转振动的确定性模型。但由于系统材料在生产过程中受到多种随机因素的影响，使其弹性模量  $E$ 、质量密度  $\rho$  和泊松比  $\nu$  的取值都呈现出一定的分散性。另外在制造装配时由于多种随机因素的影响，也会导致系统几何尺寸的随机性。考虑到连接轴、齿轮的加工工艺是

$$k_{\#} = \frac{1}{\frac{(\chi + 1)^{B_i}(\lambda + 1)^{C_i}}{A_i \cdot 10^3} + \pi(1 - \nu)[\ln(2\gamma_1 / \beta) + \ln(2\gamma_2 / \beta) + 0.814] / 2 \times 10^3}$$

为式(13)中提取随机变量  $Eb$  后剩下的确定部分。为简化计算，其它的小参数都按确定量计算。式(17)和式(18)中带“~”者表示其相对应的随机因子。随机因子的均值为 1，均方差为其相对应随机变量的

相同的，故可认为两齿轮的半径、两连接轴的半径及轴承内环外径、两连接轴的长度具有相同的随机性；轮齿的宽度和轴承的宽度的也有相同的随机性。现考虑以上分析的参数为任意分布概型的随机变量，应用推广的随机因子法，将系统的刚度和质量矩阵均先表示为部分含有相同随机变量矩阵之和的形式，再将各矩阵中的随机因子从中提出，即：

$$[m] = [m_1] + [m_2] + [m_3] = \tilde{I}_{ml} \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \tilde{\rho} \tilde{m}_o^4 \tilde{b} \rho b \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_g^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \tilde{\rho} \tilde{R}_a^4 \tilde{l}_a \times \begin{bmatrix} R_{a1}^4 l_{a1} + 2h(R_{a1}^4 - R_{a1}^4) & 0 \\ 0 & R_{a1}^4 l_{a1} + 2h(R_{a1}^4 - R_{a1}^4) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{a2}^4 l_{a2} + 2h(R_{a2}^4 - R_{a2}^4) & 0 \\ 0 & R_{a2}^4 l_{a2} + 2h(R_{a2}^4 - R_{a2}^4) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[k] = [k_{11}] + [k_{12}] = \frac{\tilde{G} \tilde{R}_a^4}{\tilde{l}_a} \frac{G \pi}{2} \begin{bmatrix} R_{a1}^4 / l_{a1} & -R_{a1}^4 / l_{a1} & 0 & 0 \\ -R_{a1}^4 / l_{a1} & R_{a1}^4 / l_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{a2}^4 / l_{a2} & -R_{a2}^4 / l_{a2} \\ 0 & 0 & -R_{a2}^4 / l_{a2} & R_{a2}^4 / l_{a2} \end{bmatrix} + \tilde{E} \tilde{b} \tilde{m}_o^2 \times E b k_{\#} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & -R_p R_g & 0 \\ 0 & -R_p R_g & R_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中： $\tilde{R}_a$  为两连接轴的半径及轴承内环外径的共同随机因子， $\tilde{l}_a$  为两连接轴的长度及轴承内环宽度  $h$  的共同随机因子，其中：

1

变异系数。由以上分析显见，系统的刚度和质量矩阵均具有随机性。以下将求系统固有频率随机变量的数字特征。

### 3 随机参数齿轮-转子系统的频率分析

对确定性参数的齿轮-转子系统,其啮合刚度的时变性亦是客观存在的,且在给定转速之后,啮合刚度的时变性是时间(或位置)的确定性函数。本文在此基础上将进一步考虑该系统参数取值的随机性,由于这些随机参数只是空间上的函数,而与时间无关,即参数的随机性只影响啮合刚度取值的随机性,而不影响啮合刚度随时间的变化规律。为此,文中可将系统参数的随机性和啮合刚度的时变性分开考虑,分别考察系统的随机参数和时变刚度两者对系统固有频率的影响。利用瑞利商公式将不均匀随机系统的固有频率写成几个含随机因子部分和的形式<sup>[8]</sup>:

$$\omega_i^2 = \frac{[\Phi_i]^T [k] [\Phi_i]}{[\Phi_i]^T [m] [\Phi_i]} = \frac{1}{1 + \left\{ \frac{1}{\left( \frac{[\Phi_i]^T [k_{11}] [\Phi_i]}{[\Phi_i]^T [m_1] [\Phi_i]} + \frac{[\Phi_i]^T [k_{12}] [\Phi_i]}{[\Phi_i]^T [m_1] [\Phi_i]} \right)} + \frac{1}{\left( \frac{[\Phi_i]^T [k_{11}] [\Phi_i]}{[\Phi_i]^T [m_2] [\Phi_i]} + \frac{[\Phi_i]^T [k_{12}] [\Phi_i]}{[\Phi_i]^T [m_2] [\Phi_i]} \right)} + \frac{1}{\left( \frac{[\Phi_i]^T [k_{11}] [\Phi_i]}{[\Phi_i]^T [m_3] [\Phi_i]} + \frac{[\Phi_i]^T [k_{12}] [\Phi_i]}{[\Phi_i]^T [m_3] [\Phi_i]} \right)} \right\}} \quad (19)$$

式中:  $i$  是固有频率的阶数;  $[\Phi_i]$  为振型列向量。

将分母中的六项分别记为  $l_{i1}$ 、 $l_{i2}$ 、 $l_{i3}$ 、 $l_{i4}$ 、 $l_{i5}$ 、 $l_{i6}$ , 其具体形式如下:

$$l_{i1} = (\tilde{G}\tilde{R}_a^4 G \pi L_{i1}) / (2\tilde{I}_{ml}\tilde{I}_a) \quad (20)$$

式中:  $\tilde{G} = \tilde{E} / (1 + \nu)$ ,  $G = E / 2$ ,  $\nu$  为泊松比。其中  $\tilde{G}$  的均值、方差可由代数综合法<sup>[10]</sup>求得:

$$\mu_{\tilde{G}} = [1 / (1 + \nu)] (1 + \sigma_v^2 / (1 + \nu)^2) \quad (21)$$

$$\sigma_{\tilde{G}}^2 = [1 / (1 + \nu)^2] [\sigma_v^2 / (1 + \nu)^2 + \nu_E^2] \quad (22)$$

其中符号  $\mu$ 、 $\sigma$  分别表示随机变量的均值和均方差,以下相同。

$$l_{i2} = \tilde{E}\tilde{b}\tilde{m}_o^2 / \tilde{I}_{mi} E b k_{\#} L_{i2} \quad (23)$$

$$l_{i3} = \tilde{G}\tilde{R}_a^4 / (\tilde{\rho}\tilde{m}_o^4 \tilde{b}\tilde{I}_a) G / (\rho b) L_{i3} \quad (24)$$

$$l_{i4} = \tilde{E} / (\tilde{\rho}\tilde{m}_o^2) 2 E k_{\#} / (\rho \pi) L_{i4} \quad (25)$$

$$l_{i5} = \tilde{G} / (\tilde{\rho}\tilde{I}_a^2) 2 G / (\rho) L_{i5} \quad (26)$$

$$l_{i6} = \tilde{E}\tilde{b}\tilde{m}_o^2 / (\tilde{\rho}\tilde{R}_a^4 \tilde{I}_a) 4 E b k_{\#} / (\rho \pi) L_{i6} \quad (27)$$

其中  $L_{i1}$ 、 $L_{i2}$ 、 $L_{i3}$ 、 $L_{i4}$ 、 $L_{i5}$ 、 $L_{i6}$  分别为对应振型向量和剩下对应矩阵的两次型。

由求解随机变量数字特征的代数综合法<sup>[10]</sup>可

得以上各个随机变量的均值和方差分别为:

$$\mu_{l_{i1}} = \mu_{\tilde{G}} (1 + \nu_a^2 + \nu_{I_{mi}}^2 + \nu_a^2 \nu_{I_{mi}}^2) l_{i1}^{\#} \quad (28)$$

$$\sigma_{l_{i1}}^2 = [(\nu_a^2 + \nu_{I_{mi}}^2 + \nu_a^2 \nu_{I_{mi}}^2) \mu_{\tilde{G}}^2 + (16\nu_{R_a}^2 \mu_{\tilde{G}}^2 + \sigma_{\tilde{G}}^2 + 16\nu_{R_a}^2 \sigma_{\tilde{G}}^2)] (l_{i1}^{\#})^2 \quad (29)$$

$$\mu_{l_{i2}} = (1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2) (1 + \nu_{I_{mi}}^2) l_{i2}^{\#} \quad (30)$$

$$\sigma_{l_{i2}}^2 = [(\nu_E^2 + \nu_b^2 + \nu_E^2 \nu_b^2) (1 + 6\nu_{\tilde{m}_o}^2 + 3\nu_{\tilde{m}_o}^4) + 4\nu_{\tilde{m}_o}^2 + 2\nu_{\tilde{m}_o}^4 + \nu_{I_{mi}}^2 (1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2)^2] (l_{i2}^{\#})^2 \quad (31)$$

$$\mu_{l_{i3}} = \mu_{\tilde{G}/\tilde{\rho}} (1 + f_1) l_{i3}^{\#} \quad (32)$$

$$\sigma_{l_{i3}}^2 = [16\nu_{R_a}^2 \mu_{\tilde{G}/\tilde{\rho}}^2 + \sigma_{\tilde{G}/\tilde{\rho}}^2 (1 + 16\nu_{R_a}^2)] (l_{i3}^{\#})^2 \quad (33)$$

其中:

$$f_1 = (\nu_b^2 + \nu_a^2 + \nu_b^2 \nu_a^2) (1 + 16\nu_{\tilde{m}_o}^2) + 16\nu_{\tilde{m}_o}^2,$$

$$\mu_{\tilde{G}/\tilde{\rho}} = \mu_{\tilde{G}} (1 + \nu_{\tilde{\rho}}^2) - C_{\tilde{G}\tilde{\rho}} \nu_{\tilde{\rho}} \sigma_{\tilde{G}},$$

$$\sigma_{\tilde{G}/\tilde{\rho}}^2 = \sigma_{\tilde{G}}^2 + \mu_{\tilde{G}}^2 \nu_{\tilde{\rho}}^2 - 2C_{\tilde{G}\tilde{\rho}} \mu_{\tilde{G}} \nu_{\tilde{\rho}} \sigma_{\tilde{G}},$$

$$\mu_{l_{i4}} = \frac{\mu_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}}{1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2} \left[ 1 + \frac{4\nu_{\tilde{m}_o}^2 + 2\nu_{\tilde{m}_o}^4}{(1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2)^2} \right] l_{i4}^{\#} \quad (34)$$

$$\sigma_{l_{i4}}^2 = \frac{\mu_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2}{(1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2)^2} \left[ \frac{\sigma_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2}{\mu_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2} + \frac{4\nu_{\tilde{m}_o}^2 + 2\nu_{\tilde{m}_o}^4}{(1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2)^2} \right] (l_{i4}^{\#})^2 \quad (35)$$

其中:

$$\mu_{\tilde{E}/\tilde{\rho}} = 1 + \nu_{\tilde{\rho}}^2 - C_{\tilde{E}\tilde{\rho}} \nu_{\tilde{E}} \nu_{\tilde{\rho}},$$

$$\sigma_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2 = \nu_E^2 + \nu_{\tilde{\rho}}^2 - 2C_{\tilde{E}\tilde{\rho}} \nu_{\tilde{E}} \nu_{\tilde{\rho}},$$

$$\mu_{l_{i5}} = \frac{\mu_{\tilde{G}/\tilde{\rho}}}{1 + \nu_{I_a}^2} \left[ 1 + \frac{4\nu_{I_a}^2 + 2\nu_{I_a}^4}{(1 + \nu_{I_a}^2)^2} \right] l_{i5}^{\#} \quad (36)$$

$$\sigma_{l_{i5}}^2 = \frac{\mu_{\tilde{G}/\tilde{\rho}}^2}{(1 + \nu_{I_a}^2)^2} \left[ \frac{\sigma_{\tilde{G}/\tilde{\rho}}^2}{\mu_{\tilde{G}/\tilde{\rho}}^2} + \frac{4\nu_{I_a}^2 + 2\nu_{I_a}^4}{(1 + \nu_{I_a}^2)^2} \right] (l_{i5}^{\#})^2 \quad (37)$$

$$\mu_{l_{i6}} = \mu_{\tilde{E}/\tilde{\rho}} (1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2) (1 + \nu_{I_a}^2 + 16\nu_{R_a}^2 + 16\nu_{R_a}^2 \nu_{I_a}^2) l_{i6}^{\#} \quad (38)$$

$$\sigma_{l_{i6}}^2 = [f_2 (\mu_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2 + \sigma_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2) + (1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2)^2 \sigma_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2 + \mu_{\tilde{E}/\tilde{\rho}}^2 (1 + \nu_{\tilde{m}_o}^2)^2 (\nu_{I_a}^2 + 16\nu_{R_a}^2 + 16\nu_{R_a}^2 \nu_{I_a}^2)] (l_{i6}^{\#})^2 \quad (39)$$

其中:  $f_2 = 4\nu_{\tilde{m}_o}^2 + 2\nu_{\tilde{m}_o}^4 + \nu_b^2 (1 + 6\nu_{\tilde{m}_o}^2 + 3\nu_{\tilde{m}_o}^4)$ 。

以上式中  $\nu$  为相对应的随机因子的变异系数,有#号标记的为其相对应的确定部分。

对式(19)利用代数综合法<sup>[10]</sup>可得  $\omega_i^2$  的均值和方差为:

$$\mu_{\omega_i^2} = \frac{1}{\mu_{l_{i1}} + \mu_{l_{i2}} + \mu_{l_{i3}}} \left[ 1 + \frac{\sigma_{l_{i1}}^2 + \sigma_{l_{i2}}^2 + \sigma_{l_{i3}}^2}{(\mu_{l_{i1}} + \mu_{l_{i2}} + \mu_{l_{i3}})^2} \right] \quad (40)$$

$$\sigma_{\omega_i}^2 = (\sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2 + \sigma_{i3}^2) / (\mu_{i1} + \mu_{i2} + \mu_{i3})^4 \quad (41)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mu_{i1} &= 1 / (\mu_{l_{i1}} + \mu_{l_{i2}}) [1 + (\sigma_{l_{i1}}^2 + \sigma_{l_{i2}}^2) / (\mu_{l_{i1}} + \mu_{l_{i2}})^2], \\ \sigma_{i1}^2 &= (\sigma_{l_{i1}}^2 + \sigma_{l_{i2}}^2) / (\mu_{l_{i1}} + \mu_{l_{i2}})^4, \\ \mu_{i2} &= 1 / (\mu_{l_{i3}} + \mu_{l_{i4}}) [1 + (\sigma_{l_{i3}}^2 + \sigma_{l_{i4}}^2) / (\mu_{l_{i3}} + \mu_{l_{i4}})^2], \\ \sigma_{i2}^2 &= (\sigma_{l_{i3}}^2 + \sigma_{l_{i4}}^2) / (\mu_{l_{i3}} + \mu_{l_{i4}})^4, \\ \mu_{i3} &= 1 / (\mu_{l_{i5}} + \mu_{l_{i6}}) [1 + (\sigma_{l_{i5}}^2 + \sigma_{l_{i6}}^2) / (\mu_{l_{i5}} + \mu_{l_{i6}})^2], \\ \sigma_{i3}^2 &= (\sigma_{l_{i5}}^2 + \sigma_{l_{i6}}^2) / (\mu_{l_{i5}} + \mu_{l_{i6}})^4. \end{aligned}$$

则  $\omega_i$  的均值和均方差为:

$$\mu_{\omega_i} = (\mu_{\omega_i^2} - 0.5\sigma_{\omega_i^2}^2)^{1/4}, \quad \sigma_{\omega_i} = (\mu_{\omega_i^2} - \mu_{\omega_i}^2)^{1/2} \quad (42)$$

由以上各式可计算出随机参数齿轮-转子系统的扭转振动固有频率的数字特征。

### 4 算例

取标准齿轮副, 齿数  $z_1 = 45$ ,  $z_2 = 100$ , 压力角  $\phi = 20^\circ$ , 变位系数  $\chi = 0$ , 轴承内环的宽度  $h = 0.015\text{m}$ , 齿轮的额定转速  $2000\text{r/min}$ , 泊松比  $\nu = 0.25$ 。给定各随机参数的均值(即其确定性值部分)分别为:  $\mu(E) = 208\text{GPa}$ ,  $\mu(\rho) = 7860\text{kg/m}^3$ ,  $\mu(b) = 0.016\text{m}$ ,  $\mu(m_o) = 4\text{mm}$ ,  $\mu(l_{a1}) = 0.15\text{m}$ ,  $\mu(l_{a2}) = 0.15\text{m}$ ,  $\mu(R_{a1}) = 0.0125\text{m}$ ,  $\mu(R_{a2}) = 0.01\text{m}$ ,  $\mu(R_{a1}') = 0.0175\text{m}$ ,  $\mu(R_{a2}') = 0.015\text{m}$ ,  $\mu(I_m) = 0.148\text{N}\cdot\text{mm}$ ,  $\mu(I_l) = 0.267\text{N}\cdot\text{mm}$ 。  $E$  和  $G$  与  $\rho$  的相关系数  $C_{E\rho} = C_{G\rho} = 0.7$ 。为考察各随机参数取值的分散性对结果的影响, 各随机参数变异系数的取值见表 1 和表 2。为了验证本文模型和方法的正确性, 用 Monte Carlo 方法对本例的随机模型中的第 2 阶固有频率进行 3000 次模拟计算。表 1 和表 2 中数据的第 1 行和第 2 行分别为频率随机变量的均值和均方差。由表 1 可知, 本文与 MC 法的结果基本上是一致的。表 2 列出了不同参数具有随机性时系统的 4 阶固有频率数字特征的计算结果。由此可以看出, 不同参数的随机性对系统频率特性的影响不尽相同。弹性模量和质量密度的随机性对系统固有频率均值的影响趋势相反, 弹性模量对其分散性的影响比质量密度对其影响的大些。轴半径和长度的随机性对系统的第 3 阶、第 4 阶固有频率的均值和分散性影响都较大, 却对第 2 阶固有频率影响甚小。这是因为轴的扭转刚度是轴半径的四次方关系, 轴半径和长度却对齿轮的啮合刚度影响不大。齿轮的

模数和宽度的随机性对系统的第 2 阶固有频率影响都较大, 但对第 3 阶、第 4 阶固有频率基本无影响。其中齿轮模数的随机性对第 2 阶固有频率的影响占据主导地位。这是因为齿轮的模数和宽度影响与齿轮相关的质量矩阵和刚度矩阵。电机端与负载端的转动惯量和泊松比的随机性对各阶频率影响的很小。

表 1 不同参数具有随机性时系统第 2 阶固有频率数字特征的计算和模拟结果 /Hz

Table 1 The results of this paper method and Monte Carlo method on the second natural frequency of the system

变异系数	$v_{all} = 0.1$	$v_E = 0.1$	$v_\rho = 0.1$	$v_{Ra} = 0.1$	$v_{m_o} = 0.1$
本文方法	2.7862	2.7543	2.7681	2.7581	2.7829
	0.2637	0.1343	0.1337	0.0006	0.2477
MC 模拟	2.7861	2.7541	2.7676	2.7579	2.7732
	0.3461	0.1369	0.1460	0.0008	0.2849

变异系数	$v_{la} = 0.1$	$v_{lml} = 0.1$	$v_b = 0.1$	$v_u = 0.1$	$v_{all} = 0$
本文方法	2.7580	2.7580	2.7579	2.7580	2.7580
	0.0002	0.0007	0.0008	0	0
MC 模拟	2.7580	2.7580	2.7579	2.7580	2.7580
	0.0002	0.0008	0.0010	0	0

表 2 不同参数具有随机性时系统各阶固有频率数字特征的计算结果 /Hz

Table 2 The results of all natural frequency of the system

固有频率/Hz	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
确定性模型	0	2.7580	859.1856	1589.0393
随机模型 $v_E = 0.1$	0	2.7543	857.3926	1584.4948
	0	0.1343	37.3865	59.1864
随机模型 $v_\rho = 0.1$	0	2.7681	859.2355	1589.6250
	0	0.1337	4.7728	23.8654
随机模型 $v_{Ra} = 0.1$	0	2.7581	832.8404	1543.0173
	0	0.0006	118.9087	183.1916
随机模型 $v_{m_o} = 0.1$	0	2.7829	859.6526	1589.0646
	0	0.2477	0	0
随机模型 $v_{la} = 0.1$	0	2.7580	861.6548	1592.0696
	0	0.0002	37.9392	69.9580
随机模型 $v_{lml} = 0.1$	0	2.7580	861.6548	1591.9012
	0	0.0007	36.9095	53.8979
随机模型 $v_b = 0.1$	0	2.7579	859.2191	1589.0411
	0	0.0008	0	0
随机模型 $v_u = 0.1$	0	2.7580	859.2869	1589.1763
	0	0	7.6082	12.0340
随机模型 $v_{all} = 0.1$	0	2.7862	836.0550	1545.9736
	0	0.2637	124.8421	195.3359

图 2 绘出了单齿一个啮合周期内啮合刚度  $k_m$  随机变量的均值随时间的变化曲线。为了分析齿轮啮合的时变刚度对各阶频率的影响, 图 3 绘出了系统第 2 阶固有频率随机变量的均值在单齿一个啮合周期内的变化曲线。由图 2 和图 3 可见: 刚度均值随时间发生变化, 且在单双齿交替啮合时会发生突

变。为此,第2阶固有频率均值的变化趋势与齿轮的啮合刚度 $k_m$ 的均值变化趋势完全一致。而时变刚度对第3阶、第4阶固有频率的影响不是很明显,在小数点后5位才有所不同,但其固有频率的变化与时变刚度的变化趋势亦是完全一致的。

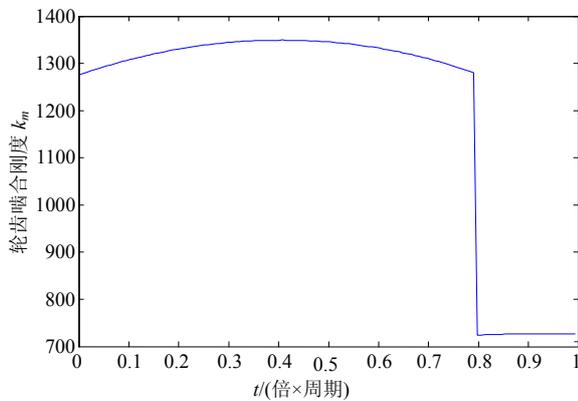


图2 啮合刚度 $k_m$ 均值的变化曲线

Fig.2 The change curve of  $k_m$

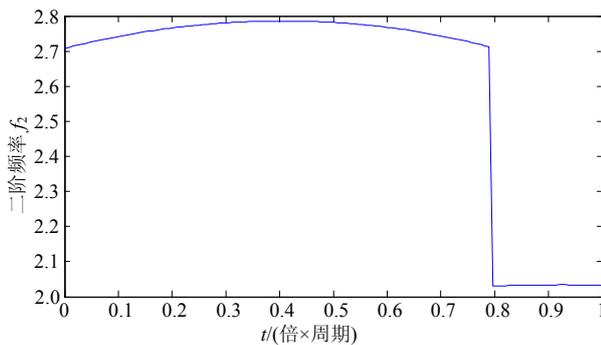


图3 第2阶固有频率均值的变化曲线

Fig.3 The change curve of the second natural frequency

## 5 结论

(1) 本文随机模型的计算结果与 Monte Carlo 模拟方法的结果吻合较好,证明了随机参数齿轮-轴承系统扭转动力特性求解方法的正确性。

(2) 系统固有频率的时变性完全取决于啮合刚度的时变性。对系统固有频率的随机性而言,只要给定啮合点对应的时刻(位置),就能获得到相应时刻(位置)固有频率的数字特征。

(3) 计算结果表明,当所有参数均具有随机性时,系统固有频率的分散性最大。基于计算结果,在齿轮-转子系统设计和制造时,为更好地控制齿轮-转子系统固有频率的分散性,首先应尽可能减小轴半径的分散性,其次是齿轮模数的分散性,即应尽可能提高系统几何尺寸的加工精度。

(4) 由于轴的扭转刚度要比齿轮的啮合刚度大

的多,所以系统的第3阶、第4阶固有频率要比第2阶固有频率大的多,并且与齿轮有关参数的随机性对第2阶固有频率的影响要大些,而与轴相关的参数的随机性对第3阶、第4阶固有频率的影响要大些。齿轮啮合的时变刚度对第2阶固有频率影响明显,对第3阶、第4阶固有频率影响不明显。

## 参考文献:

- [1] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学—振动、冲击、噪声[M]. 第1版. 北京: 科学出版社, 1997.  
Li Runfang, Wang Jianjun. Dynamics of gear system—Vibration, shock and noise [M]. 1st ed. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)
- [2] 张永忠,王洪. 齿根动态应力分析[J]. 机械工程学报, 1986, 22(3): 58—65.  
Zhang Yongzhong, Wang Hong. The dynamic stresses analysis of tooth root [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1986, 22(3): 58—65. (in Chinese)
- [3] Lee A S, Ha J W, Choi D H. Coupled lateral and torsional vibration characteristics of a speed increasing geared rotor-bearing system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 263: 725—742.
- [4] 欧卫林,王三民,袁茹. 齿轮耦合复杂转子系统弯扭耦合振动分析的轴单元法[J]. 航空动力学报, 2005, 20(3): 537—538.  
Ou Weilin, Wang Sanmin, Yuan Ru. Shaft element method for the analysis of lateral-torsional coupling vibration of a complex gear-rotor system [J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(3): 537—538. (in Chinese)
- [5] 庞辉,方宗德,欧卫林. 多平行齿轮耦合转子系统的振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2007, 26(6): 21—25.  
Pang Hui, Fang Zongde, Ou Weilin. Analysis on lateral-torsional coupling vibration characteristics of multi-parallel gear-rotor system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(6): 21—25. (in Chinese)
- [6] 赵雷,陈虬. 结构随机分析的 Monte Carlo 加权残值法[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, 13(2): 193—200.  
Zhao Lei, Chen Qiu. The weighted residual method by Monte Carlo for random numerical analysis structures [J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1996, 13(2): 193—200. (in Chinese)
- [7] Chen Suhuan. Matrix perturbation theory in structure dynamic design [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [8] 胡太彬,陈建军,徐亚兰. 随机参数平面刚架结构频率特性分析的随机因子法[J]. 机械强度, 2006, 28(2): 196—200.  
Hu Taibin, Chen Jianjun, Xu Yalan. Random factor method for frequency characteristic analysis of stochastic frame structures [J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(2): 196—200. (in Chinese)
- [9] Chen J J, Che J W, Sun H A. Probabilistic dynamic analysis of truss structures [J]. Structural Engineering & Mechanics, 2002, 13(2): 231—239.
- [10] 陈建军. 机械与结构系统的可靠性[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994.  
Chen Jianjun. Reliability of mechanical and structural system [M]. Xi'an: Xidian University Press, 1994. (in Chinese)