

文章编号: 1000-4750(2011)07-0180-06

# 预应力 FRP 加固 RC 梁界面疲劳裂纹扩展行为研究

谢建和<sup>1</sup>, \*黄培彦<sup>2</sup>, 郭永昌<sup>1</sup>, 刘 锋<sup>1</sup>

(1. 广东工业大学土木与交通工程学院, 广东, 广州 510006; 2. 华南理工大学土木与交通学院, 广东, 广州 510640)

**摘 要:** 以预应力纤维增强复合材料(FRP)片材加固钢筋混凝土(RC)梁为研究对象, 探讨了该类加固梁中 FRP 与混凝土之间界面疲劳裂纹的扩展规律。基于界面裂纹尖端的力学分析模型, 理论推导了三点弯曲加固梁的界面裂纹应力强度因子(SIF)的计算公式, 分析了 FRP 预应力水平对 SIF 的影响, 并结合加固梁的界面裂纹扩展实验, 提出了该类加固梁界面疲劳裂纹扩展速率的半经验公式。研究表明: 加固梁的界面疲劳裂纹扩展可分为裂纹快速扩展、稳定扩展及失稳扩展 3 个阶段; 在加固梁失稳破坏之前, 界面疲劳裂纹的扩展速率可以 Paris 公式的形式表示; SIF 在加固梁跨中界面起裂时具有最大值, 随着界面裂纹长度的增大而减小; 在受拉钢筋弹性变形的范围内, 与无预应力 FRP 加固梁相比, 预应力 FRP 加固梁界面裂纹的 SIF 明显偏大。

**关键词:** 纤维增强复合材料(FRP); 界面裂纹; 应力强度因子(SIF); 疲劳裂纹扩展; 预应力; 钢筋混凝土梁

**中图分类号:** O346.1<sup>+</sup>1; TU375.1 **文献标志码:** A

## STUDY ON PROPAGATION BEHAVIOR OF FATIGUE INTERFACE CRACK IN RC BEAM STRENGTHENED WITH PRESTRESSED FRP

XIE Jian-he<sup>1</sup>, \*HUANG Pei-yan<sup>2</sup>, GUO Yong-chang<sup>1</sup>, LIU Feng<sup>1</sup>

(1. Faculty of Civil and Transportation Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

2. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

**Abstract:** The propagation behavior of interface fatigue crack in reinforced concrete (RC) beam strengthened with prestressed fiber reinforced polymer (FRP) was studied. The mechanical analysis model was established for the interface crack tip in the strengthened beam under three-point bending. The theoretical derivation of stress intensity factor (SIF) for the interface crack was presented base on the mechanical model, and the effect of the prestress level on SIF was discussed. Combined with the experiments on interface fatigue crack propagation rate, a semi-empirical formula was developed for the propagation rate of interface crack in such strengthened beams. Results showed that the propagation of the interfacial fatigue crack has three stages: rapid propagation, steady propagation and instability propagation. The interface crack propagation rate was described in the form of Paris formula before the instability propagation. SIF of the initial crack at mid-span interface reached the maximum and then decreased with the interface crack length. In elastic range of the reinforcing steel bar, the strengthened beam with prestress had large SIF compared with the strengthened beam without prestress.

**Key words:** fiber reinforced polymer (FRP); interface crack; stress intensity factor (SIF); fatigue crack propagation; prestress; reinforced concrete (RC) beam

收稿日期: 2010-01-12; 修改日期: 2010-07-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(10672060, 10802023); 广东省博士启动基金项目(10451009001004769); 广东省教育厅育苗工程项目(LYM10069)

作者简介: 谢建和(1980—), 男, 广东人, 讲师, 博士, 从事桥梁力学和桥梁加固技术研究(E-mail: jhxie@gdut.edu.cn);

\*黄培彦(1952—), 男, 广东人, 教授, 博士, 从事疲劳与断裂力学、桥梁加固技术研究(E-mail: pyhuang@scut.edu.cn);

郭永昌(1974—), 男, 山西人, 副教授, 博士, 从事FRP加固技术研究(E-mail: guoyc@gdut.edu.cn);

刘 锋(1965—), 男, 江苏人, 教授, 博士, 从事建筑结构新材料技术研究(E-mail: fliu@gdut.edu.cn).

土木工程中承受重复荷载作用的桥梁和吊车梁等结构, 往往会发生疲劳破坏。采用预应力纤维增强复合材料(FRP)延长该类构件疲劳寿命的加固技术是目前国内外土木建筑领域的一个前沿课题<sup>[1-3]</sup>。在该类加固钢筋混凝土(RC)构件中, 预应力 FRP 片材是直接粘贴于混凝土表面, 加固构件的疲劳性能、破坏机理均与 FRP-混凝土间界面的力学性能密切相关。若此类加固构件中存在界面裂纹, 则界面裂纹的扩展行为无疑是加固件疲劳性能的关键问题。然而, 目前已有的研究主要集中在预应力 FRP 加固混凝土构件的静力性能方面, 对该类加固构件疲劳性能的研究还不够深入和系统, 有关界面疲劳剥离破坏行为的研究鲜有报道<sup>[4-6]</sup>。由此可见, 开展预应力 FRP 片材加固 RC 构件的界面疲劳裂纹扩展行为研究具有重要的科学意义和工程应用价值。为此, 本文拟建立预应力 FRP 片材加固 RC 梁界面裂纹问题的力学分析模型, 理论推导三点弯曲荷载下加固梁的界面裂纹应力强度因子的计算公式, 分析 FRP 预应力水平等对界面裂纹应力强度因子的影响, 并结合界面疲劳裂纹扩展实验, 提出该类加固梁界面疲劳裂纹(II 型裂纹)扩展速率的计算公式。

### 1 界面裂纹的应力强度因子

本课题组前期的实验结果表明<sup>[7]</sup>, 在三点弯曲循环荷载作用下的预应力 FRP 加固 RC 梁, 界面起

裂于跨中加载点附近的弯曲主裂纹(I 型裂纹)处的根部, 并随着荷载循环次数的增加, 界面裂纹向 FRP 片端扩展, 如图 1(a)所示。当加固梁疲劳破坏时, FRP 迅速从加固梁的一端完全剥落, 并撕下 FRP 表面粘附的混凝土薄层, 如图 1(b)所示。

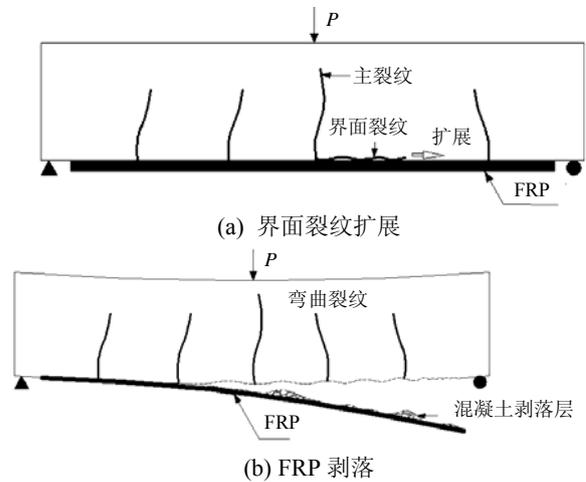


图 1 FRP 加固 RC 梁界面裂纹扩展示意图

Fig.1 Schematic of interface crack propagation in RC beam strengthened with FRP

#### 1.1 力学分析模型

以预应力 FRP 加固三点弯曲加固 RC 梁为研究对象, 假设加固梁的裂纹沿跨中为轴对称分布,  $h$  为 RC 梁高,  $t$  为 FRP 厚度,  $b$  为梁宽,  $a$  为界面裂纹长度。考虑到加固梁的对称性, 取其半跨, 并将坐标原点置于跨中的界面裂纹处, 建立其力学分析模型如图 2 所示。

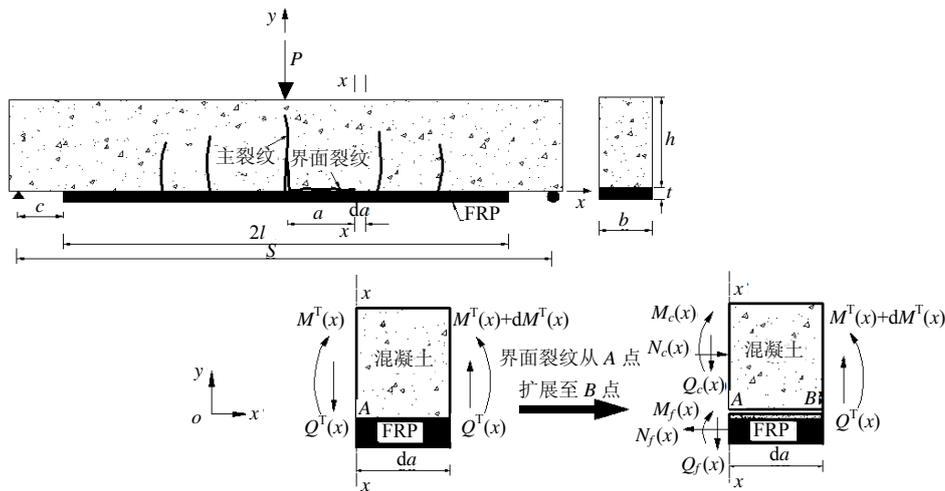


图 2 界面裂纹力学分析模型

Fig.2 Mechanical analysis model of interface crack

截取加固梁界面裂纹尖端附近的微段  $da$  进行分析(图 2)。其中,  $A$  点表示界面裂纹长度为  $a$  时的尖端,  $B$  点表示界面裂纹从  $A$  点扩展  $da$  时的尖端;

$M^I(x)$  和  $Q^I(x)$  分别表示界面裂纹尖端在  $A$  点时整梁截面的弯矩和剪力;  $M_c(x)$ 、 $Q_c(x)$ 、 $N_c(x)$  分别表示界面裂纹扩展至  $B$  点时混凝土层的弯矩、剪

力、轴力； $M_f(x)$ 、 $Q_f(x)$ 、 $N_f(x)$ 分别表示界面裂纹扩展至  $B$  点时 FRP 的弯矩、剪力和轴力。

对  $da$  微段建立平衡方程，有：

$$Q^T(x) = Q_c(x) + Q_f(x) \quad (1)$$

$$N_c(x) = N_f(x) \quad (2)$$

$$M^T(x) = M_c(x) + M_f(x) + \frac{h+t}{2} N_f(x) \quad (3)$$

根据三点弯曲加固梁的受力条件，可得：

$$Q^T(x) = \frac{P}{2} \quad (4)$$

$$N_f(x) = N_f^p + N_f^m(x) \quad (5)$$

$$M^T(x) = \frac{P(l-a) - (h+t)N_f^p}{2} \quad (6)$$

式中： $N_f^p$ 表示 FRP 的有效张拉力； $N_f^m(x)$ 表示集中力  $P$  作用下 FRP 的轴力增量，可参考预应力混凝土构件的计算理论获得<sup>[8]</sup>。

## 1.2 应力强度因子

由能量守恒定律可知，外载对裂纹体作功  $U_e$  的一部分变为弹性应变能  $U_s$  储存在裂纹体里，另一部分  $U_\gamma$  则由于形成新裂纹表面而消耗掉<sup>[9]</sup>。假设产生  $dA$  的断裂面积需要消耗外界提供的能量  $dU_\gamma$ ，根据断裂力学的知识，可得整个受力系统产生断裂面积  $dA$  的能量释放率  $G$  为：

$$G = \frac{dU_\gamma}{dA} = \frac{1}{b_c} \left( \frac{dU_e}{da} - \frac{dU_s}{da} \right) \quad (7)$$

式中： $b_c$ 表示裂纹体的宽度； $a$ 表示裂纹的长度。

如前面所述，界面开裂后会扯下一层薄薄的混凝土，表明界面破坏主要发生在混凝土和粘结树脂过渡区混凝土一侧。因此，为简化计算，参考各向同性均匀材料中  $U_e$  和  $U_s$  之间的关系式以及  $G$  和应力强度因子  $K$  之间的关系式<sup>[10]</sup>，结合式(7)，可得：

$$K = \sqrt{\frac{E_c}{b_c} \frac{dU_s}{da}} \quad (8)$$

式中， $E_c$ 为混凝土的弹性模量。

从图 2 所示的界面裂纹力学分析模型可知，界面裂纹从  $A$  点扩展至  $B$  点所导致应变能的变化，主要是由弯矩、轴力与剪力共同引起，故可从这 3 个

内力入手计算应变能的变化量。

(1) 弯矩引起的应变能变化。

当界面裂纹尖端从图 2 所示的  $A$  点扩展至  $B$  点时， $da$  梁段弯曲应变能的变化量为：

$$dU_s = \frac{[M_c(x)]^2}{2B_c} da + \frac{[M_f(x)]^2}{2B_f} da - \frac{[M^T(x)]^2}{2B_t} da \quad (9)$$

由于混凝土层高度远大于 FRP 厚度，为简化计算，假设界面裂纹上下层协调变形，即有：

$$M_c(x) = B_c \frac{M^T(x)}{B_t} \quad (10)$$

$$M_f = B_f \frac{M^T(x)}{B_t} \quad (11)$$

式中， $B_c$ 、 $B_f$ 和  $B_t$ 分别表示混凝土层、FRP 层和整梁截面的抗弯刚度。

(2) 剪力引起的应变能变化。

当界面裂纹尖端从图 2 所示  $A$  点扩展至  $B$  点时， $da$  梁段剪切应变能的变化量为：

$$dU_s = \frac{3[Q_c(x)]^2}{5S_c} da + \frac{3[Q_f(x)]^2}{5S_f} da - \frac{3[Q^T(x)]^2}{5S_t} da \quad (12)$$

式中， $S_c$ 、 $S_f$ 和  $S_t$ 分别表示混凝土层、FRP 层和整梁截面的抗剪刚度。

根据内力的微分关系，由式(10)和式(11)可得：

$$Q_c(x) = B_c \frac{Q^T(x)}{B_t} \quad (13)$$

$$Q_f(x) = B_f \frac{Q^T(x)}{B_t} \quad (14)$$

(3) 轴力引起的应变能变化。

当界面裂纹从图 2 所示  $A$  点扩展至  $B$  点时，轴力产生应变能的变化量为：

$$dU_s = \frac{[N_c(x)]^2}{2W_c} da + \frac{[N_f(x)]^2}{2W_f} da \quad (15)$$

式中， $W_c$ 和  $W_f$ 分别表示混凝土层和 FRP 层截面的抗压刚度。

将式(9)、式(12)和式(15)代入式(8)，可得到界面裂纹的应力强度因子  $K$  的表达式为：

$$K = \sqrt{\frac{E_c}{b} \left\{ \frac{[M_c(x)]^2}{2B_c} + \frac{[M_f(x)]^2}{2B_f} - \frac{[M^T(x)]^2}{2B_t} + \frac{3[Q_c(x)]^2}{5S_c} + \frac{3[Q_f(x)]^2}{5S_f} - \frac{3[Q^T(x)]^2}{5S_t} + \frac{[N_c(x)]^2}{2W_c} + \frac{[N_f(x)]^2}{2W_f} \right\}} \quad (6)$$

## 2 界面裂纹扩展实验

### 2.1 实验概况

为了探明预应力 FRP 加固 RC 梁界面疲劳裂纹的扩展规律, 本文在界面裂纹尖端应力场理论分析的基础上, 进行了界面疲劳裂纹扩展实验研究。本实验设计了 2 根矩形截面混凝土梁, 钢筋混凝土梁试件的尺寸为  $1850\text{mm}\times 100\text{mm}\times 200\text{mm}$ , 架立筋和箍筋均采用光圆钢筋, 配筋率为 0.981%, 实验梁的几何尺寸和配筋如图 3 所示。试件所用混凝土材料的配合比为水泥:水:砂:石=1.0:0.5:2.06:3.66, 其实测的轴心抗压强度为 37.3MPa。RC 梁中受拉纵筋的弹性模量为 206GPa, 屈服强度为 307MPa, 伸长率为 31%。FRP 片材采用本课题组与合作单位共同开发的碳纤维薄板<sup>[11]</sup>, 计算厚度为 0.23mm, 弹性模量为 240GPa, 极限抗拉强度为 3.50GPa。采用预压法对 FRP 施加预应力, 即先利用自主设计的锚具和夹具对 RC 梁进行偏心预压, 待预压力稳定后粘贴 FRP 于 RC 梁底面, 粘贴胶固结后放张预压力使 FRP 获得预应力。

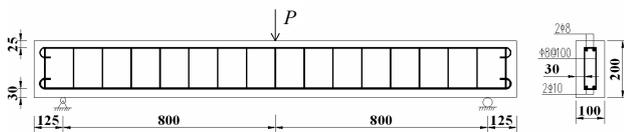


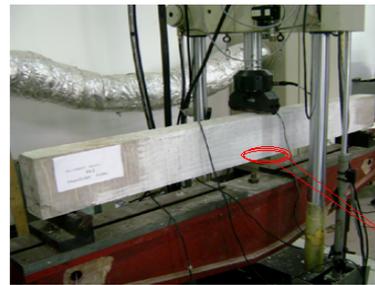
图 3 试件参数与配筋 /mm

Fig.3 Parameters and reinforcement of the specimen

疲劳裂纹扩展实验在 MTS-810 材料试验机上进行, 采用三点弯曲加载方式, 加载系统如图 4(a) 所示。疲劳加载的方式采用力控制模式, 疲劳循环的荷载波形为正弦波, 频率取为 10Hz, 应力比为 0.1。基于前期关于加固梁在静力作用下界面起始剥离荷载的研究结果<sup>[12]</sup>, 本次实验的疲劳荷载上限取为 32.5kN, 以便观测加固梁界面开裂和裂纹扩展的状况。实验系统主要由 MTS810 试验机、WaveBook-516E 动态应变采集系统、DJCK-2 型裂纹测宽仪等组成。界面裂纹长度在疲劳实验短暂停机时进行测量和记录, 其测量方法主要是借助 DJCK-2 型裂纹测宽仪进行测量。该测宽仪的放大倍数为 40 倍, 估读精度为 0.01mm, 如图 4(c) 所示。

为了在界面疲劳裂纹扩展过程中能比较准确地测量裂纹的长度, 先在试件两边将靠近 FRP 的混凝土用砂纸打磨平整并用丙酮清洗干净, 然后在试件两边靠近 FRP 与混凝土界面处刷上一层薄薄的水溶性白漆, 如图 4(b) 所示。疲劳实验的数据在

MTS 加载稳定之后开始采集。本实验在 300 次的循环加载结束后, 第一次暂时停机测量界面裂纹的长度。为了避免停机频率过高而影响加固梁界面的疲劳性能, 随着循环次数的增加, 每次停机相隔的循环次数可根据界面裂纹扩展的实际情况逐渐增加。当加固梁界面裂纹扩展处于稳定阶段, 由于界面裂纹的扩展速率较小, 此时停机测量相隔的循环次数取值比较大。



(a) 疲劳加载系统



(b) 界面裂纹



(c) DJCK-2 型裂纹测宽仪

图 4 界面裂纹扩展测试系统

Fig.4 Test system for interface crack propagation

## 2.2 实验结果与分析

### 2.2.1 界面裂纹扩展行为

通过对实验过程的观测及裂纹长度的测量可以发现, 预应力 FRP 加固 RC 梁在常幅疲劳荷载作用下的界面裂纹扩展过程, 可分为 3 个阶段: 1) 界面裂纹形成及快速扩展阶段。这一阶段的历程很短, 当加固梁跨中附近 RC 梁底部混凝土的应力率先达到其抗拉强度而开裂, 并快速扩展形成弯曲主裂纹。弯曲主裂纹的产生及扩展引起该裂纹根部 FRP

与混凝土界面处的应力集中，导致界面裂纹的形成，并快速扩展；2) 界面裂纹稳定扩展阶段。随着第1阶段的结束，界面裂纹进入到一个相对稳定扩展的阶段。这一阶段的历程较长，约占加固梁疲劳寿命的95%；3) 界面裂纹失稳扩展阶段。在循环载荷的不断作用下，加固梁中的受拉钢筋由于疲劳损伤不断累积而发生疲劳断裂，截面应力重新分布，导致FRP的应力突增，界面裂纹尖端的应力强度因子急剧增大，界面裂纹发生失稳扩展，FRP迅速从加固梁的一端完全剥落，如图5所示。几乎于同时，弯曲主裂纹也随之失稳扩展，混凝土受压区高度迅速减小，混凝土局部压碎，加固梁迅速丧失承载能力而破坏。加固梁的最终破坏形态包括了钢筋断裂、FRP剥落、混凝土压碎等3种现象。这一阶段的历程较短，约占疲劳寿命的1%~3%。

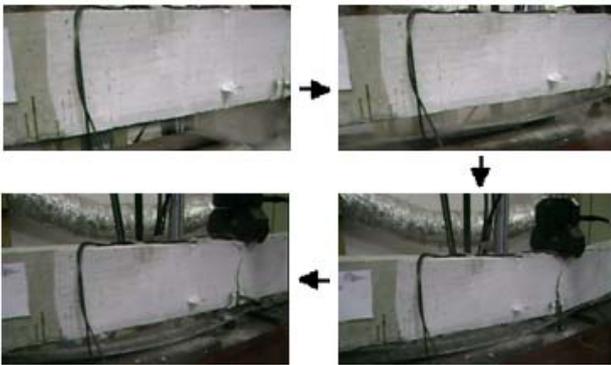


图5 加固梁界面裂纹失稳扩展过程

Fig.5 Unstable propagation process of interface crack in the specimen

### 2.2.2 界面裂纹扩展速率

图6和图7所示分别是实验梁PX-1和PX-2在荷载上限作用时的界面裂纹长度 $a$ 与循环次数 $N$ 的关系曲线。由图6可以看出，加固梁PX-1的界面疲劳裂纹在循环加载初期快速扩展，随着循环次数的增加，界面裂纹趋向稳定扩展，在循环次数140000次与200000次之间，界面裂纹扩展的长度小于1mm。另外，由图7也可以看出，加固梁PX-2的界面疲劳裂纹在循环加载初期快速扩展，随着循环次数的增加，界面裂纹向片端方向扩展。

参考 Paris 公式<sup>[13]</sup>，在疲劳载荷下界面裂纹的扩展速率可表示为：

$$da / dN = C(\Delta K)^m \tag{17}$$

式中： $\Delta K$ 为应力强度因子幅值，可由式(16)进行计算； $C$ 和 $m$ 为待定常数。

将式(17)的两边取对数，有：

$$\lg(da / dN) = \lg(C) + m \lg(\Delta K) \tag{18}$$

由于界面裂纹扩展第3阶段所占加固梁使用寿命的比例非常小，在建立 $da/dN$ 与 $\Delta K$ 的关系时，忽略了第3阶段的影响。图8所示为实验梁在循环荷载作用下界面裂纹扩展速率 $da/dN$ 与应力强度因子幅值 $\Delta K$ 的双对数关系，图8中的实线为 $da/dN$ 与 $\Delta K$ 的拟合关系曲线。

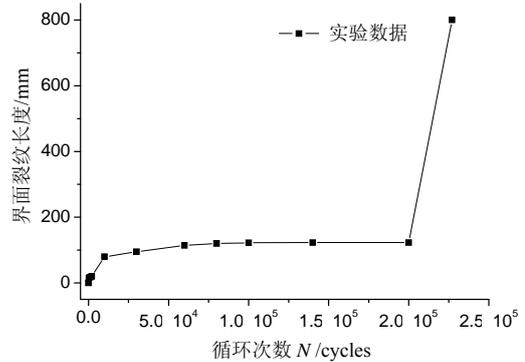


图6 界面裂纹长度 $a$ 与循环次数 $N$ 的实验曲线 (加固梁PX-1)

Fig.6 Interface crack length versus cycle numbers for specimen PX-1

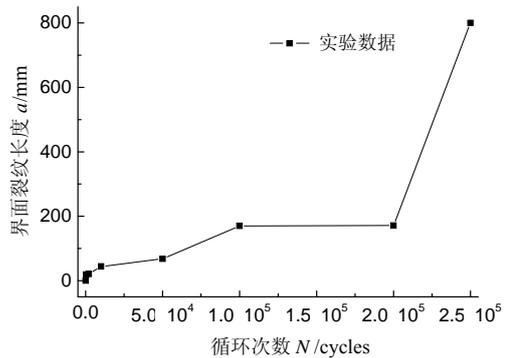


图7 界面裂纹长度 $a$ 与循环次数 $N$ 的实验曲线 (加固梁PX-2)

Fig.7 Interface crack length versus cycle numbers for specimen PX-2

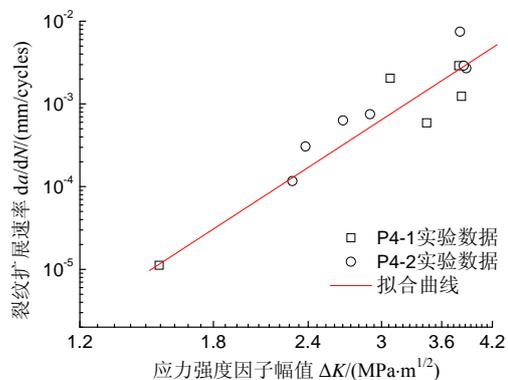


图8 界面裂纹扩展速率与应力强度因子幅值的关系曲线

Fig.8 Relationship between interface crack growth rate and amplitude SIF

对图 8 所示的数据进行回归分析, 得到其线性相关系数  $R^2=0.88$ , 可见数据点具有较好的相关性。利用最小二乘法对其进行线性拟合, 可得到式(18)中的常数  $C$  和  $m$  分别为:

$$C=1.30 \times 10^{-6}, m=5.54 \quad (19)$$

将式(19)代入式(17), 可得到加固梁界面疲劳裂纹扩展速率的表达式为:

$$\frac{da}{dN} = 1.30 \times 10^{-6} (\Delta K)^{5.54} \quad (20)$$

以上分析表明, 预应力 FRP 加固 RC 梁界面疲劳裂纹的扩展速率仍可以 Paris 公式的形式表示。

### 3 参数分析

采用本文疲劳实验的加固梁作为计算实例。为了便于计算, 集中荷载  $P$  取为 30kN, FRP 的有效预应力取为 FRP 抗拉强度的 10%。将加固梁的尺寸、材料特性以及荷载条件分别代入界面裂纹应力强度因子的计算公式(16), 可得出预应力 FRP 加固梁与无预应力 FRP 加固梁界面裂纹应力强度因子  $K$  与界面裂纹长度  $a$  的关系曲线, 如图 9 所示。

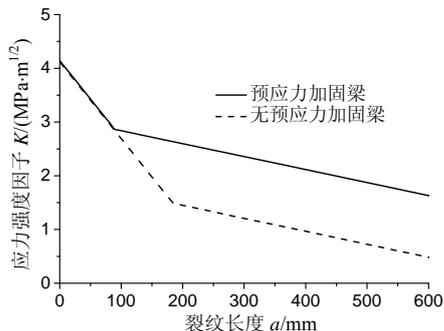


图 9 应力强度因子与裂纹长度的关系曲线

Fig.9 Relationship curve between SIF and interface crack length

由图 9 可见, 预应力 FRP 加固梁与无预应力 FRP 加固梁界面裂纹的应力强度因子均在跨中界面起裂时具有最大值, 并随着界面裂纹长度的增大而逐渐减小。当预应力 FRP 加固梁和无预应力 FRP 加固梁的界面裂纹长度  $a$  分别扩展至 90mm 和 184mm 时, 其对应的应力强度因子曲线均出现拐点。这主要是因为, 在  $a=0\text{mm}\sim 184\text{mm}$  范围内, 无预应力 FRP 加固梁界面裂纹上部的钢筋已处于塑性变形, 而由于预应力的作用, 预应力 FRP 加固梁界面裂纹上部的钢筋只在  $a=0\text{mm}\sim 90\text{mm}$  范围内处于塑性变形状态。从图 9 可以看出, 在界面裂纹上部的钢筋均已处于塑性变形的范围内即  $a=0\text{mm}\sim$

90mm, 两种加固梁界面裂纹的应力强度因子曲线接近平行, 同一界面裂纹长度时两者几乎相等。但是, 当界面裂纹扩展至预应力 FRP 加固梁的受拉钢筋处于弹性变形的范围内即  $a > 90\text{mm}$ , 与无预应力 FRP 加固梁相比, 预应力 FRP 加固梁界面裂纹的应力强度因子明显偏大。同时, 还值得注意的是, 与在受拉钢筋塑性变形的范围内相比, 钢筋弹性变形范围内界面裂纹的应力强度因子随界面裂纹长度的衰减速率显著降低。

### 4 结论

本文对预应力 FRP 加固 RC 梁的界面裂纹扩展行为进行了理论分析和实验研究, 给出了该类加固构件中界面疲劳裂纹的应力强度因子及其扩展速率的表达式, 并得到了如下结论:

(1) 实验结果表明, 加固梁界面疲劳裂纹扩展可分为裂纹快速扩展、稳定扩展及失稳扩展等 3 个阶段。其中, 界面裂纹稳定扩展阶段历程最长, 约占加固梁疲劳寿命 95%。

(2) 在失稳破坏前, 预应力 FRP 加固 RC 梁中界面疲劳裂纹的扩展速率可以 Paris 公式的形式进行表示。

(3) 三点弯曲加固梁的界面裂纹应力强度因子在跨中界面起裂时具有最大值, 但随着界面裂纹长度的增大, 界面裂纹的应力强度因子逐渐减小。

(4) 在界面裂纹上部受拉钢筋弹性变形的范围内, 与无预应力 FRP 加固梁相比, 预应力 FRP 加固梁界面裂纹的应力强度因子明显偏大。但是, 在界面裂纹上部钢筋塑性变形的范围内, 两种梁同一界面裂纹长度对应的应力强度因子几乎相等。

上述研究成果将对桥梁加固工程中预应力 FRP 的加固设计以及加固后构件的疲劳寿命预测等提供理论依据和实验数据。

### 参考文献:

- [1] Täljsten B, Hansen C S, Schmidt J W. Strengthening of old metallic structures in fatigue with prestressed and non-prestressed CFRP laminates [J]. Construction and Building Materials, 2009, 23(4): 1665—1677.
- [2] Benachour A, Benyoucef S, Tounsi A, Addabedia E A. Interfacial stress analysis of steel beams reinforced with bonded prestressed FRP plate [J]. Engineering Structures, 2008, 30(11): 3305—3315.

(参考文献[3]—[13]转第 216 页)

$$\begin{cases} A_1 = \frac{(R_T^2 - R_B^2)^2 \pi C R_T}{(R_T^2 - R^2 + 2R_T \bar{\delta})^2} \\ A_3 = \frac{3(R_T^2 - R_B^2)^2 \pi C R_T^3}{(R_T^2 - R_B^2 + 2R_T \bar{\delta})^4} \\ C = V^2 \sin \beta_1 \rho_0 (\cos \beta_1 + \varphi \cos \beta_2) \end{cases}$$

式中:  $e_c$  为转子的形心偏心距;  $\rho_0$  为气流密度;  $R_T$  为叶尖半径;  $R_B$  为叶根半径;  $\beta_1$  为进气角,  $\beta_2$  为出气角;  $\varphi$  为速度系数;  $\bar{\delta}$  为叶尖平均间隙;  $V$  为相对进气速度。

无量纲气流量表达式为:

$$f_a = \frac{A_1 \cdot \varepsilon_c + A_3 \cdot \delta^2 \varepsilon_c^3}{m_1 \Omega^2}$$

3) Muszynska 模型:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} K - m_f \tau_f^2 \Omega^2 & \tau_f \Omega D \\ -\tau_f \Omega D & K - m_f \tau_f^2 \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D & 2m_f \tau_f \Omega \\ -2m_f \tau_f \Omega & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

无量纲密封力表达式为:

$$\begin{pmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ -d_2 & d_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_2' \\ \dot{y}_2' \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 \\ 0 & \bar{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2'' \\ y_2'' \end{pmatrix}$$

其中,

$$\begin{cases} k_1 = \frac{2K - 2m_f \tau_f^2 \Omega^2}{m_2 \Omega^2}, k_2 = \frac{2\tau_f D}{m_2 \Omega} \\ d_1 = \frac{2D}{m_2 \Omega}, d_2 = \frac{4m_f \tau_f}{m_2}, \bar{m} = \frac{2m_f}{m_2} \end{cases}$$

式中:  $\Omega$  是转子的旋转角速度;  $\tau_f$  是流体周向平均流速比;  $K$ 、 $D$ 、 $m_f$  分别为密封力的当量刚度、当量阻尼、当量质量。

(上接第 185 页)

- [3] Kim Y J, Wight R G, Green M F. Flexural Strengthening of RC beams with prestressed CFRP sheets: development of nonmetallic anchor systems [J]. *Journal of Composites for Construction*, 2008, 12(1): 35—43.
- [4] 邓宗才, 李凯. 预应力与非预应力 AFRP 加固腐蚀钢筋混凝土梁疲劳性能研究[J]. *土木工程学报*, 2009, 42(9): 54—59.  
Deng Zongcai, Li Kai. Experimental study on fatigue performance corroded reinforced concrete beams strengthened with prestressed AFRP sheets [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(9): 54—59. (in Chinese)
- [5] Wight R G, El-Hacha R, Erki M A. Prestressed and nonprestressed CFRP sheet strengthening: damaged continuous reinforced concrete beams [J]. *International Journal of Materials and Product Technology*, 2003, 19(1-2): 96—107.
- [6] 彭晖, 尚守平, 张建仁, 万剑平. 预应力碳纤维板加固受弯构件的疲劳性能研究[J]. *土木工程学报*, 2009, 42(8): 42—49.  
Peng Hui, Shang Shouping, Zhang Jianren, Wan Jianping. Fatigue behavior of reinforced concrete beams strengthened with prestressed carbon fiber reinforced polymer plates [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(8): 42—49. (in Chinese)
- [7] Xie J H, Huang P Y, Deng J. Fatigue behavior of RC beams strengthened with prestressed carbon fiber laminates [C]. Fan J H. *Advances in Heterogeneous Material Mechanics* 2008, Pennsylvania: DEStech Publications Inc., 2008: 1229—1233.
- [8] 李国平. 预应力混凝土结构设计原理[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.  
Li Guoping. *Design principle of Prestressed concrete structure* [M]. Beijing: China Communication Press, 2000. (in Chinese)
- [9] Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1921, Series A, 221: 163—198.
- [10] Broek D. 工程断裂力学基础[M]. 王克仁, 译. 北京: 科学出版社, 1980.  
Broek D. *Elementary engineering fracture mechanics* [M]. Translated by Wang Keren. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese)
- [11] 黄培彦, 曾竟成. 纤维薄板及其应用[P]. 中国, ZL200410026742.8, 公开日期: 2005-1-12.  
Huang Peiyan, Zeng Jingcheng. *Application of carbon fiber laminate* [P]. China patent: ZL200410026742.8, Publish Date: 2005-1-12. (in Chinese)
- [12] 谢建和, 黄培彦, 郭馨艳. 预应力 FRP 加固 RC 梁受弯剥离承载力分析[J]. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2009, 37(6): 107—112.  
Xie Jianhe, Huang Peiyan, Guo Xinyan. *Analysis of debonding load-carrying capacity for RC beams strengthened with prestressed FPR under bending load* [J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2009, 37(6): 107—112. (in Chinese)
- [13] Paris P C, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws [J]. *ASME Transactions, Journal of Basic Engineering, Series D*, 1963, 85D(4): 528—534.