

文章编号: 1000-4750(2013)06-0295-06

修正的 SPH 方法模拟强制旋转动边界问题研究

董添文^{1,2}, 黄兴元¹, 江顺亮³, 柳和生²

(1. 南昌大学机电工程学院, 南昌 330031; 2. 上饶师范学院物理与电子信息学院, 江西 上饶 334001; 3. 南昌大学信息工程学院, 南昌 330031)

摘 要: 采用移动最小二乘(moving least squares, MLS)修正的光滑粒子流体动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)算法模拟了一个强制旋转动边界问题模型。提出了一种施加强制旋转粒子动边界方案。阐述了修正方法的原理并给出了具体的修正操作方法。同时, 还构建了静边界模型, 并分别使用修正的 SPH 以及商业软件 FLUENT 计算。对计算结果的分析表明: 该修正 SPH 方法, 能够消除压力振荡; 该方法及动边界处理方案可以有效计算该强制动边界问题, 为进一步计算更加复杂模型奠定了理论基础。同时, 该方法对于不同领域中的动边界问题也具有一定参考价值。

关键词: 光滑粒子流体动力学; 移动最小二乘; 不可压缩流; 动边界; 压力振荡

中图分类号: O242 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.02.0084

INVESTIGATION ON THE FORCED REVOLVING MOVING BOUNDARY PROBLEM USING CORRECTED SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS METHOD

DONG Tian-wen^{1,2}, HUANG Xing-yuan¹, JIANG Shun-liang³, LIU He-sheng²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China;

2. School of Physics and Electronic Information, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China;

3. School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

Abstract: Based on the moving least squares corrected smoothed particle hydrodynamics (SPH) method, a moving boundary problem model has been simulated. A forced revolving moving boundary particle treatment is presented. The principal of the corrected SPH and its correction-step are introduced. A fixed boundary model is also constructed and separately simulated by the corrected SPH method and the commercial software FLUENT. Comparing the results, it has been shown that the correction approach can smooth the pressure oscillation, and this forced revolving moving boundary treatment is practical and effective. The method can be employed to simulate a more complex model. It has some referential value for the research on moving boundary problems in various areas.

Key words: smoothed particle hydrodynamics (SPH); moving least squares (MLS); incompressible flow; moving boundary; pressure oscillation

强制动边界问题是边界通过外力强制施加并随时间变化的问题, 在诸如搅拌、强制输送、造浪等中经常遇到。聚合物加工领域中的螺杆(包括单螺

杆、双螺杆)挤出过程模拟属于典型强制动边界问题。当采用传统方法, 诸如有限体积法(FV)^[1]、有限元法(FEM)^[2]模拟时, 将遭遇网格扭曲造成计算

收稿日期: 2012-02-16; 修改日期: 2012-09-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(50863003)

通讯作者: 董添文(1978—), 男, 湖北人, 讲师, 博士生, 从事聚合物加工过程数值模拟研究(E-mail: tianwendong@live.cn).

作者简介: 黄兴元(1961—), 男, 江西人, 教授, 博士, 博导, 从事聚合物成型理论及设备研究(E-mail: huangxingyuan001@126.com);

江顺亮(1965—), 男, 江西人, 教授, 博士, 博导, 从事复杂加工过程数值模拟研究(E-mail: jiangshunliang@ncu.edu.cn);

柳和生(1965—), 男, 江西人, 教授, 博士, 博导, 从事聚合物成型及机电产品数字化设计及制造研究(E-mail: hslu@vip.163.com).

失败,尤其是形状复杂计算域动态变化的双螺杆挤出。

近年发展起来的无网格方法,由于不需要网格,避免了网格扭曲的影响,因此在很多应用场合较传统计算方法更有优势^[3]。光滑粒子流体动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)方法是最早的无网格方法之一,是在研究天体物理时提出来的^[4]。后来,SPH方法被引入到计算流体力学领域^[5]。因其具备良好的自适应性,SPH在计算诸如:动边界、大变形、自由表面流等问题方面具有明显优势。已经广泛应用到诸如波浪力学^[6]、流-固耦合^[7]、高速碰撞^[8]等问题。

然而,经典SPH算法存在一个缺陷^[6]:通常在边界附近或粒子分布非常不规则的局部区域,计算得到的压力场会出现大振荡,进而影响计算的稳定,甚至造成计算崩溃。根本原因是由于核函数插值不连续造成密度的波动,进而状态方程计算得到的压力发生严重振荡。有两种办法可以解决这个问题:1)采用不可压缩SPH(incompressible smoothed particle hydrodynamics, ISPH)方法,ISPH是Cummins^[9]等对经典SPH算法的改进型。董添文^[10]等利用该方法,计算了螺杆挤出中提出的旋转强制动边界问题。2)采用移动最小二乘(moving least squares, MLS)对经典SPH算法进行修正,Colagrossi等^[6]在研究溃坝流时提出了MLS修正的SPH方法,来消除压力振荡。Shobeyri与Afshar^[11]提出了一种离散最小二乘无网格法(discrete least squares meshless, DLSM),它是直接利用MLS来构造形函数的一种分数步法。该方法在自由表面流的计算中也得到了非常光滑的压力分布。

本文采用与文献[10]中相同的旋转强制动边界问题物理模型,改用MLS修正的经典SPH方法,利用FORTRAN语言编程,对该强制旋转动边界问题进行模拟。并通过与修正的SPH静边界模型,文献[10]及商业软件FLUENT的计算结果比较分析,证明该方法的有效性。为更加复杂的双螺杆挤出动边界问题研究奠定了基础。

1 控制方程和计算方法

1.1 SPH算法

控制方程为基于Lagrange形式的连续方程与动量方程:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g} \quad (2)$$

式中: ρ 为密度; \mathbf{v} 为速度矢量; t 是时间; p 为压力; $\boldsymbol{\tau}$ 是粘性剪切力张量, $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}$,其中, μ 是粘度系数, \mathbf{I} 是单位矩阵, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是剪应变速率张量, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$; \mathbf{g} 是重力加速度。

由于本文计算模型属于低雷诺数流,故不考虑紊流项。

SPH的核心思想是“核函数近似”。问题域被离散成一定数量的粒子,它们具有质量、密度、压力、速度等物理属性。场变量 f 通过支持域中的粒子核函数近似插值求和得到:

$$f(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^N W_{ij} f(\mathbf{r}_j) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3)$$

式中: $f(\mathbf{r})$ 代表空间位置 \mathbf{r} 处的场变量; m_j 与 ρ_j 分别代表粒子 j 的质量和密度; W_{ij} 为核函数; h 是核函数的光滑长度。本文采用常用的三次样条核函数,如下式:

$$W(R, h) = \alpha_d \times \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3, & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6}(2-R)^3, & 1 \leq R < 2 \\ 0, & R \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

式中, $R = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/h$,在二维问题中常数 $\alpha_d = 15/(7\pi h^2)$ 。

压力通过状态方程^[12]求得:

$$p = \rho c^2 \quad (5)$$

式中: c 是声速,将 c 设为最大粒子流速的40倍,可以限制密度波动小于1%。最后,对式(1)和式(2)左边时间导数项离散,采用蛙跳法求时间积分。

1.2 离散格式

压力梯度项与速度散度项离散格式^[12]:

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)_i = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (7)$$

式中, $\nabla_i W_{ij}$ 是 W 对 \mathbf{r}_{ij} 的导数, $\nabla_i W_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{ij}}$ 。

粘度项离散格式:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mu \nabla \right) \mathbf{v} \right\}_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j (\mu_i + \mu_j) \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{\rho_i \rho_j (|\mathbf{r}_{ij}|^2 + 0.01h^2)} \mathbf{v}_{ij} \quad (8)$$

1.3 MLS 修正 SPH 的原理

在本文计算动边界模型时，通过 MLS 修正核函数来对密度进行修正^[6]，计算公式如下：

$$\rho_i^{\text{new}} = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}^{\text{MLS}} \quad (9)$$

式中： ρ_i^{new} 是修正的粒子密度； W_{ij}^{MLS} 是修正的核函数，计算公式如下：

$$W_{ij}^{\text{MLS}} = W_j^{\text{MLS}}(\mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) W_{ij} \quad (10)$$

在 2-D 问题中有：

$$W_{ij}^{\text{MLS}} = [\beta_0(\mathbf{r}_i) + \beta_{1x}(\mathbf{r}_i)(x_i - x_j) + \beta_{1y}(\mathbf{r}_i)(y_i - y_j)] W_{ij} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}_i) = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1x} \\ \beta_{1y} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^N W_j(\mathbf{r}_i) \tilde{\mathbf{A}} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & (x_i - x_j) & (y_i - y_j) \\ (x_i - x_j) & (x_i - x_j)^2 & (y_i - y_j)(x_i - x_j) \\ (y_i - y_j) & (y_i - y_j)(x_i - x_j) & (y_i - y_j)^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中： $\boldsymbol{\beta}$ 是修正向量； \mathbf{A} 、 $\tilde{\mathbf{A}}$ 为矩阵； x_i 、 y_i 分别是粒子 i 的 x 方向、 y 方向坐标。

2 强制旋转动边界模型

图 1 为 2-D 基于单螺杆挤出提出的一个强制旋转动边界简化模型。凹形槽(螺槽横截面)在圆形机筒内沿顺时针方向匀速旋转。设圆筒中心为 Cartesian 坐标系中心。机筒(大圆)与螺槽(凹形槽)封闭的区域内充满被加工的流体。设流体为牛顿流体，为了计算的方便，做纯数字化处理：机筒内径 $R=2$ ，螺槽底到圆心距离 $r=1$ ，故螺槽深为 $R-r=1$ ，螺槽扇形角为 1rad ，保持螺槽转速 $\omega=1\text{rad/s}$ ，机筒内的液体的密度为 $\rho=1$ ，动力粘度系数设为 $\nu=1/Re$ ，雷诺数 $Re=1$ 。壁上设为无滑移边界条件，压力满足 Neumann 边界条件，即法向压力梯度 $\partial p/\partial n=0$ 。初始条件：机筒和内部液体速度为 0，全场压力为 0。槽内的虚线段“1”和圆弧线“2”将在第 4 节中用来分析流场流动规律。线段“1”设在槽的径向中轴线上，圆弧“2”的半径是 1.5。除

此之外，还进行了 SPH 静边界模型计算和商业 CFD 软件 FLUENT 模拟，FLUENT 计算具体设置方法可以参考文献[10]第 4 节。SPH 静边界模型模拟的思想：对螺槽与机筒做相对运动假设，即螺槽静止，而机筒相对螺槽反方向旋转。SPH 旋转动边界模型与静边界模型的设置方法将在下节中阐述。所选参数能保证离心力的影响是可以忽略，因此它不影响 FLUENT 计算结果与 SPH 方法计算结果的可比性。

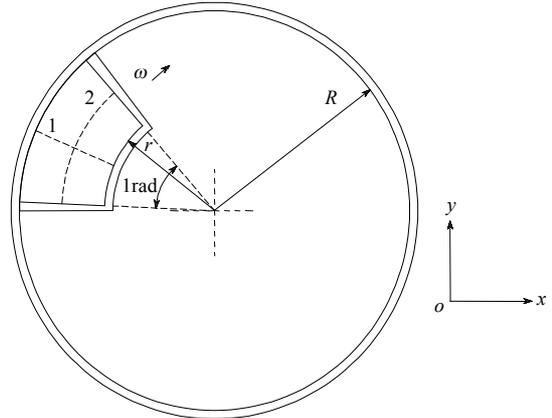


图 1 旋转动边界问题模型

Fig.1 Forced revolving moving boundary model

3 边界条件及初始粒子分布

边界的处理对于 SPH 方法至关重要。常用的有“排斥力法”、“镜像粒子法”、“静态粒子法”^[13]。本文采用静态粒子法来处理边界，关于这几种边界方法的比较，可以参考文献[13]。粒子初始分布与文献[10]相同：采取将初始粒子等距离排列在同心圆环上的分布方法。图 2 是初始粒子分布，边界通过壁粒子和静态粒子构造。图 3 对图 2 中局部区域“ A 、 B ”做放大处理：方形点代表边界粒子(包括壁粒子与静态粒子)，圆形代表内部流体粒子。边界由 1 层壁粒子与 4 层静态粒子构成。除拐点外的每 1 个壁粒子对应其外法线方向上的 4 个静态粒子，而 4 个拐点上的壁粒子分别对应 24 个静态粒子。静态粒子的层数与所选择核的函数有关，设核函数的光滑半径 $h=2\Delta r$ (Δr 为径向初始粒子间距)，设置 4 列静态边界粒子来保证靠近固壁的内部粒子的插值连续。为满足 $\partial p/\partial n=0$ ，与壁粒子对应的静态粒子应具有相同的密度值。一共使用了 4961 个粒子：包含 3626 个流体粒子与 1335 个边界粒子。动边界设置方法：边界粒子在正交坐标系中的位置与速度在每个计算时间步后根据螺槽所转到的角度重新给定；位于机筒上(即外圆)的边界粒子只更新位置，

速度恒为 0。静边界设置方法：计算中，边界粒子位置均固定，圆筒上的粒子的角速度 $\omega = -1\text{rad/s}$ ，其余粒子速度恒为 0。初始条件与动边界模型相同。因 SPH 静边界模型粒子位置始终不变，故，为了与动边界模型计算结果的比较，其初始位置必须与动边界模型所旋转到的位置相对应，使用 FLUENT 计算时也这样处理。

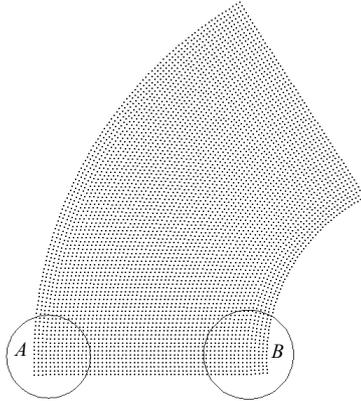


图 2 初始粒子分布

Fig.2 Particle initial configurations

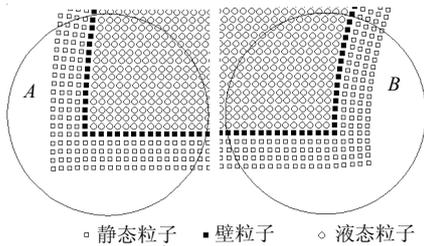


图 3 放大的“A”、“B”区粒子

Fig.3 Enlarged area A and B

4 结果与讨论

4.1 粒子位置与速度向量场

为了与 SPH 静边界模型及 FLUENT 计算结果做比较，对动边界模型计算得到的绝对速度场做相对处理，处理方法与文献[10]采用的方法相同：将流体粒子的速度减去该点所在螺槽内位置的假想刚体运动速度。本文下述动边界模型粒子速度均指该相对速度。图 4 是在 $t=0.05\text{s}$ 时，计算达到稳定状态的粒子速度矢量图(包含边界上的粒子)。计算区域绕圆心旋转了 0.05rad ，产生了旋涡。图 5 是静边界模型粒子绝对速度矢量图(包含机筒上的粒子速度)。经与文献[10]中图 7(ISPH 静边界模型计算结果)、图 8(FLUENT 计算结果)以及图 9(ISPH 动边界模型计算结果)比较发现，5 种方法的计算结果十分吻合。

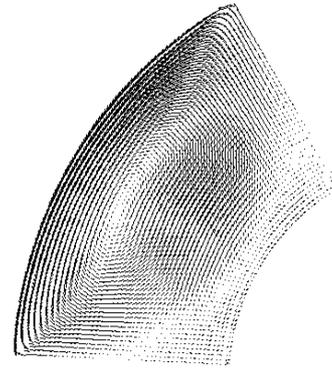


图 4 SPH 计算的粒子相对速度矢量场, $t=0.05\text{s}$

Fig.4 Relative velocity vector field at $t=0.05\text{s}$ calculated by SPH using the forced revolving boundary model

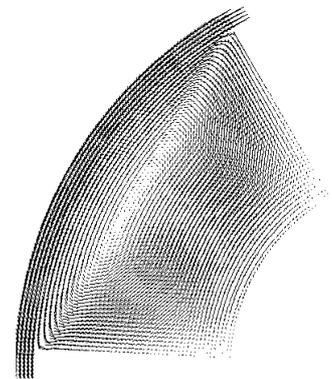
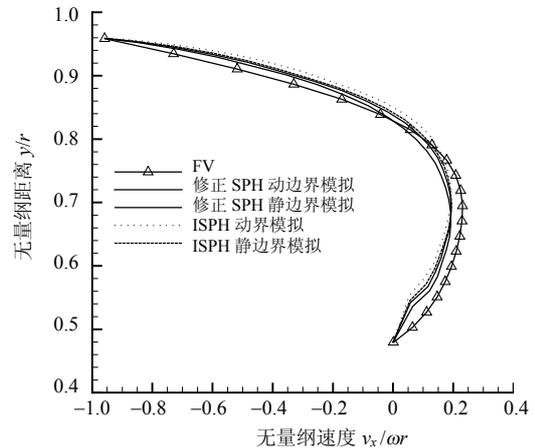


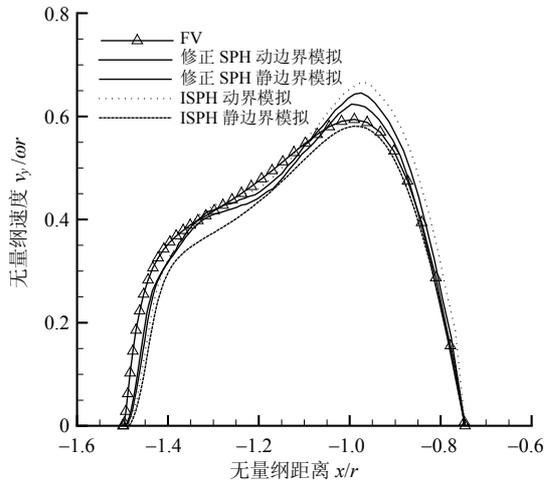
图 5 SPH 静边界模型粒子绝对速度矢量图, $t=0.05\text{s}$

Fig.5 Absolute velocity vector field at $t=0.05\text{s}$ calculated by SPH using the fixed boundary model

在图 6 中，将五种方法计算得到的线段“1”与圆弧段“2”上的粒子的无量纲速度分布进行比较。可以看到：五种计算方法得到的速度分布基本一致，两种 SPH 动边界模拟均与 SPH 静边界模拟结果更加接近，而与 FV 计算结果有稍许差异，这是因为无网格粒子法在计算中，粒子产生了位移引起的。



(a) 线段“1”上的水平速度分布



(b) 圆弧段“2”上的速度分布

图 6 线段“1”与圆弧段“2”上的正则化的速度分布 (五种计算方法结果对比)

Fig.6 Comparisons of normalized velocity profiles in line “1” and arc “2” at $t=0.05s$ for five method

4.2 修正 SPH 的必要

若不对密度进行 MLS 修正, 计算结果如图 7 所示: 随着计算的进行, 机筒与凹槽相交的两个角区域内的粒子密度产生剧烈的变化, 从而造成压力振荡, 最终会导致计算失败。原因是: 两个内拐角区域附近粒子受固壁剪切作用明显, 粒子的速度散度非常大, 因而密度变化剧烈。具体的 MLS 密度修正方法是: 在每个时间步, 只对流体粒子的密度进行演算, 边界粒子密度保持不变, 而每 20 个时间步对全部粒子进行 MLS 密度修正。作者还尝试了先演算全部粒子, 再每隔 20 步进行全部粒子的 MLS 密度修正, 结果如图 8 所示, 虽然较图 7 结果稍好, 但在靠近机筒的角区, 粒子分布很不规则。故, 采用前述的修正策略最佳。

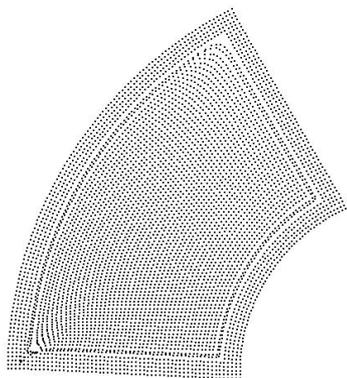


图 7 不对密度进行 MLS 修正粒子位置运算结果

Fig.7 The particles' position results without using the MLS correction

图 9 为相同时刻, 不同情况下, 机筒内壁上正则化的压力分布曲线。很明显, 前者计算的压力在

机筒与螺槽相交的两个角点区域(高压梯度区)发生了剧烈振荡。使用 MLS 密度修正后的压力分布曲线更光滑, 与文献[10]中的 ISPH 方法计算结果相近, 且与 FLUENT 计算的的压力分布曲线具有相似的分趋势。因此, 本文使用 MLS 修正的 SPH 方法对动边界的模拟是有效且非常有必要的。

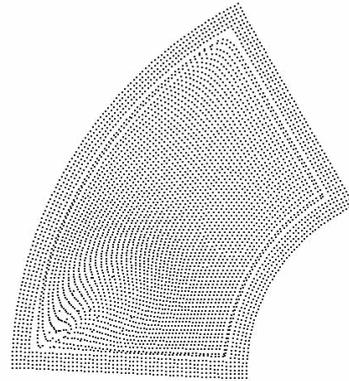


图 8 对全部粒子进行密度演算, 再进行 MLS 修正 粒子计算的位置

Fig.8 The particles' position results for evolving all particle density, and correcting all particles density using MLS method

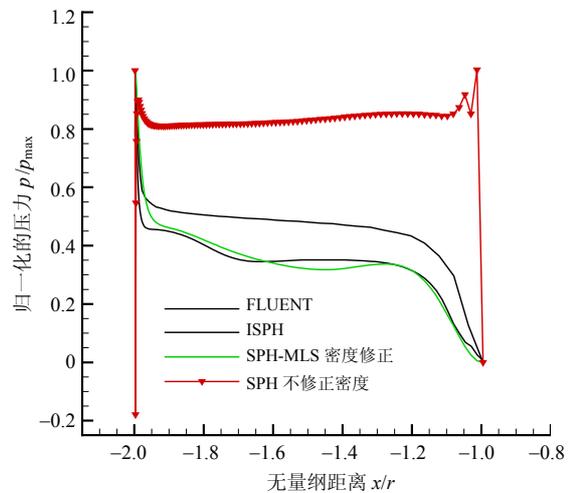


图 9 机筒内壁上的归一化压力分布情况

Fig.9 Normalized pressure profile on the inner wall of the barrel

5 结论

(1) 使用 MLS 修正的 SPH 方法模拟了强制旋转动边界问题。通过与 SPH 静边界模型, 以及 ISPH 方法和 FLUENT 的计算结果比较验证了该方法的有效性。

(2) 本文提出的强制旋转动边界实施方案, 不仅满足计算精度要求, 而且编程简单。

(3) 提出了一种具体的进行 MLS 密度修正方法。计算结果表明: 该方法可以有效消除计算域中

压力振荡问题,在不降低计算效率的前提下保证了计算的稳定性。

参考文献:

- [1] Wu L L, Jia Y X, Sheng S N, et al. Numerical simulation of reactive extrusion processes for activated anionic polymerization [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2008, 199(1/2/3): 56—63.
- [2] Yang D Y, Kim K J. Design of processes and products through simulation of three-dimensional extrusion [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2007, 191(1/2/3): 2—6.
- [3] 顾元通, 丁桦. 无网格法及其进展[J]. *力学进展*, 2005, 35(3): 323—337.
Gu Yuantong, Ding Hua. Recent developments of meshless method [J]. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(3): 323—337. (in Chinese)
- [4] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars [J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181(2): 375—389.
- [5] Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 110(2): 399—406.
- [6] Colagrossi A, Landrini M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 191(2): 448—475.
- [7] Potapov S, Maurel B, Combescure A, et al. Modeling accidental-type fluid-structure interaction problems with the SPH method [J]. *Computers and Structures*, 2009, 87(11/12): 721—734.
- [8] Ma S, Zhang X, Qiu X M. Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2009, 36(2): 272—282.
- [9] Cummins S J, Rudman M. An SPH projection method [J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152(2): 584—607.
- [10] 董添文, 江顺亮, 黄兴元, 等. 基于不可压缩光滑粒子流体动力学的旋转强制动边界问题研究[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(4): 32—39.
Dong Tianwen, Jiang Shunliang, Huang Xingyuan, et al. Research on incompressible smoothed particle hydrodynamics-based constraint revolving moving boundary problem [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(4): 32—39. (in Chinese)
- [11] Shobeyri G, Afshar M H. Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method [J]. *Computers & Fluids*, 2010, 39(3): 461—470.
- [12] Morris J P, Fox P J, Zhu Y. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 136(1): 214—226.
- [13] 董添文, 黄兴元, 江顺亮, 等. 两种边界条件设置方法在 ISPH 中的比较[J]. *塑性工程学报*, 2010, 17(6): 136—142.
Dong Tianwen, Huang Xingyuan, Jiang Shunliang, et al. Comparisons of mirror and static boundary conditions in incompressible SPH [J]. *Journal of Plasticity Engineering*, 2010, 17(6): 136—142. (in Chinese)

(上接第 294 页)

- [4] Hayashi T, Murase M. Defect imaging with guided waves in pipe [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2005, 117(4): 2134—2140.
- [5] Davies J, Cawley P. The application of synthetic focusing for imaging crack-like defects in pipelines using guided waves [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, 2009, 56(4): 759—771.
- [6] Davies J, Cawley P. The application of synthetically focused imaging techniques for high resolution guided wave pipe inspection [J]. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 2007, 26: 681—688.
- [7] Velichko A, Wilcox P. Post-processing of guided wave array data for high resolution pipe inspection [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2009, 126(6): 2973—2982.
- [8] Shelke A, Kundu T, Amjad U. Mode-selective excitation and detection of ultrasonic guided waves for delamination detection in laminated aluminum plates [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2011, 58(3): 567—577.
- [9] Auld B A. *Acoustic fields and waves in solid* [M]. Florida: Krieger Publishing Company, 1990: 104—114.
- [10] Sun Z Q, Zhang L, Rose J L. Guided wave focusing mechanics in pipe [J]. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2005, 127: 471—478.
- [11] Li J, Rose J L. Excitation and propagation of non-axisymmetric guided waves in a hollow cylinder [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2001, 109(2): 457—464.
- [12] 邓菲. 基于时间反转的单通道管道导波检测新方法[J]. *机械工程学报*, 2011, 47(6): 17—21.
Deng Fei. A time reversal guided wave inspection method based on one signal generator tunnel [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(6): 17—21. (in Chinese)
- [13] Velichko A, Wilcox P. Excitation and scattering of guided waves: Relationships between solutions for plates and pipes [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2009, 125(6): 3623—3631.
- [14] Ratssepp M, Fletcher S, Lowe M. Scattering of the fundamental torsional mode at an axial crack in a pipe [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2010, 127(2): 730—740.
- [15] Ditri J J. Utilization of guided elastic waves for the characterization of circumferential cracks in hollow cylinders [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, 96(6): 3769—3775.