

文章编号: 1000-4750(2013)06-0054-06

# 微平面模型取向与权重的改进计算方法

贾明晓<sup>1</sup>, 王君杰<sup>2</sup>

(1. 华北水利水电学院土木与交通学院, 郑州 450011; 2. 同济大学桥梁工程系, 上海 200092)

**摘 要:** 在介绍微平面模型中数值离散算法的基础上, 指出了现有文献中对微平面取向及权重的确定方法的特点和不足。针对微平面取向不够均匀以及微平面形状和物理意义不明确的问题, 提出了一种基于正多面体表面网格划分后向球面进行投影的方法计算微平面取向, 再利用球面几何的知识计算微平面权重的方法。在比选基于不同微平面划分方案时, 提出了拟合宏观弹性刚度矩阵的优化目标。计算结果表明, 该文所提方法可以得到微平面形状、大小完全均匀的划分方案, 计算精度比文献中的最优方案更精确。

**关键词:** 微平面本构模型; 取向; 权重; 数值离散; 球面几何

**中图分类号:** TU318 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.03.0173

## AN IMPROVED METHOD TO CALCULATE ORIENTATION AND WEIGHT IN A MICROPLANE CONSTITUTIVE MODEL

JIA Ming-xiao<sup>1</sup>, WANG Jun-jie<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Communication, North China University of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou 450011, China;

2. Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The deficiency of orientation and weight calculation methods for a microplane model is pointed out after its discretization algorithm analysis. A new microplane grid division method is proposed to solve the problem of non-uniform orientations and the vague microplane physical concept in an original method. Firstly, the unit regular polyhedron surface is divided into regular grids, and then mapping them to the unit sphere surface to generate a series of spherical triangles, of which each one represents a microplane. The method of calculating microplane weights is derived from spherical geometry theory. The optimization goal of fitting macro elastic stiffness matrix is proposed in the program evaluation. Calculation results shows that the method proposed can accurately obtain programs of uniform microplane shape and size.

**Key words:** microplane constitutive model; orientation; weight; numerical method; spherical geometry

微平面模型是一种跨尺度的本构模型, 它通过在微平面上建立本构关系来描述材料宏观的力学性质。微平面模型的基本思想可以追溯到 1938 年 Taylor 在研究金属材料塑性性质时提出的金属滑移理论。Bažant Z P 等学者将塑性滑移理论进行了改进和推广, 于 1983 年首次提出了适用于混凝土的微平面模型<sup>[1]</sup>, 之后经过不断的改进和发展先后历经了 5 代微平面模型(简称 M1~M5)<sup>[2-9]</sup>。该模型直接

在微平面上建立混凝土的各种复杂受力行为, 相对于张量形式的本构模型具有很大的优势。

从 M1 到 M5 历代微平面模型的改进主要体现在对微平面上应变分量的选取和应力-应变关系的确定上, 而对微平面模型取向与权重计算方法的研究较少。但微平面取向与权重的确定方法是影响模型计算精度的主要因素。因此, 下文在分析现有文献所采用方法的基础上, 提出了一种新的微平面取

收稿日期: 2012-03-15; 修改日期: 2013-01-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(90715022); 华北水利水电学院高层次人才引进项目

通讯作者: 贾明晓(1981-), 女, 河南三门峡人, 讲师, 博士, 从事桥梁抗震研究(E-mail: jmx@ncwu.edu.cn).

作者简介: 王君杰(1962-), 男, 辽宁本溪人, 教授, 博士, 主要从事桥梁结构理论研究(E-mail: jjqxu@tongji.edu.cn).

向与权重计算方法。

### 1 微平面模型与积分离散方法简介

与宏观张量形式的本构模型不同，微平面模型的基本思想是用各个微平面上简单的向量形式的应力-应变关系来描述混凝土复杂的力学特征，其计算流程如图 1 所示。

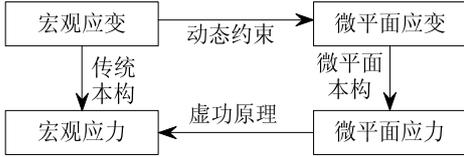


图 1 微平面模型与传统模型计算流程图

Fig.1 Calculation flow chart of microplane model and traditional model

首先，将宏观应变通过动态约束投影到微平面上，得到某个取向上的微平面应变分量；如图 2 所示微平面包含 1 个法向分量  $N$  和 2 个剪切分量  $L$  和  $M$ ，法向微应变  $\varepsilon_N$  和切向微应变  $\varepsilon_L$  和  $\varepsilon_M$  分别为：

$$\varepsilon_N = N_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_L = L_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_M = M_{ij}\varepsilon_{ij}$$

其中： $N_{ij} = n_i n_j$ ， $L_{ij} = (l_i n_j + l_j n_i) / 2$ ， $M_{ij} = (m_i n_j + m_j n_i) / 2$ ， $n_i$ 、 $l_i$  和  $m_i$  分别表示法向分量  $N$  和 2 个剪切分量  $L$ 、 $M$  与整体坐标轴  $x_i$  的夹角余弦； $\varepsilon_{ij}$  表示宏观应变张量。

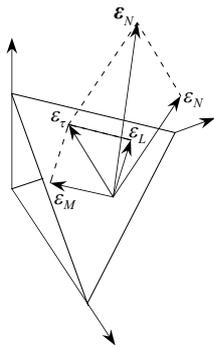


图 2 单个微平面上的应变分量

Fig.2 The strain components on single microplane

然后，定义微平面上的应力-应变关系，并基于虚功原理将微平面应力合成为宏观应力：

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} (\sigma_N N_{ij} + \sigma_L L_{ij} + \sigma_M M_{ij}) d\Omega = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} S_{ij} d\Omega \quad (1)$$

其中， $S_{ij} = \sigma_N N_{ij} + \sigma_L L_{ij} + \sigma_M M_{ij}$ 。将式(1)进一步在半球面上进行离散，得到上述积分式在半球面上的近似数值计算公式：

$$\sigma_{ij} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} S_{ij} d\Omega \approx 6 \sum_{\mu=1}^{N_m} w_{\mu} S_{ij}^{\mu} \quad (2)$$

其中： $w_{\mu}$  表示与积分点相关的权重； $\mu$  表示由单位向量  $n_i^{\mu}$  定义的方向所表示的一系列积分点；每半球面有  $\sum_{\mu} w_{\mu} = 0.5$ 。在半球面  $\Omega$  上无穷多个方向的积分近似表示为在有限个方向的微平面上求和。

M1 模型中选取微平面取向的方法是在规则多面体上选取一些特定的点来代表微平面的方向。以图 3 所示的二十面体为例，选取各条边的顶点和中点，从二十面体的形心到这些特定点的向量就表示一个微平面的法向量，共有 21 个微平面。然后通过优化逼近的方法得到微平面的权重，优化的目标是在总体坐标轴和宏观单轴加载方向不变的情况下，使各个微平面作刚性转动，得到不同转动位置下的宏观单轴应力应变曲线的偏差最小。

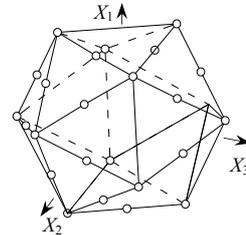


图 3 21 个微平面

Fig.3 21 microplanes

上述确定微平面取向的方法概念简单明确，通过优化计算得到的权重分布能够满足工程应用所需要的计算精度。但是，通过分析上述计算过程发现，M1 中的方法还存在一些不足，主要有以下几点：

1) 取向的选取方法使得微平面在空间上的分布不够均匀，积分离散后应尽可能全面均等地捕捉不同取向上的变形过程。

2) 权重的计算过程需要通过优化算法得到，计算过程较为复杂，并且微平面的具体形状不明确，因此权重大小代表的物理意义在几何上不直观。

3) 以单轴应力-应变曲线作为微平面取向及权重的优化目标比较单一。微平面模型作为一个混凝土三轴本构模型，优化目标应能全面反映三轴的应力-应变特征。

### 2 改进思路

针对上述 M1 方法的不足，通过在取向选定方法、权重计算方法、取向与权重计算的优化目标 3 个方面改进微平面积分离散方法，具体方法如下：

1) 将正多面体的每个面进行均匀划分, 用从正多面体形心到每个划分网格形心的向量表示一个微平面的取向。这种处理方法的优点在于通过均匀划分网格使得微平面的取向分布尽可能地均匀, 并且便于进一步细化网格, 提高积分离散方式的精度。

2) 将多面体网格投影到外接球面上, 得到对球面连续划分的球面网格, 每一个球面多变形的面积

占球面面积的比值就是所在微平面的权重。这种权重计算方法简单直接, 微平面的几何形状直观物理意义明确。

3) 提出将弹性刚度矩阵作为取向及权重的优化目标, 比单轴应力-应变曲线更能全面评价各种离散方式的精度。

图 4 是两种方法计算流程及特点比较的总体框架。

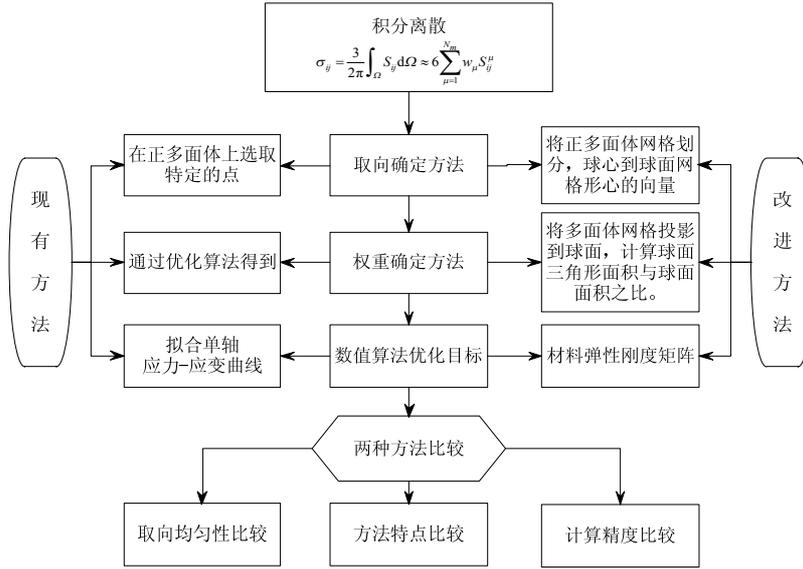


图 4 两种算法框架与比较

Fig.4 Framework and comparison of two calculation methods

### 3 改进取向与权重计算方法

将正多面各个面进行均匀网格划分后, 已知其中一个网格的形心坐标为:

$$r_i = (x_i, y_i, z_i) \tag{3}$$

则根据几何知识可知, 将形心表示的点投影到单位球面上, 得到相应微平面的单位法向向量为:

$$\bar{r}_i = (x_i, y_i, z_i) = \frac{r_i}{|r_i|} \tag{4}$$

设微平面所对应的单位球面上的一个球面三角形为  $\triangle ABC$ , 记  $\triangle ABC$  的面积为  $S_{ABC}$ , 则该微平面的权重就是:

$$w_i = \frac{S_{ABC}}{2\pi} \tag{5}$$

根据球面几何知识可知,  $\triangle ABC$  的面积为:

$$S_{ABC} = A + B + C - \pi \tag{6}$$

这里  $A$ 、 $B$  和  $C$  分别表示  $\triangle ABC$  在 3 个顶点的内角, 下面介绍其计算方法。

设  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  分别表示单位球面三角形 3 个顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  上的位置向量, 即:

$$\mathbf{a} = \overline{OA}, \mathbf{b} = \overline{OB}, \mathbf{c} = \overline{OC}, \mathbf{d} = \overline{OD}$$

它们都是单位向量。由球面三角学知识<sup>[10]</sup>可知:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \cos l_{BC}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \cos l_{CA}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos l_{AB} \tag{7}$$

这里  $l$  表示球面三角形的边长, 并且:

$$\sin l_{BC} = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|, \sin l_{CA} = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|, \sin l_{AB} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \tag{8}$$

由球面三角形的余弦定律可知:

$$\begin{aligned} \sin l_{CA} \sin l_{AB} \cos A &= \cos l_{BC} - \cos l_{CA} \cos l_{AB}, \\ \sin l_{AB} \sin l_{BC} \cos B &= \cos l_{CA} - \cos l_{AB} \cos l_{BC}, \\ \sin l_{BC} \sin l_{CA} \cos C &= \cos l_{AB} - \cos l_{BC} \cos l_{CA}. \end{aligned} \tag{9}$$

至此可以得出  $A$ 、 $B$  和  $C$  可分别表示为:

$$\begin{aligned} A &= \arccos \frac{\cos l_{BC} - \cos l_{CA} \cos l_{AB}}{\sin l_{CA} \sin l_{AB}}, \\ B &= \arccos \frac{\cos l_{CA} - \cos l_{AB} \cos l_{BC}}{\sin l_{AB} \sin l_{BC}}, \\ C &= \arccos \frac{\cos l_{AB} - \cos l_{BC} \cos l_{CA}}{\sin l_{BC} \sin l_{CA}}. \end{aligned} \tag{10}$$

联立式(5)、式(7)、式(8)和式(10)即可求得各个微平面的权重。

## 4 微平面划分方案

划分微平面的方式采用基于正多面体划分网格的方法。图 5 分别是正八面体、正十二面体和正二十面体；图 6 是多面体每个面上的网格划分方式，进一步可以将多面体中每一个面划分成粗细程度不同的网格。

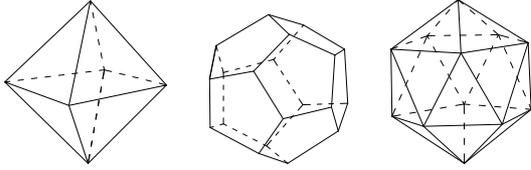


图 5 正多面体

Fig.5 Regular polyhedron

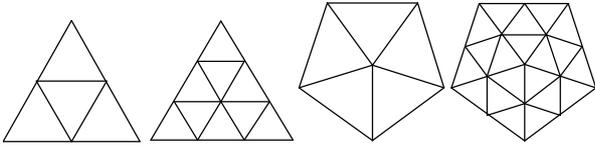


图 6 网格划分方法

Fig.6 Grid dividing method

如图 6 所示，对于八面体可以分别得到 16 个和 36 个微平面；对于二十面体可以分别得到 40 个和 90 个微平面；对于十二面体可以分别划分为 30 个和 120 个微平面。根据文中提出的计算方法，需首先确定多面体顶点坐标，已知顶点坐标后即可确定微平面法向量，计算微平面的权重了。

## 5 计算结果分析

### 5.1 权重与取向均匀性

微平面分布应尽可能均匀地划分球面，使得积分离散后能够全面均等地捕捉不同取向上的受力过程，因此有必要对微平面的取向均匀性进行评价，比较各种微平面划分方案的均匀性。如果各个微平面的形状相同，且权重都相等，说明微平面均匀划分了球面，这种划分方案的取向均匀性最优。

对于其它微平面形状和权重不相等的情况，根据数理统计的知识可知，可以用方差的概念描述一组数

$$D = D_V + D_D + D_T =$$

$$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 10E_V + 8E_D + 12E_T & 10E_V - 4E_D - 6E_T & 10E_V - 4E_D - 6E_T & 0 & 0 & 0 \\ 10E_V - 4E_D - 6E_T & 10E_V + 8E_D + 12E_T & 10E_V - 4E_D - 6E_T & 0 & 0 & 0 \\ 10E_V - 4E_D - 6E_T & 10E_V - 4E_D - 6E_T & 10E_V + 8E_D + 12E_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6E_D + 9E_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6E_D + 9E_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6E_D + 9E_T \end{bmatrix}$$

据的取值在均值周围变化的情况，方差越大说明均匀性越差，反之则均匀性越好。因此，采用微平面权重的方差作为评价取向均匀性的指标，定义如下式所示：

$$D(\omega_i) = E(\omega_i^2) - [E(\omega_i)]^2 \quad (11)$$

$$\text{其中, } E(\omega_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i, \quad E(\omega_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i^2。$$

各种微平面划分方法取向均匀性评价指标值如表 1 所示。从表 1 数据可以看出，从微平面取向均匀性方面来看，基于十二面体将半球面划分为 30 个微平面最为均匀，权重方差值为零，每个微平面在球面上形成的球面三角形形状大小均相同；采用二十面体划分微平面得到的权重方差与 M1 模型中 21 个微平面的相差不大；采用八面体投影到球面来划分微平面其权重离散性大，均匀性则较差。

表 1 微平面取向均匀性评价指标比较

Table 1 Evaluation indicator comparison on the microplane orientation uniformity

正多面体	微平面个数	权重方差
八面体	16	0.20
	36	0.37
十二面体	30	0.00
	120	0.29
二十面体	40	0.07
	90	0.12
M1 模型	21	0.10

### 5.2 拟合弹性刚度矩阵

与 M1 模型中评价积分离散后数值计算精度的方法不同，提出了以弹性刚度矩阵为目标的优选方法，主要考虑了以下两点：一是微平面模型是三维混凝土本构关系，评价积分离散方式优劣的指标应能反映多轴性质；二是以单轴加载情况为例，线弹性阶段和软化段早期在实际工程应用中起主要控制作用，因此选用弹性刚度矩阵作为优化目标具有实际意义。

宏观弹性刚度矩阵用微平面模型中体、偏、剪 3 个分量弹性模量表示为：

其中:

$$D_V = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 10E_V & 10E_V & 10E_V & 0 & 0 & 0 \\ 10E_V & 10E_V & 10E_V & 0 & 0 & 0 \\ 10E_V & 10E_V & 10E_V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_D = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 8E_D & -4E_D & -4E_D & 0 & 0 & 0 \\ -4E_D & 8E_D & -4E_D & 0 & 0 & 0 \\ -4E_D & -4E_D & 8E_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6E_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6E_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6E_D \end{bmatrix},$$

$$D_T = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 12E_T & -6E_T & -6E_T & 0 & 0 & 0 \\ -6E_T & 12E_T & -6E_T & 0 & 0 & 0 \\ -6E_T & -6E_T & 12E_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9E_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9E_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9E_T \end{bmatrix}.$$

积分离散后的数值计算结果应尽可能精确地表示上述弹性刚度矩阵的形式, 从前面的数据结果来看, 基于十二面体, 将五边形划分为 5 个三角形后投影到球面上, 这种方案可以将球面均匀划分为 30 个微平面, 微平面权重相等, 取向最均匀。因此, 本节对 21 个和 30 个微平面方案数值计算得到的弹性刚度矩阵进行比较, 数值计算结果如下。

$$D_{21} = E_V \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} +$$

$$E_d \begin{bmatrix} 0.2497 & -0.1262 & -0.1234 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0028 \\ -0.1262 & 0.2469 & -0.1207 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0056 \\ -0.1234 & -0.1207 & 0.2411 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0028 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2016 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2182 & 0.0000 \\ -0.0028 & 0.0056 & -0.0028 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2099 \end{bmatrix} +$$

$$E_T \begin{bmatrix} 0.4114 & -0.2016 & -0.2099 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.2016 & 0.4198 & -0.2182 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.2099 & -0.2182 & 0.4281 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2943 & -0.0042 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0042 & 0.2859 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2901 \end{bmatrix},$$

$$D_{30} = E_V \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} +$$

$$E_d \begin{bmatrix} 0.2667 & -0.1333 & -0.1333 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.1333 & 0.2667 & -0.1333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.1333 & -0.1333 & 0.2667 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2000 & 0.0000 \\ -0.0028 & 0.0056 & -0.0028 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2000 \end{bmatrix} +$$

$$E_T \begin{bmatrix} 0.4000 & -0.2000 & -0.2000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.2000 & 0.4000 & -0.2000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.2000 & -0.2000 & 0.4000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.3000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 \end{bmatrix}。$$

为了判断用两种数值计算方案得到弹性刚度矩阵与积分运算得到的精确解的相似程度，分别用 3 个分量刚度矩阵中数值解与精确解中对应元素差的绝对值之和与对应弹性模量之比来表示，即：

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (D'_{ij} - D_{ij}) / E$$

其中： $D'_{ij}$  表示数值计算结果； $D_{ij}$  表示精确值； $i, j = 1, 2, \dots, 6$  是矩阵元素下标。表 2 列出了具体计算结果。

表 2 弹性刚度矩阵计算结果比较

Table 2 Calculation result comparison of elastic stiffness matrix

微平面划分方案	体	偏	剪
方案 1(21 个)	0.0000	0.1737	0.1568
方案 2(30 个)	0.0000	0.0000	0.0000

从表 2 数据可以看出，方案 2 所有元素差的绝对值之和为零，计算结果说明了以下两点：1) 从整体上来说，两种方案得到的弹性刚度矩阵与精确解相差不大，其中方案 2 的误差为零，说明其可以精确地模拟宏观弹性刚度矩阵，比方案 1 精确性高；2) 由于方案 2 是基于正十二面体投影到球面上得到的，这种方法将球面进行了均匀的划分，微平面的形状大小均相等，得到了均匀的取向分布，当宏观荷载方向不变，球面做刚体转动时，微平面权重保持不变，取向也基本不变，因此对宏观计算结果影响较小。

## 6 结论

总结文中提出的方法，包括改进微平面划分方式、改进取向与权重计算方法、改进微平面优选目标等，可以得出以下几点结论：

(1) 计算结果表明，采用正十二面体投影得到的 30 个微平面的方案，对弹性刚度矩阵拟合的精确性比 M1 中 21 个微平面方案精确性高，且得到了均匀分布的取向划分方案。

(2) 采用基于正多面体向球面投影的方法，微平面划分方式灵活、形式多变，并可得到任意粗细

程度的微平面。

(3) 基于球面几何知识计算微平面权重的方法简单明了，省去了现有方法通过迭代优化算法确定权重的麻烦，并且将球面进行划分得到的微平面形状非常直观。

### 参考文献：

- [1] Bažant Z P, Oh B-H. Microplane model for fracture analysis of concrete structures [C]. Colorado Springs, Colo.: U.S. Air Force Academy, 1983: 49—53.
- [2] Bažant Z P, Oh B-H. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1985, 114(4): 559—582.
- [3] Bažant Z P, Prat P C. Microplane model for brittle plastic material: I. Theory [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114: 1672—1688.
- [4] Bažant Z P, Prat P C. Microplane model for brittle plastic material: II. Verification [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114: 1689—1702.
- [5] Bažant Z P, Xiang Y, Prat P C. Microplane model for concrete. I. Stress-strain boundaries and finite strain [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1996, 122(3): 245—254.
- [6] Bažant Z P, Caner F C, Carol I, Adley M D, Akers A S. Microplane model M4 for concrete: I. Formulation with work-conjugate deviatoric stress [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(9): 944—953.
- [7] Bažant Z P, Caner F C. Microplane model M5 with kinematic and static constraints for concrete fracture and anelasticity. I: Theory [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(1): 31—40.
- [8] Bažant Z P, Caner F C. Microplane model M5 with kinematic and static constraints for concrete fracture and anelasticity. II: Computation [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(1): 41—47.
- [9] Carol I, Prat P C, Bažant Z P. New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation [J]. International Journal of Solids and Structures, 1992, 29(9): 1173—1191.
- [10] 项武义. 基础几何学[M]. 北京：人民教育出版社，2004：202.  
Xiang Wuyi. The basis of geometry [M]. Beijing: People's Education Press, 2004: 202. (in Chinese)