

文章编号: 1000-4750(2013)10-0065-06

基于极大似然估计的多参考点模态参数识别方法

孙鑫晖, 郝木明, 李振涛

(中国石油大学(华东)化学工程学院, 山东, 青岛 266580)

摘 要: 在考虑随机噪声的情况下, 实现了一种基于极大似然估计的多参考点频域模态参数识别方法。该方法采用频响函数的右矩阵分式模型, 通过噪声的协方差矩阵对误差向量加权, 使用离散时间域中基函数改善数值求解性态。模态参数的估计过程分为两步: 首先由基于最小二乘估计的 polyLSCF 算法获取迭代初值, 然后通过 Gauss-Newton 方法对极大似然函数进行迭代优化, 得到精度更高的模态参数识别结果。采用 GARTEUR 仿真算例对所给出的方法进行了验证, 结果表明: 在高噪声情况下, 利用噪声信息的极大似然估计方法能够显著提高模态参数的识别精度, 特别是阻尼的识别精度。

关键词: 随机噪声; 模态参数识别; 最小二乘估计; 极大似然估计; Gauss-Newton 方法

中图分类号: TP274 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.06.0407

POLY-REFERENCE MODAL PARAMETERS IDENTIFICATION BASED ON MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATOR

SUN Xin-hui, HAO Mu-ming, LI Zhen-tao

(College of Chemical Engineering, University of Petroleum of China, Qingdao 266580, China)

Abstract: A frequency-domain modal parameters identification method based on maximum likelihood estimation is investigated considering stochastic noise. This method uses right matrix fraction description model of frequency response function. The noise covariance matrix is adopted as weighting function. The basis function in discrete time domain is utilized for improving numerical condition. First, the least square estimation is implemented to get the initial value of modal parameters. Then, the iterative optimization of Gauss-Newton method is carried out to get more precise identification result. A simulation case of GARTEUR model is employed to validate the method. Results show that the accuracy of modal parameters is improved obviously from maximum likelihood estimation method under high noise, especially for the damping ratio accuracy.

Key words: stochastic noise; modal parameter identification; least square estimation; maximum likelihood estimation; Gauss-Newton method

模态参数识别是结构动力学分析的重要内容。从目前使用的识别方法来看, 基于最小二乘估计的识别方法不在少数^[1-2]。根据系统辨识理论, 最小二乘估计不考虑实际观测数据的随机性及其分布规律, 属于确定性识别方法^[3]。当辨识模型为参数的非线性函数时, 其估计精度与可信度受到限制。

随着对模态参数识别精度要求的提高(损伤识别、健康监测), 以及大噪声测量数据场合(飞行颤振试验)的模态参数识别, 促使了不确定性模态参数识别方法^[3]的发展。由于时域噪声变换到频域后都近似呈复正态分布^[1,4], 因此基于正态分布的极大似然估计成为更好的选择。

收稿日期: 2012-06-06; 修改日期: 2013-03-16

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项基金项目(12CX04051A); 青岛市科技计划项目(1314204jch)

通讯作者: 孙鑫晖(1979—), 男, 青州人, 讲师, 博士, 从事结构动力学建模与仿真、动态测试与模态参数识别研究(E-mail: huaji97sunxinhui@163.com).

作者简介: 郝木明(1964—), 男, 山东泰安人, 教授, 博士, 从事石油化工流体机械研究(E-mail: haomm@upc.edu.cn);

李振涛(1986—), 男, 山东德州人, 博士生, 从事石油化工流体机械研究(E-mail: lzt0901@163.com).

Schoukens^[5]对 SISO 频域极大似然算法进行了研究。Guillume 给出了一种频域 MIMO 极大似然估计方法^[6], 该方法基于频响函数的公分母模型, 通过噪声方差对测量误差进行加权, Verboven 也对此进行了研究和应用^[7-9]。

本文实现了一种基于矩阵分式模型的频域 MIMO 极大似然估计方法, 其中频响应函数模型以及噪声加权项都是矩阵形式, 因此属于多参考点识别方法。

1 基于矩阵分式模型的极大似然估计

极大似然估计的基本思想是构造一组随机变量的联合概率密度函数, 极大化该组随机变量在观测结果出现的可能性, 从而获得参数的估计值。对于一个具有 N_o 个输出、 N_i 个输入的 MIMO 系统, 时域输入、输出数据已经通过 DFT 变换到频域。其中输入信号的真值为 F_k , 测量值为 F'_k , 输入噪声 M_k , $k=1, 2, \dots, N_i$ 。输出信号的真实值 Y_k , 测量值为 Y'_k , 输入噪声为 N_k , $k=1, 2, \dots, N_o$ 。系统结构如图 1 所示。

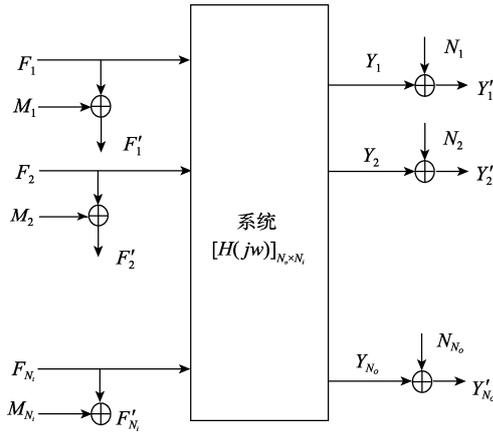


图 1 系统模型

Fig.1 System model

本文需要做几点假设：

- 1) 噪声满足均值为零, 服从复正态分布。
- 2) 噪声在不同的频率分量之间相互独立。
- 3) 不同输出信号之间的噪声相互独立。

1.1 极大似然函数的推导

假定系统具有 N_o 个输出、 N_i 个输入, 共包含 $N_o N_i$ 个随机变量, 这些随机变量的联合概率密度函数为：

$$p(\omega) = \left[(2\pi)^{N_o N_i} \det(\mathbf{C}(\omega)) \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{v}^H(\omega) \mathbf{C}^{-1}(\omega) \mathbf{v}(\omega)} \quad (1)$$

其中： $\mathbf{C}(\omega) \in \mathbb{C}^{N_o N_i \times N_o N_i}$ 为噪声的协方差矩阵；

$\mathbf{v}(\omega) \in \mathbb{C}^{N_o N_i \times 1}$ 为误差向量, 其中包含待估计参数 θ 。根据假设 2), 不同频率分量处的噪声相互独立, 极大似然函数可以表示为^[1,3]:

$$f(\theta) = (2\pi)^{-\frac{N_o N_i N_f}{2}} \left(\prod_{k=1}^{N_f} \det(\mathbf{C}(\omega_k)) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{v}^H(\omega_k) \mathbf{C}^{-1}(\omega_k) \mathbf{v}(\omega_k)} \quad (2)$$

其中, N_f 为谱线数, 对式(2)取负对数, 得到:

$$-\ln(f(\theta)) = \frac{N_o N_i N_f \ln(2\pi)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_f} \ln(\det(\mathbf{C}(\omega_k))) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{v}^H(\omega_k) \mathbf{C}^{-1}(\omega_k) \mathbf{v}(\omega_k) \quad (3)$$

极大化式(2)等价于极小化式(3), 式(3)中前两项为常数, 因此定义等价的极大似然函数 $L(\theta)$:

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{v}^H(\omega_k) \mathbf{C}^{-1}(\omega_k) \mathbf{v}(\omega_k) \quad (4)$$

根据假设 3), 当每行频响函数的噪声相互独立时, 噪声的协方差矩阵 $\mathbf{C}(\omega_k)$ 可简化为:

$$\mathbf{C}(\omega_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(\omega_k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2(\omega_k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{C}_{N_o}(\omega_k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{C}_o(\omega_k) \in \mathbb{C}^{N_i \times N_i}$ ($o=1, 2, \dots, N_o$) 为每行频响函数中噪声的协方差矩阵:

$$\mathbf{C}_o(\omega_k) = \text{cov}(\tilde{\mathbf{H}}_o^T(\omega_k)) = E(\Delta \tilde{\mathbf{H}}_o^T(\omega_k) \Delta \tilde{\mathbf{H}}_o^*(\omega_k)) \quad (6)$$

误差向量 $\mathbf{v}(\omega_k)$ 可以表示为:

$$\mathbf{v}(\omega_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\omega_k) \\ \mathbf{v}_2(\omega_k) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{N_o}(\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{H}}_1(\omega_k) - \mathbf{H}_1(\omega_k, \theta))^T \\ (\tilde{\mathbf{H}}_2(\omega_k) - \mathbf{H}_2(\omega_k, \theta))^T \\ \vdots \\ (\tilde{\mathbf{H}}_{N_o}(\omega_k) - \mathbf{H}_{N_o}(\omega_k, \theta))^T \end{bmatrix} \quad (7)$$

\mathbf{H}_o 、 $\tilde{\mathbf{H}}_o$ 分别为频响函数的理论值与测量值。

将式(5)、式(7)代入到式(4)中, $L(\theta)$ 表示为:

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{o=1}^{N_o} \mathbf{v}_o^H(\omega_k) \mathbf{C}_o^{-1}(\omega_k) \mathbf{v}_o(\omega_k) \quad (8)$$

当频响函数采用右矩阵分式模型描述时, 则每行频响函数的误差向量 $\mathbf{v}_o(\omega_k)$ 可表示为^[10]:

$$\mathbf{v}_o(\omega_k) = (\tilde{\mathbf{H}}_o(\omega_k) - \mathbf{B}_o(\omega_k) \mathbf{A}^{-1}(\omega_k))^T \quad (9)$$

式(9)中分母矩阵 \mathbf{B}_o 、分子矩阵 \mathbf{A} 分别为:

$$\mathbf{B}_o(\omega_k) = \sum_{r=0}^n \mathbf{B}_{o,r} \Omega_r(\omega_k), \mathbf{A}(\omega_k) = \sum_{r=0}^n \mathbf{A}_r \Omega_r(\omega_k) \quad (10)$$

式中: $\mathbf{B}_{o,r}$ 、 \mathbf{A}_r 是系数矩阵; n 为模型阶次; $\Omega_r(\omega_k)$

为离散时间域中基函数。最终待估计参数 θ :

$$\theta = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_o} \\ \alpha \end{Bmatrix}, \quad \beta_o = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{o,0}^T \\ \mathbf{B}_{o,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{o,n}^T \end{Bmatrix}, \quad \alpha = \begin{Bmatrix} \text{vec}(\mathbf{A}_0) \\ \text{vec}(\mathbf{A}_1) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{A}_n) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

1.2 极大似然函数的优化求解

求解 θ 等价于求解无约束的极小值问题, 为非线性最小二乘问题。本文采用 Gauss-Newton 方法进行迭代求解, 初值来自 polyLSCF^[10]算法。首先将 $L(\theta)$ 写成以下二次形式:

$$L(\theta) = \mathbf{Q}(\theta)^H \mathbf{Q}(\theta) \quad (12)$$

$\mathbf{Q}(\theta) = [\mathbf{Q}_1^T \quad \mathbf{Q}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_{N_o}^T]^T \in \mathbb{C}^{N_o N_i N_f \times 1}$ 的表达式:

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_1)(\tilde{\mathbf{H}}_o^T(\omega_1) - \mathbf{A}^{-T}(\omega_1)\mathbf{B}_o^T(\omega_1)) \\ \mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_2)(\tilde{\mathbf{H}}_o^T(\omega_2) - \mathbf{A}^{-T}(\omega_2)\mathbf{B}_o^T(\omega_2)) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_{N_f})(\tilde{\mathbf{H}}_o^T(\omega_{N_f}) - \mathbf{A}^{-T}(\omega_{N_f})\mathbf{B}_o^T(\omega_{N_f})) \end{bmatrix} \quad (13)$$

通过计算 $\mathbf{Q}(\theta)$ 的一阶导数得到 Jacobian 矩阵 \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{Q}(\theta)}{\partial \theta^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{Y}_1 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \cdots & 0 & \mathbf{Y}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}_{N_o} & \mathbf{Y}_{N_o} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中: \mathbf{X}_o 为 $\mathbf{Q}_o(\theta)$ 对 β_o 的导数, \mathbf{Y}_o 为 $\mathbf{Q}_o(\theta)$ 对 α 的导数, 详细推导见[11]。

$$\mathbf{X}_o = \frac{\partial \mathbf{Q}_o(\theta)}{\partial \beta^T} = - \begin{bmatrix} \Omega(\omega_1) \otimes \left(\mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_1) \mathbf{A}^{-T}(\omega_1) \right) \\ \Omega(\omega_2) \otimes \left(\mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_2) \mathbf{A}^{-T}(\omega_2) \right) \\ \vdots \\ \Omega(\omega_{N_f}) \otimes \left(\mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_{N_f}) \mathbf{A}^{-T}(\omega_{N_f}) \right) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{Y}_o = \frac{\partial \mathbf{Q}_o(\theta)}{\partial \alpha^T} =$$

$$\begin{bmatrix} \Omega(\omega_1) \otimes \left(\mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_1) (\mathbf{A}^{-T}(\omega_1) \mathbf{B}_o(\omega_1) \mathbf{A}^{-1}(\omega_1)) \right) \\ \Omega(\omega_2) \otimes \left(\mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_2) (\mathbf{A}^{-T}(\omega_2) \mathbf{B}_o(\omega_2) \mathbf{A}^{-1}(\omega_2)) \right) \\ \vdots \\ \Omega(\omega_{N_f}) \otimes \left(\mathbf{C}_o^{-\frac{1}{2}}(\omega_{N_f}) (\mathbf{A}^{-T}(\omega_{N_f}) \mathbf{B}_o(\omega_{N_f}) \mathbf{A}^{-1}(\omega_{N_f})) \right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中:

$$\Omega(\omega_k) = [\Omega_0(\omega_k) \quad \Omega_1(\omega_k) \quad \cdots \quad \Omega_n(\omega_k)] \in \mathbb{C}^{1 \times (n+1)} \quad (17)$$

由于协方差矩阵为块对角形矩阵, 使得 \mathbf{J} 矩阵具有式(14)中的稀疏型式。迭代过程中参数的变化量 $\Delta\theta$ 可以通过下式计算, 这里系数为实数:

$$\text{Re}(\mathbf{J}^H \mathbf{J}) \Delta\theta = -\text{Re}(\mathbf{J}^H \mathbf{Q}) \quad (18)$$

将 \mathbf{J} 、 \mathbf{Q} 的表达式代入式(18)中:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{S}_1 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & \cdots & 0 & \mathbf{S}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R}_{N_o} & \mathbf{S}_{N_o} \\ \hline \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_2^T & \cdots & \mathbf{S}_{N_o}^T & \sum_{o=1}^{N_o} \mathbf{T}_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \vdots \\ \Delta\beta_{N_o} \\ \Delta\alpha \end{Bmatrix} = - \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} \text{Re}(\mathbf{X}_1^H \mathbf{Q}_1) \\ \text{Re}(\mathbf{X}_2^H \mathbf{Q}_2) \\ \vdots \\ \text{Re}(\mathbf{X}_{N_o}^H \mathbf{Q}_{N_o}) \\ \hline \sum_{o=1}^{N_o} \text{Re}(\mathbf{Y}_o^H \mathbf{Q}_o) \end{Bmatrix}$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_o = \text{Re}(\mathbf{X}_o^H \mathbf{X}_o) \in \mathbb{R}^{(n+1)N_i \times (n+1)N_i} \\ \mathbf{S}_o = \text{Re}(\mathbf{X}_o^H \mathbf{Y}_o) \in \mathbb{R}^{(n+1)N_i \times (n+1)N_i^2} \\ \mathbf{T}_o = \text{Re}(\mathbf{Y}_o^H \mathbf{Y}_o) \in \mathbb{R}^{(n+1)N_i^2 \times (n+1)N_i^2} \end{cases} \quad (20)$$

直接求解式(19)比较困难, 可以通过消去 $\Delta\beta_o$ 获得缩减的正规方程。由式(19)中前 N_o 行可以得到:

$$\Delta\beta_o = -\mathbf{R}_o^{-1} (\text{Re}(\mathbf{X}_o^H \mathbf{Q}_o) + \mathbf{S}_o \Delta\alpha) \quad (21)$$

代入式(19)的最后一行, 得到缩减的正规方程:

$$\sum_{o=1}^{N_o} (\mathbf{T}_o - \mathbf{S}_o^T \mathbf{R}_o^{-1} \mathbf{S}_o) \Delta\alpha =$$

$$-\sum_{o=1}^{N_o} \text{Re}(Y_o^H Q_o - S_o^T R_o^{-1} X_o^H Q_o) \quad (22)$$

将 $\Delta\alpha$ 代入式(21)计算 $\Delta\beta_o$ 用于下次迭代。如果满足条件 $|\theta_m - \theta_{m-1}| \leq \varepsilon |\theta_{m-1}|$ ，则迭代停止。图 2 为迭代过程的流程图。

2 仿真算例

通过图 3 中的 GARTEUR 飞机模型建立仿真数据，该模型在航空界得到广泛应用。仿真数据中共有 2 个输入和 72 个输出，谱线数为 1024，分析频率范围 0Hz~40Hz，共包含 5 阶模态。

在大噪声以及模态密集等恶劣条件下，对本文方法与 polyLSCF 的识别精度进行比较。

在理论频响函数中添加了 20% 的高斯白噪声，如图 4。首先采用 polyLSCF 识别，阶次 $n = 5 \sim 50$ 。图 5 为识别的稳定图，噪声对后三阶模态影响较大。识别结果与之对应，1 阶、2 阶模态在较低阶次就能够识别，3 阶、4 阶模态所需阶次相对较高。第 5 阶模态最难识别，从 $n = 35$ 时才开始出现。

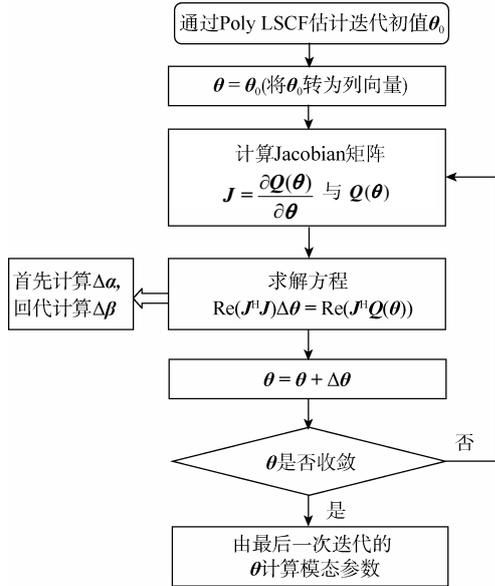


图 2 迭代流程
Fig.2 Iteration flow diagram

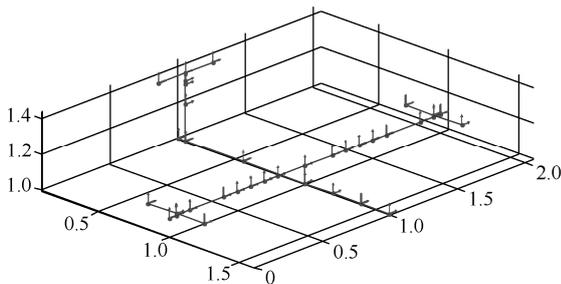
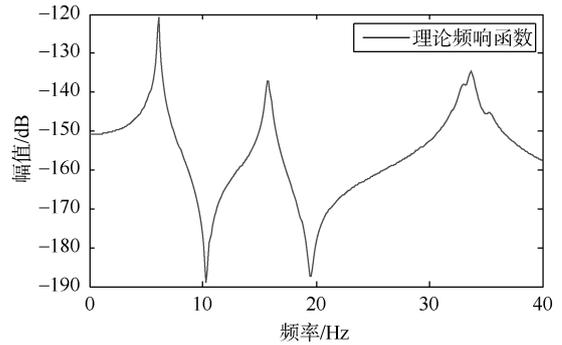
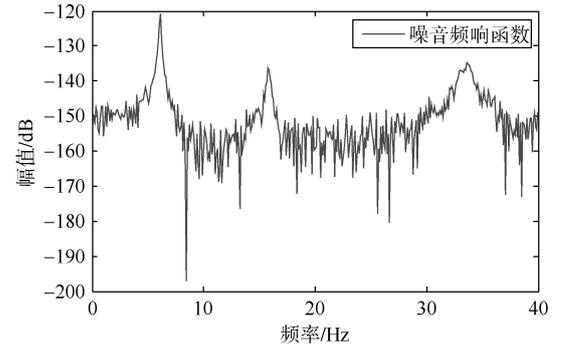


图 3 GARTEUR 仿真模型
Fig.3 GARTEUR simulation model



(a) 理论频响函数



(b) 噪声频响函数

图 4 理论与噪声频响函数

Fig.4 Theoretical and noisy frequency response function

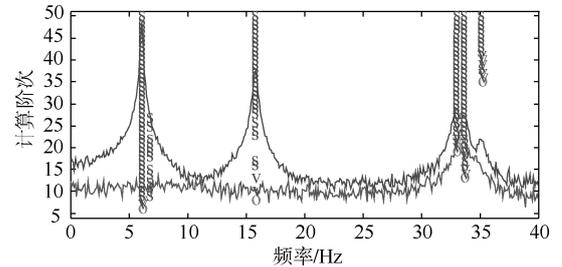


图 5 polyLSCF 方法识别的稳定图

Fig.5 Stabilization diagram of polyLSCF

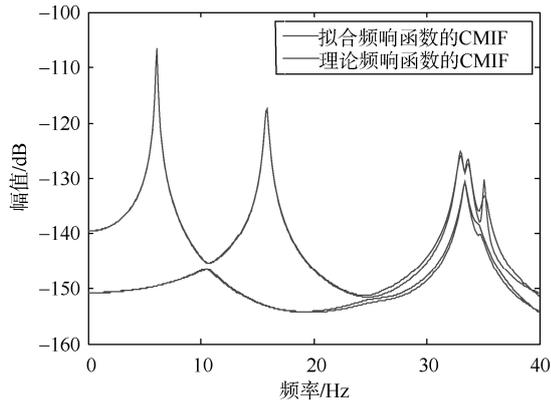
表 1 polyLSCF 识别结果(阶次 $n=50$)

Table 1 Identification results of polyLSCF ($n=50$)

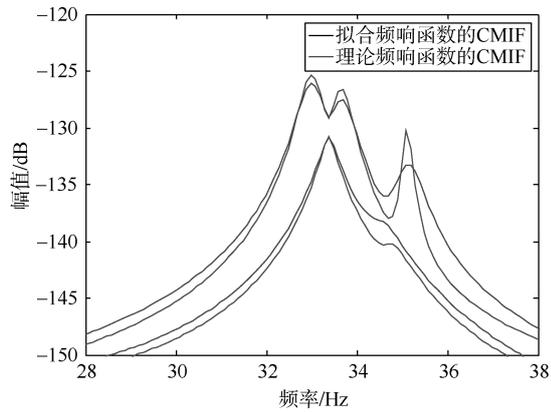
模态	固有频率/Hz			阻尼比/(%)		
	理论	识别	误差/(%)	理论	识别	误差/(%)
1	6.086	6.086	0.011	1.000	1.000	0.05
2	15.798	15.798	-0.003	1.000	0.971	2.95
3	33.007	32.996	-0.021	1.000	0.841	15.94
4	33.661	33.662	-0.007	1.000	0.818	18.23
5	35.136	35.119	-0.027	1.000	0.298	70.17

表 1 为阶次 $n = 50$ 的识别结果。其中频率与前 2 阶阻尼的识别结果比较准确，但后 3 阶阻尼的识别误差非常高。图 6 为拟合频响函数与理论频响函数的 CMIF 曲线。后三阶模态固有频率处的幅值都要高于理论值，因此阻尼识别偏小。

采用 polyMLFD 方法进行识别，图 7 为噪声频响函数及其方差，以 polyLSCF 方法在 $n=50$ 的识别



(a) 所有模态



(b) 3阶~5阶模态

图6 polyLSCF 拟合频响函数的 CMIF 曲线
Fig.6 Synthesised CMIF curve in polyLSCF

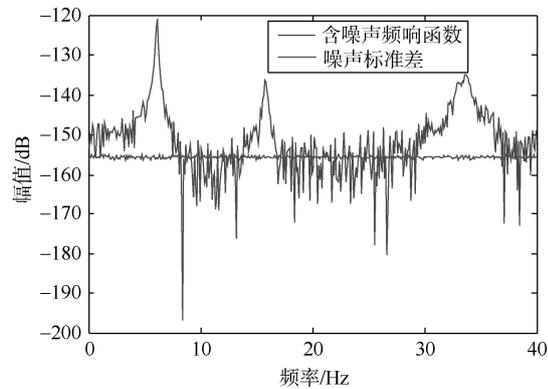
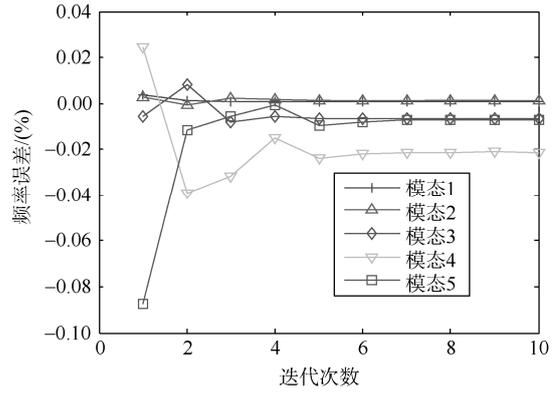
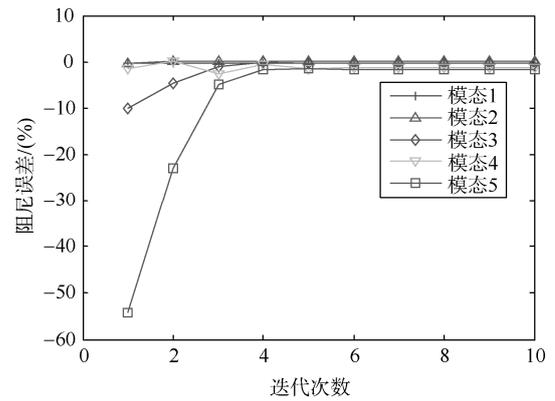


图7 噪声频响函数及其方差
Fig.7 Noised FRF and variance

结果作为迭代初值，采用本文方法进行识别。图 8 为频率和阻尼在迭代过程中的收敛情况，大约经过 4 次迭代之后，识别结果已经收敛。图 9 为 polyMLFD 识别的稳定图，其中纵坐标为迭代次数，表 2 为本文方法的识别结果，其中阻尼的识别精度得到明显提高。图 10 为 polyMLFD 方法中频响函数的 CMIF 曲线拟合结果，其中后三阶密集模态的拟合与理论值几乎能够重合。



(a) 频率



(b) 阻尼

图8 模态参数的收敛情况

Fig.8 Evolution of estimated modal parameters

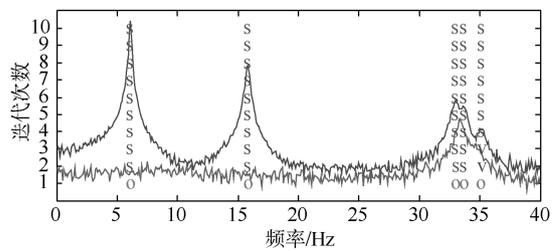
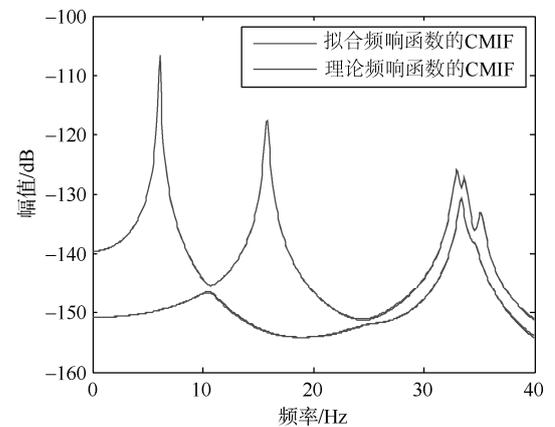


图9 polyMLFD 识别的稳定图

Fig.9 Stabilization diagram of polyMLFD



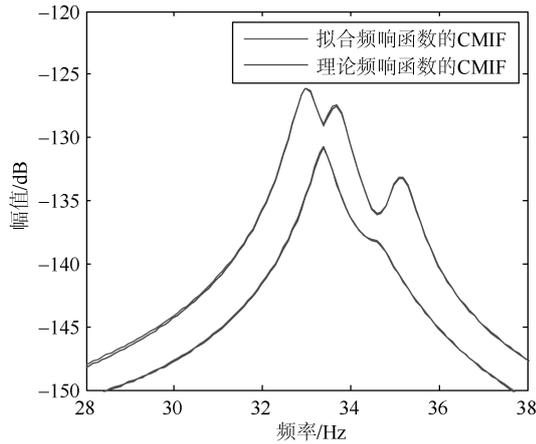


图 10 polyMLFD 拟合的 CMIF 曲线

Fig.10 Synthesised CMIF curve in polyMLFD

表 2 识别结果

Table 2 Identification results

模态	固有频率/Hz			阻尼比/(%)		
	理论	识别	误差/(%)	理论	识别	误差/(%)
1	6.086	6.086	-0.002	1.000	1.000	0.05
2	15.798	15.798	0.001	1.000	1.002	0.24
3	33.007	33.008	0.001	1.000	1.000	0.01
4	33.661	33.657	-0.013	1.000	0.969	3.07
5	35.136	35.141	0.015	1.000	0.993	0.76

3 结论

(1) 在对随机噪声做一定假设的条件下, 实现了多参考点频域极大似然估计方法。该方法使用 polyLSCF 方法的估计结果作为初始值, 通过 Gauss-Newton 方法进行迭代求解, 获得最优的模态参数估计。

(2) 采用具有真实飞机动态特性的 GARTEUR 模型仿真算例对本文方法进行验证。结果表明在噪声较高的情况下, 基于最小二乘估计的 polyLSCF 方法所识别的阻尼精度很低。本文方法由于利用了噪声信息, 极大改善了阻尼的识别精度。

(3) 虽然本文方法的识别精度较高, 但是由于需要迭代求解, 存在计算量较大的缺点。

参考文献:

- [1] Pintelon R, Guillaume P, Rolain Y, Schoukens J. Parametric identification of transfer functions in the frequency domain – a survey [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(11): 2245–2260.
- [2] Verboven P, Guillaume P, Cauberghe B, et al. Frequency-domain generalized total least-squares identification for modal analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 278(22): 21–38.
- [3] Cauberghe B. Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis [D]. Belgium: Vrije Universiteit Brussel, 2004
- [4] 陈光, 王永. 密集模态挠性结构模型多变量频域辨识和控制[J]. 实验力学, 2008(2): 141–148.
Chen Guang, Wang Yong. Multivariable Frequency domain maximum likelihood identification and control of flexible structures with close modes [J]. Journal of Experimental Mechanics, 2008(2): 141–148. (in Chinese)
- [5] Schoukens J, Pintelon R, Renneboog J. A maximum likelihood estimator for linear and nonlinear systems—a practical application of estimation techniques in measurement problem [J]. IEEE Transactions on Instrument and Measures, 1988, 37(1): 10–17.
- [6] Guillaume P, Verboven P, Vanlanduit S. Frequency-domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals [C]// Proceeding of ISMA 23, 1998.
- [7] Verboven P, Guillaume P, Cauberghe B, et al. Modal parameter estimation from input–output Fourier data using frequency-domain maximum likelihood identification [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 276(22): 957–979.
- [8] Parloo E, Guillaume P, Cauberghe B. Maximum likelihood identification of non-stationary operational data [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 268: 971–991.
- [9] Pintelon R, Schoukens J. Frequency domain maximum likelihood estimation of linear dynamic errors-in-variables models [J]. Automatica, 2007, 43(4): 621–630.
- [10] Guillaume P, Verboven P, Vanlanduit S, et al. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency domain estimator [C]// Proceeding of the 21th IMAC. Kissimmee, USA, February 2003:
- [11] 孙鑫晖. 频域模态参数识别研究及其软件实现[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.
Sun Xinhui. Frequency domain modal parameter identification and software implementation [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)