

文章编号: 1000-4750(2013)06-0016-06

结构可靠性灵敏度因子的一种新指标

杨 杰^{1,2}, 张 崎^{1,2}, 黄 一^{1,2}

(1. 大连理工大学船舶工程系, 辽宁, 大连 116023; 2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁, 大连 116023)

摘 要: 通过对可靠性灵敏度的分析和推导, 利用灵敏度标准差值构造了一种新的可靠性灵敏度因子。与传统灵敏度因子不同的是, 新因子不仅能反映各随机变量对结构失效概率影响的重要性程度, 因子的数值大小还能表征将单个变量作为确定性变量处理或将多个变量同时作为确定性量处理时所引起的可靠指标误差大小。据此结论, 采用新灵敏度因子进行灵敏度分析时, 只需要进行一次分析就能识别出各随机变量对结构失效整体影响的有益信息, 可以有效地提高计算效率, 降低分析难度。利用数值算例验证说明了所提可靠性灵敏度因子指标的有效性。

关键词: 可靠性; 灵敏度因子; 可靠指标; 分布参数; 二阶矩法

中图分类号: TU311 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.02.0088

A NEW SENSITIVITY FACTOR FOR STRUCTURAL RELIABILITY

YANG Jie^{1,2}, ZHANG Qi^{1,2}, HUANG Yi^{1,2}

(1. Department of Naval Architecture, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, China)

Abstract: A new reliability sensitivity factor is constructed by using the standard deviation of reliability sensitivities, based on the analysis and derivation of reliability sensitivities. Different from the traditional sensitivity factor, the new one can reflect the importance difference of all stochastic variables to structural failure probability, and also can represent the error caused by a variable or multiple variables considered as a constant. According to the conclusion, all helpful information from the effect of all stochastic variables on structural failure probability can be recognized by performing a reliability sensitivity analysis. This method can thusly improve the calculation efficiency and reduce the analysis difficulty greatly. The paper illustrates and verifies the conclusion by numerical examples in the final.

Key words: reliability; sensitivity factor; reliability index; distributed parameter; second moment method

在可靠性分析中, 确定各随机因素对系统可靠性的影响程度是一个重要问题, 这可以通过灵敏度分析完成。通过灵敏度可以获得基本随机变量及分布参数变异性对结构失效概率影响大小, 其结果对结构可靠性分析、设计以及建造具有重要指导意义^[1-3], 主要体现在两方面: 一是可以评价各随机因素对结构失效概率影响的相对程度; 二是通过灵敏度分析来识别可靠性设计中作为随机变量的参

数, 从而减少分析维数和难度, 提高计算效率。事实上, 灵敏度分析还可以提供更多关于结构失效与分布参数、失效函数敏感度关系等方面的有用信息, 这对于结构可靠性分析设计研究具有重要意义。

1 传统灵敏度因子

灵敏度分析的基本内容包括失效概率对随机变量的均值敏感度 $\partial P_f / \partial \mu_i$ 、标准差敏感度 $\partial P_f / \partial \sigma_i$ 以

收稿日期: 2012-02-16; 修改日期: 2012-09-09

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(11002033); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20100041120013)

通讯作者: 杨杰(1979—), 女, 辽宁昌图人, 博士生, 从事结构可靠性研究(E-mail: yung_jie@163.com).

作者简介: 张崎(1975—), 男, 辽宁大连人, 副教授, 博士, 从事结构可靠性及疲劳损伤研究(E-mail: zhangqi@dlut.edu.cn);

黄一(1964—), 男(满族), 辽宁丹东人, 教授, 博士, 博导, 党委书记, 从事船舶与海洋结构物环境损伤机理与控制研究(E-mail: huangyi@dlut.edu.cn).

及对极限状态方程的参数灵敏度 $\partial P_f / \partial x_i$ 等。灵敏度研究主要集中在多失效模式系统^[4-5]和动力系统^[6-7]灵敏度分析方法以及提高分析效率的改进方法^[8-11]上,而对于灵敏度分析结果与结构失效概率的内在关联等问题研究较少。目前主要采用以下几种灵敏度因子来评价随机变量对结构失效概率的影响:

1) 反映失效状态函数在观测点处的变化梯度。观测点可选在变量均值点处,也可选在设计点处,但取在设计点更能反映结构最可能失效的情况。灵敏度因子如下式所示:

$$S_i = -\frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{p^*} \sigma_i / \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial x_k} \Big|_{p^*} \sigma_k \right]^2} \quad (1)$$

2) 通过 $\partial P_f / \partial \mu_i$ 和 $\partial P_f / \partial \sigma_i$ 的变式来反映随机变量对结构失效的影响。Mansour^[12]对同一个变量定义一系列的灵敏度因子来反映随机变量对结构失效的影响,表达式见下式:

$$S_i = (\partial \beta / \partial \mu_i) \sigma_i \quad (2)$$

$$S_i = (\partial \beta / \partial \mu_i) \mu_i \quad (3)$$

$$S_i = (\partial \beta / \partial \sigma_i) \sigma_i \quad (4)$$

$$S_i = (\partial \beta / \partial \sigma_i) \mu_i \quad (5)$$

实际工程中的变量分布参数在数量等级上往往相差很大,直接采用 $\partial \beta / \partial \mu_i$ 与 $\partial \beta / \partial \sigma_i$ 或 $\partial P_f / \partial \mu_i$ 与 $\partial P_f / \partial \sigma_i$ 并不能真实地反映各参数对可靠性指标敏感性的相对大小。式(2)~式(5)变式通过分别乘以 μ_i 或 σ_i 来消除由数值差异带来的影响。

3) 为综合考虑失效状态函数以及各随机变量分布特征等对灵敏度的影响,文献[13]提出如下式所示的灵敏度因子。

$$S_i = sf_i / \sum_{k=1}^n sf_k, \quad sf_i = \sqrt{[(\partial P_f / \partial \mu_i) \sigma_i^*]^2 + [(\partial P_f / \partial \sigma_i) \sigma_i^*]^2} \quad (6)$$

上述灵敏度因子从不同侧面反映了随机变量变异性对结构失效概率的影响,各具特点:式(1)所示的灵敏度因子着重考虑了失效状态函数对灵敏度因子的影响,忽视了变量分布的特性;式(2)~式(5)所示的一系列灵敏度因子,缺乏统一的判断方法;式(6)所示的灵敏度因子虽然考虑了各因素与结构失效的变化关系,解决了多模态失效情况,但与式(1)和式(2)~(5)所定义的灵敏度因子相同,其因子值仅反映了随机变量对结构失效变化的相对程度,

而未能定量的表征该因素变异性所能引起的结构失效概率变化的大小。

通过上述任一方法得到灵敏度因子后,可以把对可靠指标影响很小的随机变量视为确定性变量,通过减少随机变量数目来提高计算效率。识别可作为确定性设计变量的过程为:首先计算考虑全部随机变量时的可靠指标 $\beta^{(0)}$ 及灵敏度因子;然后找出灵敏度因子最小的变量,将该变量视为常数再计算可靠指标 $\beta^{(1)}$ 及灵敏度因子;若可靠指标变化很小,重复上述过程,直到 $\beta^{(k)}$ 与 $\beta^{(k-1)}$ 相比发生较大变化为止。可以看出,上述过程每次只能识别一个随机变量是否可以作为确定性变量,当随机变量较多时,计算过程比较繁琐。因此,有必要构建新的灵敏度因子,旨在通过新灵敏度因子能够直观地表示各变量的变异性所能引起的结构失效概率变化的大小,为结构可靠性设计及分析提供更有效的理论依据。

2 新灵敏度因子

新灵敏度因子构造应以基本灵敏度分析内容 $\partial P_f / \partial \mu_i$ 、 $\partial P_f / \partial \sigma_i$ 以及 $\partial P_f / \partial x_i$ 为基础。因此,本文首先简要推导失效概率对各因素的灵敏度。设基本随机变量为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 结构极限状态方程为 $g(\mathbf{x}) = 0$, 本文中的随机变量都假定服从独立正态分布。

1) 失效概率对随机变量分布参数的灵敏度。

在标准正态空间 Y 中,根据可靠指标的几何意义有 $\beta = \sqrt{\mathbf{y}^{*T} \mathbf{y}^*}$, 并且 β 在验算点 \mathbf{y}^* 处的梯度满足 $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{y}^*} = \boldsymbol{\alpha}^* = -\frac{[\nabla g(\mathbf{y}^*)]^T}{\|\nabla g(\mathbf{y}^*)\|}$ 。因此,失效概率 P_f 对变量分布参数 $\theta_i (\mu_i, \sigma_i, i=1, 2, \dots, n)$ 的灵敏度可表示为:

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{y}^*} \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \theta_i} = \phi(-\beta) \frac{-[\nabla g(\mathbf{y}^*)]^T}{\|\nabla g(\mathbf{y}^*)\|} \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial \theta_i} \quad (7)$$

标准正态空间变量 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 与原始正态空间 X 中的变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足关系 $\mathbf{y} = T\mathbf{x} + B$, 其中 T 和 B 如下式:

$$T = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n} \right\}, \quad B = \left\{ -\frac{\mu_1}{\sigma_1}, \dots, -\frac{\mu_n}{\sigma_n} \right\}^T \quad (8)$$

式(8)满足下式所示的关系。

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \mu_i} &= \text{diag}\{0, 0, \dots, 0\}, \\ \frac{\partial B}{\partial \mu_i} &= \left\{ -\frac{1}{\sigma_1}, -\frac{1}{\sigma_2}, \dots, -\frac{1}{\sigma_n} \right\}^T, \\ \frac{\partial T}{\partial \sigma_i} &= \text{diag}\left\{ -\frac{1}{\sigma_1^2}, -\frac{1}{\sigma_2^2}, \dots, -\frac{1}{\sigma_n^2} \right\}, \\ \frac{\partial B}{\partial \sigma_i} &= \left\{ \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}, \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{\mu_n}{\sigma_n^2} \right\}^T\end{aligned}\quad (9)$$

综合式(7)~式(9), 得到:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_f}{\partial \mu_i} &= \phi(-\beta) \frac{-[\nabla g(y^*)]^T}{\|\nabla g(y^*)\|} \left[\frac{\partial T}{\partial \mu_i} x^* + \frac{\partial B}{\partial \mu_i} \right] = \\ &\phi(-\beta) \frac{-[\nabla g(y^*)]^T}{\|\nabla g(y^*)\|} \frac{\partial B}{\partial \mu_i}\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_i} &= \phi(-\beta) \frac{-[\nabla g(y^*)]^T}{\|\nabla g(y^*)\|} \left[\frac{\partial T}{\partial \sigma_i} x^* + \frac{\partial B}{\partial \sigma_i} \right] = \\ &\phi(-\beta) \frac{-[\nabla g(y^*)]^T}{\|\nabla g(y^*)\|} \frac{\partial B}{\partial \sigma_i} \frac{x^* - \mu_i}{\sigma_i}\end{aligned}\quad (11)$$

2) 失效概率对极限状态方程参数的灵敏度。

在 X 空间中, 失效概率对极限状态方程参数的灵敏度可直接推导为:

$$\frac{\partial P_f}{\partial x_i} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x_i} = \phi(-\beta) \frac{-[\nabla g(y^*)]^T}{\|\nabla g(y^*)\|} \frac{1}{\sigma_i} \quad (12)$$

将式(11)变换形式, 可得 $\partial P_f / \partial \sigma_i = \partial P_f / \partial \mu_i (x^* - \mu_i) / \sigma_i$, 即 $\partial P_f / \partial \sigma_i$ 结果中包含了 $\partial P_f / \partial \mu_i$ 这部分。进一步比照式(10)和式(12), 可以得到 $\partial P_f / \partial \mu_i = \partial P_f / \partial x_i$, 这说明, 当考虑失效点处灵敏度时, 失效概率对极限状态方程参数的灵敏度与对参数均值的灵敏度在数值上是相同的。上述结论表明式(11)已隐含了灵敏度分析中式(10)和式(12)的内容。

基于上述推导和理解, 本文基于式(11)构造了新的灵敏度因子, 如下式所示:

$$S_i = \frac{(\partial P_f / \partial \sigma_i) \sigma_i}{2 \sum_{k=1}^n (\partial P_f / \partial \sigma_k) \sigma_k} \quad (13)$$

由式(13)所定义的灵敏度因子不仅能够表征失效概率对各随机变量灵敏度之间的相对大小, 而且所得数值还具有实际含义, 可以为结构可靠性分析与设计提供信息参考。具体结论如下:

1) 灵敏度因子值 S_i 近似等于可靠指标相对误差值 $|\beta_{1,i} - \beta_\alpha| / \beta_\alpha$ 。其中 $\beta_{1,i}$ 代表将第 i 个变量视

为常数时得到的可靠指标, β_α 代表考虑全部随机变量得到的可靠指标。记 $err\beta_{1,i} = (\beta_{1,i} - \beta_\alpha) / \beta_\alpha$, 则有 $S_i \approx err\beta_{1,i}$ 成立。通过数值分析知, 该结论在灵敏度因子满足 $S_i \leq 0.05$ 条件时成立。

2) 灵敏度因子值 S_i 可以做为判定随机变量能否视为确定性变量的依据。根据试算, 因子小于 0.05 的随机变量都可以视为确定性变量。

3) 记 $err\beta_{k,I} = \sum_{j=1}^m (\beta_{k,j} - \beta_\alpha) / \beta_\alpha$, $S_a = \sum_{i=1}^k S_i$, 则有 $err\beta_{k,I} \approx S_a$ 成立。即 k 个随机变量同时视为确定性变量时的可靠指标相对误差 $err\beta_{k,I}$ 可用 k 个相应单变量的灵敏度因子之和 $\sum_{i=1}^k S_i$ 近似。

3 数值分析说明

以 6 变量功能函数为例, 结构失效状态方程为 $g(x) = 25.835x_1 - 4.3542x_2(x_3 + x_4x_5 + x_4x_6)$, 所有随机变量均服从独立正态分布, 均值 μ 和变异系数 δ 分别为 $\mu = \{7.01, 8.59, 0.9, 0.9, 0.825, 0.825\}$ 和 $\delta = \{0.123, 0.233, 0.05, 0.05, 0.07, 0.07\}$ 。

首先考虑全部随机变量, 采用一次二阶矩法获得的可靠指标为 $\beta_\alpha = 2.954298$ 。然后分别采用传统方法(式(1)~式(6))和本文所提方法(式(13))计算失效概率对随机变量的灵敏度因子, 不同方法计算结果均列于表 1。

表 1 基于不同方法的灵敏度因子计算结果比较

Table 1 Comparison of calculated results for the sensitivity based on different methods

	式(1)	式(2)	式(3)	式(4)	式(5)	式(6)	式(13)
s_1	-1.93067	-0.00358	-0.02917	0.007492	0.060915	0.458549	0.249731
s_2	1.852949	0.003444	0.014781	0.006901	0.029618	0.425721	0.230021
s_3	0.213985	0.000397	0.007954	0.000092	0.001840	0.022533	0.003067
s_4	0.359810	0.000668	0.013375	0.000260	0.005204	0.039610	0.008673
s_5	0.251962	0.000468	0.006690	0.000127	0.001823	0.026792	0.004253
s_6	0.251962	0.000468	0.006690	0.000127	0.001823	0.026792	0.004253

表 1 中的计算结果表明了随机变量变异性对系统失效概率的影响程度。从各变量影响程度次序看, 基于各种方法得到结论是一致的, 均为 $S_1 > S_2 > S_4 > S_5 = S_6 > S_3$ 。但各方法得到的灵敏度因子数值大小却完全不同, 其中基于式(1)和式(2)计算结果相差 2 个数量级。虽然式(1)~式(6)能正确描述各变量对系统失效的影响程度, 但因子数值大小并没有明确意义。基于式(13)计算的因子值则具有特定含义, 下面分别进行说明和数值验证。

1) 对结论“1)”的验证说明。灵敏度因子值 S_i 近似等于可靠指标相对误差值 $|\beta_{1,i} - \beta_a|/\beta_a$ 。其中 $\beta_{1,i}$ 代表将第 i 个变量视为常数时得到的可靠指标, β_a 代表考虑全部随机变量得到的可靠指标。记 $err\beta_{1,i} = (\beta_{1,i} - \beta_a)/\beta_a$, 则有 $S_i \approx err\beta_{1,i}$ 成立。通过数值分析知, 该结论在灵敏度因子满足 $S_i \leq 0.05$ 条件时成立。

以随机变量 x_3 进行数值验证。将 x_3 视为确定性变量, 利用一次二阶矩法求得可靠指标为 $\beta_{1,3} = 2.963431$, 与考虑全部随机变量时的可靠指标之间的相对误差为 $err\beta_3 = (\beta_{1,3} - \beta_a)/\beta_a = 0.003091$ 。从表 1 中的计算结果可知, 变量 x_3 的灵敏度因子 S_3 为 0.003067, 计算 S_3 和 $err\beta_3$ 之间的相对误差 $errS_3 = (|err\beta_3 - S_3|)/err\beta_3 = 0.007613$ 。这说明 S_3 与 $err\beta_3$ 相差很小, 即可以用灵敏度因子 S_3 值近似表征该变量作为确定性变量时引起的可靠指标误差 $err\beta_3$ 。

为测试上述结论成立的条件, 现对包含上述算例在内的 8 个具有不同非线性程度的极限状态函数, 共 34 个随机变量进行灵敏度分析, 并分别计算每个随机变量的 $err\beta_i$ 和 $errS_i$ 。截取其中灵敏度因子值在 0~0.07 间的结果数据, 如图 1 和图 2 所示。

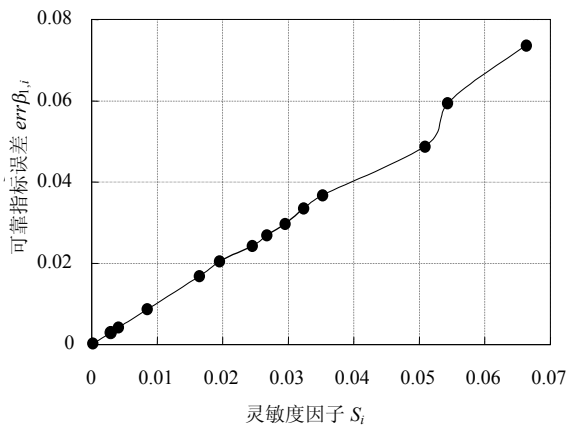


图 1 各变量灵敏度因子与可靠指标误差的关系

Fig.1 Relations of the sensitivity of each random variable and reliability error

从图 1 可以得出, 因子值 S_i 取 0~0.05 区间时, $err\beta_i$ 与 S_i 的关系是线性变化的, 斜率近似为 1, 二者的误差值见图 2, 最大误差值为 0.0477。因此, 若取 $err\beta_i$ 可接受误差为 5%, 那么只要因子值 $S_i < 0.05$, 就可以用 S_i 近似代表将该变量视为确定性变量时所产生的可靠指标误差。

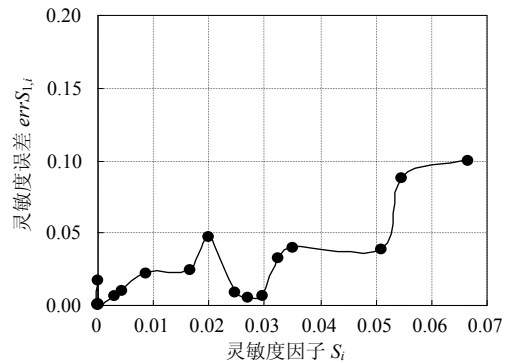


图 2 各变量灵敏度因子与灵敏度误差之间的关系

Fig.2 Relations of the sensitivity of each random variable and sensitivity error

2) 对结论“2)”的验证说明。灵敏度因子值 S_i 可以做为判定随机变量能否视为确定性变量的依据。根据试算, 因子小于 0.05 的随机变量都可以视为确定性变量。

首先分别计算可靠指标 $\beta_{1,i}$ 、可靠指标的相对误差 $err\beta_i$ 、失效概率对各随机变量 x_i 的灵敏度因子 S_i 、以及灵敏度的相对误差 $errS_i$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。计算结果列于表 2。

表 2 可靠指标、灵敏度及相对误差

Table 2 Reliabilities and sensitivities and relative errors

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\beta_{1,i}$	4.111475	4.050717	2.963431	2.98051	2.967003	2.967003
$err\beta_{1,i}$	0.391692	0.371126	0.003091	0.008872	0.004300	0.004300
S_i	0.249731	0.230021	0.003067	0.008673	0.004253	0.004253
$errS_i$	0.362430	0.380209	0.007613	0.022385	0.010930	0.010931

表 2 中 $\beta_{1,i}$ 表示将随机变量 x_i 视为确定性变量时, 利用一次二阶矩法得到的可靠指标。 $err\beta_{1,i}$ 表示可靠指标的相对误差, 利用 $err\beta_i = \sum_{i=3}^6 (\beta_{1,i} - \beta_a)/\beta_a$ 计算。 S_i 参见表 1 中的数据。 $errS_i$ 表示灵敏度 S_i 与 $err\beta_{1,i}$ 之间的相对误差, 利用 $errS_i = (err\beta_{1,i} - S_i)/err\beta_{1,i}$ 计算。

$err\beta_{1,i}$ 的计算结果表明, 分别将随机变量 x_3 、 x_4 、 x_5 和 x_6 视为确定性变量时引起的可靠性指标误差均较小, 最大为 0.86%, 说明在对该结构进行可靠度分析时, 可以将随机变量 x_3 、 x_4 、 x_5 和 x_6 作为确定性变量处理。但将 x_1 和 x_2 视为确定性变量时引起的可靠性指标的误差则较大, 分别为 39.16%和 37.11%, 说明在对该结构进行可靠度分析时, 应充分考虑 x_1 和 x_2 的不确定性, 不能将其作为确定性变量处理。进一步综合灵敏度误差 $errS_i$ 和结论“1)”可以得出结论, 对于灵敏度因子值小于 0.05 的随机

变量, 可以根据因子值直接判断该变量是否可视为确定性。

3) 对结论“3)”的验证说明。 k 个随机变量同时视为确定性变量时的可靠指标相对误差 $err\beta_{k,I}$

可用 k 个相应单变量的灵敏度因子之和 $\sum_{i=1}^k S_i$ 近似。

记 $err\beta_{k,I} = \sum_{j=1}^m (\beta_{k,j} - \beta_a) / \beta_a$, $S_a = \sum_{i=1}^k S_i$, 则有

$err\beta_{k,I} \approx S_a$ 成立。

将结论“2)”推广到同时将多个变量视为确定性变量的情况。从表1中选择满足灵敏度因子小于0.05的随机变量 x_3 、 x_4 、 x_5 和 x_6 , 任意选择3组2个随机变量视为确定性变量、2组3个随机变量视为确定性变量和1组4个随机变量视为确定性变量共6组情况, 分别命名为组1(x_3, x_4)、组2(x_3, x_5)、组3(x_4, x_5)、组4(x_3, x_4, x_5)、组5(x_4, x_5, x_6)和组6(x_3, x_4, x_5, x_6)。然后分别计算每组对应的可靠指标及相对误差, 计算结果列于表3。

表3 可靠指标、灵敏度因子及相对误差

Table 3 Reliabilities and sensitivities and relative errors

	组1	组2	组3	组4	组5	组6
β_j	2.99006	2.97634	2.99329	3.00306	3.00636	3.01635
$err\beta_{k,I}$	0.01210	0.00746	0.01320	0.01650	0.01762	0.02100
$\sum S_i$	0.01174	0.00732	0.01292	0.01599	0.01718	0.02024
$errS_i$	0.03025	0.01870	0.02071	0.03104	0.02518	0.03606

表3中 β_j 表示分别将各组随机变量视为确定性变量时, 利用一次二阶矩法得到的可靠指标。

表4 功能函数分布参数及可靠指标

Table 4 Statistic distributions of performance functions and reliability indices

功能函数	随机变量分布		可靠指标
	均值	标准差	
$g_1(x) = x_1x_2 - x_3$	{40, 50, 1000}	{5, 2.5, 200}	2.814911
$g_2(x) = 3.1415 / 4x_1x_2^2 - x_3$	{29, 3, 100}	{2.5, 0.3, 6.0}	3.049073
$g_3(x) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 20$	{1, 1.2, 1}	{1.0, 1.0, 1.0, 1.0}	2.921186
$g_4(x) = x_1x_2^4 / (8x_3x_4) - 4$	{10, 5000, 73000, 1.067e9}	{3, 2, 1000, 100000}	2.003656
$g_5(x) = x_2 - 8100(x_1 + x_4) / x_3^2$	{60, 2000, 24,50}	{6.0, 74.0, 1.2, 10.0}	1.729758
$g_6(x) = x_1 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$	{6, 1, 1, 1, 1}	{0.2, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15}	2.890129
$g_7(x) = (1 - x_5x_4x_3 / (x_6x_2x_7))x_2x_3x_4 - x_1$	{0.01, 0.3, 360, 226e-6, 0.5, 0.12, 40}	{0.003, 0.015, 36, 11.3e-6, 0.05, 0.06, 6.0}	3.413109

表5 功能函数 g_1 灵敏度分析结果

Table 5 Sensitivity results of performance function of g_1

	x_1	x_2	x_3
$\beta_{1,i}$	2.953607	5.627615	2.873305
$err\beta_{1,i}$	0.049271	0.999215	0.020744
S_i	0.051210	0.429035	0.019753
$errS_i$	0.039354	0.570627	0.047748

表6 功能函数 g_2 灵敏度分析结果

Table 6 Sensitivity results of performance function of g_2

	x_1	x_2	x_3
$\beta_{1,i}$	4.472135	3.123475	3.915786
$err\beta_{1,i}$	0.466719	0.024401	0.284254
S_i	0.282017	0.024626	0.193355
$errS_i$	0.395744	0.009234	0.319781

$err\beta_{k,I}$ 表示可靠指标的相对误差, 利用 $err\beta_{k,J} =$

$\sum_{j=1}^6 (\beta_{k,j} - \beta_a) / \beta_a$ 计算。 $\sum S_i$ 为各组中所有随机变

量灵敏度因子之和, 其中 S_i 结果见表1。 $errS_i$ 表示

灵敏度误差, 利用 $errS_i = (err\beta_{k,J} - \sum S_i) / err\beta_{k,J}$

计算。从灵敏度误差 $errS_i$ 的结果可知, 最大误差值为

0.03602, 在可接受误差范围5%以内, 这说明:

将多个变量同时考虑为确定性变量时所产生的可靠

性指标的相对误差 $err\beta_{k,I}$, 可以用相应的单个变

量的灵敏度因子之和 $\sum_{i=1}^k S_i$ 来近似, 即有

$err\beta_{k,I} \approx \sum_{i=1}^k S_i$ 成立。

据此结论, 本文方法只需要最初对全部随机变

量进行一次灵敏度分析, 根据灵敏度因子就可以一

次判断出所有可以视为确定性变量的随机变量, 与

重复试算来识别设计变量的方法相比, 可以大大

提高计算效率。

针对上述3条结论, 本文对另外7个不同随机

变量个数和不同非线性程度的极限状态函数进行

了同样的灵敏度分析, 得到了与第一个算例一致

的结论, 这里不再赘述, 仅列出将单个随机变量

视为定值时的可靠指标 β_j , 灵敏度值 S_i , 可靠指标

误差 $err\beta_{1,i}$ 和灵敏度误差 $errS_i$ 结果。各功能函数、

随机变量参数统计分布以及可靠指标列于表4, 各

功能函数的可靠度及灵敏度相对误差计算结果分

别列于表5~表11。

表 7 功能函数 g_3 灵敏度分析结果Table 7 Sensitivity results of performance function of g_3

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\beta_{1,i}$	1.972787	2.971125	3.137858	4.276179
$err\beta_{1,i}$	0.324662	0.017095	0.074172	0.463850
S_i	0.150000	0.016666	0.066666	0.266666
$errS_i$	0.537981	0.025070	0.101191	0.425101

表 8 功能函数 g_4 灵敏度分析结果Table 8 Sensitivity results of performance function of g_4

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\beta_{1,i}$	1.057×10^{-2}	2.003661	2.003989	2.003656
$err\beta_{1,i}$	0.517×10^2	2.26×10^{-6}	1.658×10^{-4}	7.766×10^{-9}
S_i	0.499831	2.26×10^{-6}	1.657×10^{-4}	7.766×10^{-9}
$errS_i$	0.990345	0.462×10^{-5}	0.25×10^{-3}	0.508×10^{-6}

表 9 功能函数 g_5 灵敏度分析结果Table 9 Sensitivity results of performance function of g_5

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\beta_{1,i}$	1.833500	1.787864	2.518506	2.083041
$err\beta_{1,i}$	0.059974	0.033592	0.455987	0.204238
S_i	0.054641	0.032467	0.261109	0.151781
$errS_i$	0.088929	0.033474	0.427374	0.256843

表 10 功能函数 g_6 灵敏度分析结果Table 10 Sensitivity results of performance function of g_6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\beta_{1,i}$	2.996598	3.217543	3.217543	3.217543	3.217543
$err\beta_{1,i}$	0.036838	0.113287	0.113287	0.113287	0.113287
S_i	0.035324	0.116168	0.116168	0.116168	0.116168
$errS_i$	0.041100	0.025436	0.025436	0.025436	0.025436

表 11 功能函数 g_7 灵敏度分析结果Table 11 Sensitivity results of performance function of g_7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\beta_{1,i}$	5.561424	3.514967	4.020264	3.505209	3.413309	3.413159	3.413564
$err\beta_{1,i}$	0.629430	0.029843	0.177889	0.026984	5.882×10^{-4}	1.481×10^{-5}	1.333×10^{-4}
S_i	0.293618	0.029646	0.149694	0.026831	5.883×10^{-4}	1.484×10^{-5}	1.356×10^{-4}
$errS_i$	0.533516	0.006611	0.158495	0.005671	1.855×10^{-4}	0.001955	0.017470

4 结论

本文通过对传统可靠性灵敏度因子的理解和推导,提出了一种适用于独立正态分布的随机变量的新灵敏度因子。与传统灵敏度因子相比,本文方法得到的灵敏度计算结果不仅能反映各因素对结构失效概率影响的重要程度,其数值大小还表征了将该单个变量或多个变量同时作为确定性变量处理时,所能引起的可靠指标的误差。在采用本文方法进行设计变量的不确定性程度识别过程中,只需进行一次灵敏度分析,故与传统重复试算方法相比,具有较高的计算效率,特别是当不确定性因素较多时优势更加明显。

参考文献:

- [1] 刘宁, 吕泰仁. 三维结构可靠度对随机变量的敏感性研究[J]. 工程力学, 1995, 12(2): 119—128.
Liu Ning, Lu Tairen. Sensitivity analysis of 3-D structural reliability to random variables [J]. Engineering Mechanics, 1995, 12(2): 119—128. (in Chinese)
- [2] 谭晓慧, 王建国, 刘新荣. 边坡稳定的有限元可靠度计算及敏感性分析[J]. 岩土力学与工程学报, 2007, 26(1): 115—122.
Tan Xiaohui, Wang Jianguo, Liu Xinrong. Finite element reliability computation and sensitivity analysis of slope stability [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(1): 115—122. (in Chinese)
- [3] 王新刚, 张义民, 王宝艳. 机械零部件的动态可靠性灵敏度分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(10): 188—193.
Wang Xingang, Zhang Yimin, Wang Baoyan. Dynamic reliability sensitivity analysis of mechanical components [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(10): 188—193. (in Chinese)
- [4] 张峰, 吕震宙. 串联结构模糊可靠性灵敏度分析的自适应重要抽样法[J]. 西北工业大学学报, 2009, 27(2): 162—167.
Zhang Feng, Lu Zhenzhou. A better adaptive importance sampling algorithm for estimating fuzzy reliability sensitivity of structures with multiple fuzzy failure modes in series [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2009, 27(2): 162—167. (in Chinese)
- [5] 赵维涛, 张旭. 基于 Monte-Carlo 方法的结构系统可靠度计算及敏度分析[J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 200—204.
Zhao Weitao, Zhang Xu. Reliability calculation and reliability sensitivity analysis of structural system based on Monte-Carlo method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(2): 200—204. (in Chinese)
- [6] 乔红威, 吕震宙. 随机激励下随机结构动力可靠性灵敏度分析[J]. 振动工程学报, 2008, 21(4): 404—408.
Qiao Hongwei, Lu Zhenzhou. Dynamic reliability sensitivity analysis for stochastic structures under random excitations [J]. Journal of Vibration Engineering, 2008, 21(4): 404—408. (in Chinese)
- [7] Sues R H, Cesare M A. System reliability and sensitivity factors via the MPPSS method [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(2): 148—157.
- [8] Lee L, Choi K K, Noh Y, et al. Sampling-based stochastic sensitivity analysis using score functions for RBDO problems with correlated random variables [J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(1): 1055—1064.

(参考文献[9]—[13]转第 29 页)

- exhibiting different tensile and compressive properties [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2008, 40(5): 646—653. (in Chinese)
- [13] Querin O M, Victoria M, Martí P. Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 42(1): 25—32.
- [14] 罗阳军. 基于 D-P 准则的压力相关材料结构拓扑优化 [J]. 力学学报, 2011, 43(5): 878—885.
Luo Yangjun. Topology optimization of pressure-dependent material structures based on D-P criterion [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(5): 878—885. (in Chinese)
- [15] Victoria M, Querin O M, Martí P. Generation of strut-and-tie models by topology design using different material properties in tension and compression [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44(2): 247—258.
- [16] Bendsøe M P, Sigmund O. Topology optimization: Theory, methods, and applications [M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2003: 79—81.
- [17] Svanberg K. The method of moving asymptotes: A new method for structural optimization [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 359—373.
- [18] Carreira D J, Chu K H. Stress-strain relationship for plain concrete in compression [J]. ACI Journal Proceedings, 1985, 82(6): 797—804.
- [19] Chen W F, Han D J. Plasticity for structural engineers [M]. New York: J Ross Publishing, 2007: 354—367.
- [20] Duysinx P, Bendsøe M P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43(8): 1453—1478.
- [21] Sved G, Ginos Z. Structural optimization under multiple loading [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1968, 10(10): 803—805.
- [22] Cheng G D, Guo X. ϵ -relaxed approach in structural topology optimization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1997, 13(4): 258—266.
- [23] Bruggi M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008, 36(2): 125—141.
- [24] Andreassen E, Clausen A, Schevenels M, Lazarov B S, Sigmund O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(1): 1—16.

(上接第 21 页)

- [9] Huang B, Du X. Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order Saddlepoint Approximation [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(2): 325—336.
- [10] 戴鸿哲, 王伟. 结构可靠性灵敏度分析的低偏差抽样方法 [J]. 工程力学, 2010, 27(1): 104—108.
Dai Hongzhe, Wang Wei. Low-discrepancy sampling method for structural reliability sensitivity analysis [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(1): 104—108. (in Chinese)
- [11] 朱丽莎, 张义民, 唐乐. 基于随机摄动法的可靠性灵敏度计算的修正公式 [J]. 东北大学学报, 2010, 31(11): 1603—1606.
Zhu Lisha, Zhang Yimin, Tang Le. A modified formula of reliability-based sensitivity calculation on the basis of stochastic perturbation theory [J]. Journal of Northeastern University, 2010, 31(11): 1603—1606. (in Chinese)
- [12] Mansour A E, Wirsching P H. Sensitivity factors and their application to marine structures [J]. Marine Structure, 1995, 8(1): 229—255.
- [13] 张伟, 崔维成, 徐秉汉, 张圣坤. 结构可靠性分析中灵敏度因子研究的新方法 [J]. 上海交通大学学报, 1998, 32(11): 26—29.
Zhang Wei, Cui Weicheng, Xu Bingham, Zhang Shengkun. New method on calculating sensitivity factors [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1998, 32(11): 26—29. (in Chinese)