

文章编号: 1000-4750(2013)01-0064-05

# 基于柯西不等式的结构可靠度取尾重要抽样法

房艳峰, 高华喜

(浙江海洋学院船舶与建筑工程学院, 浙江, 舟山 316004)

**摘 要:** 该文采用柯西不等式对结构可靠度计算中 Monte Carlo 重要抽样法的模拟方差进行了分析与评价, 提出了中间概率的概念并推导出其与模拟方差的函数关系。在此基础上得出使方差达到极小值的抽样函数具体形式, 并建立了属于重要抽样技术的圆环和半圆环取尾抽样方法。与其他方法不同的是其抽样函数与原变量分布函数的比值是一常数, 其分布区域是以原点为中心以原点到极限状态面距离为半径的圆形外部空间, 模拟结果的方差可以定量描述。理论分析和例题模拟结果都表明: 圆环取尾抽样方法可使模拟结果的方差缩减到直接模拟的 1/10, 而半圆环取尾抽样方法能缩减到 1/20。

**关键词:** Monte Carlo 法; 柯西不等式; 中间概率; 重要抽样方法; 圆环取尾抽样方法

中图分类号: TU311.4 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.06.0374

## INTERCEPTING TAIL IMPORTANCE SAMPLING METHOD OF STRUCTURAL RELIABILITY BASED ON CAUCHY-INEQUALITY

FANG Yan-feng, GAO Hua-xi

(School of Naval Architecture and Civil Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan, Zhejiang 316004, China)

**Abstract:** Cauchy-inequality is utilized to analyze and evaluate the variance of the simulation result of the Monte Carlo method with importance sampling technique involved. The concept of medium probability is introduced and the relationship between medium probability and simulation result variance is deduced. And based on this conclusion, the sampling function which will minimum the simulation result variance is figured, and cirque and semi-cirque intercepting tail importance sampling methods, as importance sampling techniques, are built. Especially, the ratio between the sampling function to the original distribution function is constant in the methods and the sampling points distribute in a spherical space, which take the origin as a center and the distance from the origin to the limit state surface as a radius. Furthermore, the quantitative description for the reduction of variance of simulation results can be obtained. The results of example and analysis indicate that the variance of simulation results by cirque and semi-cirque intercepting tail importance sampling methods can be reduced to one tenth and one twentieth of that by a direct method.

**Key words:** Monte Carlo method; Cauchy-inequality; medium probability; importance sampling method; cirque intercepting tail sampling method

在结构可靠度计算中, 工程上常采用一次二阶矩法。其实质是在标准正态空间中利用数值分析方法求得原点到极限状态面的距离, 并以此为可靠指标, 原理是在该空间沿任一轴的边缘分布均为正态分布。缺点是当极限状态面在设计验算点处不是线

性时, 根据其相对原点或凸或凹, 计算结果偏小或偏大, 即计算结果是近似的<sup>[1]</sup>。因此, 计算精度较高的数值模拟方法, Monte Carlo 法越来越受到人们的重视, 并成为结构可靠度分析和设计的一个重要组成部分<sup>[2]</sup>。为提高抽样效率, 人们研究出许多降

收稿日期: 2011-06-17; 修改日期: 2011-09-12

基金项目: 浙江省教育厅项目(Y201018955)

通讯作者: 房艳峰(1976—), 男, 辽宁铁岭人, 讲师, 硕士, 从事结构工程研究(E-mail: fyf20021976@126.com).

作者简介: 高华喜(1976—), 男, 浙江舟山人, 副教授, 博士, 从事地质工程研究(E-mail: ghx2001408@126.com).

低模拟方差,改善模拟精度的抽样技巧,如重要抽样法、相关抽样法、分层抽样法等<sup>[3]</sup>。其中,重要抽样法是效率较高的<sup>[4]</sup>。自1983年Shinozuka<sup>[5]</sup>将重要抽样法引入到结构可靠度计算中以来,许多学者对其进行了研究和改进<sup>[6]</sup>。最初人们取抽样函数与原分布函数形式相同,抽样函数重心取由一次二阶矩法求得的设计验算点<sup>[7]</sup>。此方法也用于多失效模式的结构<sup>[8]</sup>,Bucher提出了自适应抽样,用失效子样对原变量密度函数的一阶矩和二阶矩构造正态分布的抽样密度函数<sup>[9]</sup>,此法得到的失效概率常常偏低。Ang提出了核函数法,构造的密度函数非常接近最佳抽样函数<sup>[10]</sup>,但用于形成核函数的失效子样必须来自直接Monte Carlo法,即失效概率较小时不适用。金伟良提出了将条件抽样和重要抽样相结合的改进模拟方法<sup>[11]</sup>,进一步提高了模拟的抽样效率。贡金鑫提出一种新的方向重要抽样法<sup>[12]</sup>,该方法构造以验算点为中心的椭圆抽样空间,将以验算点为中心的方向矢量变换为以坐标原点为中心的方向矢量来抽样,边优化边模拟,计算不复杂,却提高效率很多。张崎提出一种基于Kriging模拟的重要抽样方法<sup>[1]</sup>,此方法用Kriging模拟的高非线性极限状态方程来进行结构分析,大大减低了有限元分析时间。本文从模拟结果的方差入手,推导出重要抽样法模拟结果的方差公式,并采用柯西不等式进行分析和评价。在此基础上提出新的重要抽样法——圆环和半圆环取尾分布抽样法。获得了较高的模拟精度。

### 1 Monte Carlo 法中的重要抽样法

在结构可靠度计算中, Monte Carlo 法得到的模拟结果相对比较精确,可作为其他近似计算结果精度的检验和校核<sup>[2]</sup>。当样本数  $N$  取得无穷大时, Monte Carlo 法的模拟结果无限接近解析解。其理论依据为大数定律<sup>[13]</sup>。数值模拟的基本原理是根据基本随机变量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的概率密度函数  $f(x)$  进行抽样,取得容量为  $N$  的一个样本,由于失效概率可表示为某函数  $v(x)$  的数学期望,而样本平均值又是失效概率的无偏估计。这样失效概率的估计值可表示为:

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v(x_i) = \bar{v} \quad (1)$$

式中:  $x_i$  为极限方程中的基本变量;  $v(x)$  为与概率分布有关的某个函数。该方法缺点是在失效概率较

小时,欲控制模拟方差的离散性,模拟数目相当庞大,耗费过多的时间。随着计算机速度的发展和模拟方法的改进,这个问题将会得到更好的改善<sup>[14-17]</sup>。在直接 Monte Carlo 法中,结构失效概率的理论积分公式做如下推导转化为某函数  $v(x) = I[x]$  的数学期望:

$$p_f = \int_{D_f} f(x)dx = \int I(g(x))f(x)dx = E(I(x)) \quad (2)$$

式中:  $D_f$  为失效域;  $f(x)$  为随机变量的密度函数;  $I[x]$  为示性函数,当功能函数  $g(x) \leq 0$  时,符号函数  $I[x] = 1$ ,反之,  $I[x] = 0$ 。无偏估计的有效性即模拟结果的精度可用方差来衡量,如下面公式。

$$D(\hat{p}_f) = \frac{D(v)}{N} = \frac{E(v^2) - E^2(v)}{N} = \frac{p_f(1-p_f)}{N} \quad (3)$$

式中:  $D(x)$  为变量的方差;  $E(v)$  为变量的数学期望。为进一步减少方差,引入了重要抽样技术。

在式(2)中引入抽样函数  $h(u)$ , 做如下变换:

$$p_f = \int I(g(x))f(x)dx = \int I(g(u))\frac{f(u)}{h(u)}h(u)du = E\left(I(g(u))\frac{f(u)}{h(u)}\right) \quad (4)$$

式(4)是重要抽样技术中的理论公式。式中,  $u$  为服从构造抽样函数  $h(u)$  的随机变量。 $v(u)$  的具体表达形式为  $I(g(u))\frac{f(u)}{h(u)}$ , 相应的模拟估计为:

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(u_i))\frac{f(u_i)}{h(u_i)} \quad (5)$$

此时抽样点服从密度函数  $h(u)$  分布而不再是  $f(u)$ 。在重要抽样法中,模拟方法并没有实质变化,只是通过转移抽样重心,使更多抽样点落入失效区,增加了抽样效率。为了计算方便,设  $w(u) = \frac{f(u)}{h(u)}$ , 设抽样点落入失效区的概率为  $E(g(u)) = p_o$ ,  $p_o$  称为中介概率。则式(4)可写成如下形式:

$$p_f = E\left(I(g(u))\frac{f(u)}{h(u)}\right) = E(I(g(u))w(u)) = p_o E(w(u)) \quad (6)$$

值得注意的是,式(6)等式右边  $p_o E(w(u))$  中变量  $u$  分布密度为  $\frac{h(u)}{p_o}$ , 分布区域为  $D_f$ 。模拟估计

的方差为:

$$D(\hat{p}_f) = D(\bar{v}(u)) = \frac{E(I^2(u)w^2(u)) - E^2(I(u)w(u))}{N}$$

$$\frac{p_0 E(w^2(u)) - p_0^2 E^2(w(u))}{N} \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)得:

$$D(\bar{v}(u)) = \frac{\frac{E(w^2(u))}{E(w(u))} p_f - p_f^2}{n} \quad (8)$$

将式(8)与式(3)相比较,不难看出,只要构造的抽样函数  $h(u)$  能保证在失效区域  $D_f$  内  $w(u) = \frac{f(u)}{h(u)} < 1$ , 则  $\frac{E(w^2(u))}{E(w(u))} < 1$ , 重要抽样的模拟方差就比直接 Monte Carlo 法的要小, 样本估计更为有效。

如果中介概率  $p_0$  为一定值, 设样本容量  $n$  为无穷大,  $\frac{E(w^2(u))}{E(w(u))}$  可用样本值来表示:

$$\frac{E(w^2(u))}{E(w(u))} = \frac{\sum_{i=1}^n w^2(u_i)}{\sum_{i=1}^n w(u_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n w^2(u_i)}{n \frac{p_f}{p_0}} \quad (9)$$

由柯西不等式可知, 若  $n$  个数的和是一个定值,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = m$ , 则有:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 / n = m^2 / n \quad (10)$$

仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = m/n$  时, 式(10)取等号。

根据上述理论, 可得出下面不等关系:

$$\frac{E(w^2(u))}{E(w(u))} = \frac{\sum_{i=1}^N w^2(u_i)}{\sum_{i=1}^N w(u_i)} \geq \frac{(\sum_{i=1}^N w(u_i))^2 / N}{\sum_{i=1}^N w(u_i)} = \frac{N \frac{p_f^2}{p_0^2}}{N \frac{p_f}{p_0}} = \frac{p_f}{p_0} \quad (11)$$

$$D(\bar{v}(u)) = \frac{\frac{E(w^2(u))}{E(w(u))} p_f - p_f^2}{N} \geq \frac{\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) p_f^2}{N} \quad (12)$$

只有当  $w(u) = \frac{f(u)}{h(u)} = \frac{p_f}{p_0}$  时式(11)、式(12)中才取等号。从上述公式推导可以得出, 在中介概率  $p_0$  一定值时, 比值  $w(u) = \frac{f(u)}{h(u)}$  方差越小, Monte Carlo

模拟的精度越高。在比值  $w(u) = \frac{f(u)}{h(u)}$  为一恒定值

时, 中介概率  $p_0$  越大, Monte Carlo 模拟的精度越高。最理想的状态是, 取这样一个抽样函数  $h(u)$  使得  $p_0 = 1$ ,  $h(u) = \frac{f(u)}{p_f}$ , 此时理论上模拟方差无限小。此结论与文献[18]的结论相吻合。

## 2 圆环取尾分布抽样技术

为达到提高抽样效率的目的, 构造的重要抽样函数  $h(u)$  既要满足中介概率  $p_0$  尽量大, 又要满足原分布函数和构造函数的比  $w(u) = \frac{f(u)}{h(u)}$  趋于均匀

分布。两者兼顾才能达到预期效果。在圆环取尾分布抽样法中, 构造出一个函数  $h(u)$  使得  $w(u) = \frac{f(u)}{h(u)}$  为常数(小于 1), 同时增加中介概率  $p_0$ 。设原

变量服从二维标准正态分布, 函数  $h(u)$  的分布形状取其尾部, 如图 1 所示。

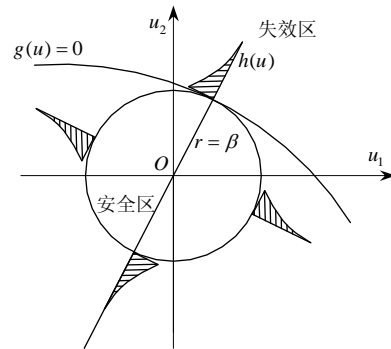


图 1 构造函数  $h(u)$  的分布

Fig.1 Constructed function  $h(u)$

图 1 表示在二维变量  $u_1$ 、 $u_2$  的分布空间中, 构造函数  $h(u)$  分布在以可靠指标  $\beta$  (原点到极限状态面的距离) 为半径的圆面之外, 即

$\int_{u_1^2 + u_2^2 > \beta^2} h(u) du = 1$ 。分布密度与标准正态分布密度

函数的比值  $\frac{h(u)}{f(u)}$  是可求常数。由于变量  $u_1$ 、 $u_2$  属

于标准正态分布, 则  $u_1^2 + u_2^2$  服从  $\chi^2(2)$  分布。  $h(u)$  可以按下列公式求出:

$$h(u) = \frac{f(u)}{p(\chi^2(2) > \beta^2)} \quad (13)$$

由式(12)可知, 此时中介概率密度  $p_0$  是模拟估计方差缩减的关键。图 2 和图 3 分别表示原密度函数  $f(u)$  和抽样密度函数  $h(u)$  的模拟分布情况。样本数均为  $n = 2000$ 。图 2 和图 3 中整个区域被极限状态函数分为安全区(SAFE)和失效区(FAILURE)

两部分。小圆圈表示落入失效区的抽样点，数目分别为  $n_f$  和  $n_{f_0}$ 。则相应的失效概率和中介概率分别为  $p_f = \frac{n_f}{n}$  和  $p_o = \frac{n_{f_0}}{n}$ 。显然， $p_o > p_f$ 。由式(12)得出的使用圆环取尾分布抽样法后模拟失效概率的方差与直接抽样时的方差比值为：

$$\lambda = \frac{p_f - p_f}{1 - p_f} \quad (14)$$

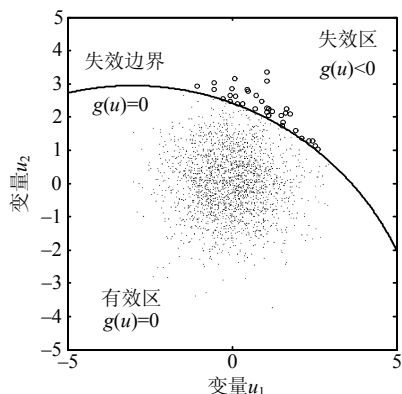


图 2 函数  $f(u)$  的模拟样本点分布( $n=2000$ )

Fig.2 Distribution of sampling points following  $f(u)$  ( $n=2000$ )

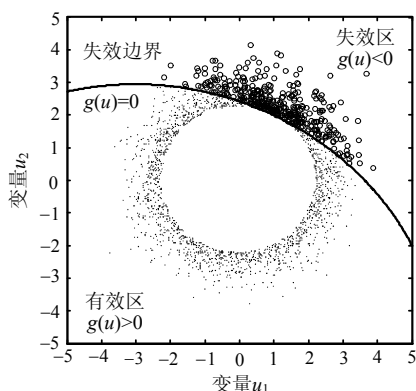


图 3 函数  $h(u)$  的模拟样本点分布( $n=2000$ )

Fig.3 Distribution of sampling points following  $h(u)$  ( $n=2000$ )

图 4 表示出结构失效概率  $p_f$  在  $5 \times 10^{-4}$  和  $5 \times 10^{-3}$  之间时，方差比值  $\lambda$  与中介密度  $p_o$  的关系。 $\lambda$  随中介密度  $p_o$  的增大而减小。降低的速度与概率密度  $p_f$  有关，并有前快后慢的变化趋势。 $p_f$  越小， $\lambda$  随中介密度  $p_o$  的增大而减小的速度越快。以  $p_f = 5 \times 10^{-4}$  为例， $p_o$  从  $p_f$  增加 0.02， $\lambda$  从 1 减少到 0.0019。对于  $p_f = 5 \times 10^{-3}$ ， $\lambda$  从 1 减少到 0.0202，相差近 10 倍。一般情况下  $0.5 < p_o < 0.15$ ，圆环取尾分布抽样可以满足方差缩减要求。为进一步增加  $p_o$ ，提高抽样效率，可在图 3 的基础上进一步缩小

抽样范围，将原来的圆环抽样区域降低到半圆环区域，如图 5 所示。图中虚线经过原点，将圆环截成半圆环，方向与原点与设计验算点的直线垂直。由于虚线下部不会出现失效点，所以只在上部取样即可，这种抽样方法即为半圆环取尾抽样法。此时中介概率增加到原来的 2 倍，方差得到进一步缩减。抽样函数的表达式为：

$$h(u) = \frac{2f(u)}{p(\chi^2(2) > \beta^2)} \quad (15)$$

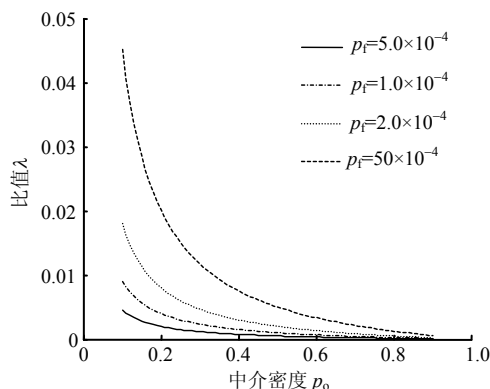


图 4 方差比值  $\lambda$  与中介密度  $p_o$  的关系曲线

Fig.4 Relationship between ration  $\lambda$  of variance And medium probability  $p_o$

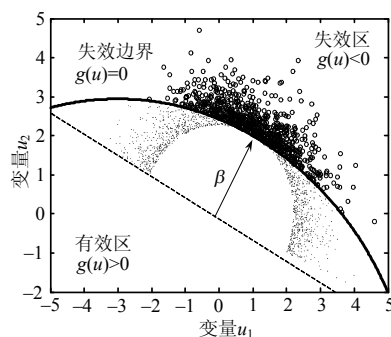


图 5 函数  $h(u)$  的模拟样本点分布( $n=1000$ )

Fig.5 Distribution of sampling points following  $h(u)$  ( $n=1000$ )

### 3 算例

已知某结构的极限状态方程为  $f w - 1365 = 0$ ，随机变量  $f$ 、 $w$  均服从正态分布，其参数见表 1。比较分别利用直接 Monte Carlo 法和本文提出的圆环取尾重要抽样法所求失效概率的收敛情况。

表 1 随机变量的统计参数

变量	均值	标准差
$w$	54	0.05
$f$	38	0.1

随机变量  $f$ 、 $w$  经标准正态化后，得到正态分布变量  $\bar{f}$ 、 $\bar{w}$  表达为：

$$\bar{f} = \frac{f-38}{3.8}, \quad \bar{w} = \frac{w-54}{2.7} \quad (16)$$

经标准正态化后的极限状态方程为:

$$\bar{w}\bar{f} + 10\bar{w} + 20\bar{f} + 67 = 0 \quad (17)$$

抽样总量  $n$  取 5000~50000, 分别用直接 Monte Carlo 法(模拟方法 I)、圆环取尾重要抽样法(模拟方法 II)和半圆环取尾重要抽样法(模拟方法 III)得到的结果列入图 6 和图 7 中做比较。在图 6 和图 7 中, 抽样数目每取一个值, 分别用各种模拟方法各进行 15 次模拟, 其结果用不同的符号表示。结构失效概率的理论解为  $p_f = 0.8355 \times 10^{-3}$ 。在图 6 中, 抽样总量  $n$  从 5000 增加到 50000, 直接 Monte Carlo 法模拟结果的分布区间从  $1.183 \times 10^{-3}$  降低到  $0.588 \times 10^{-3}$ , 相应的圆环取尾重要抽样法模拟结果分布区间从  $0.102 \times 10^{-3}$  降低到  $0.033 \times 10^{-3}$ 。从中可以看出, 与直接 Monte Carlo 法相比, 圆环取尾重要抽样法的效率很高, 模拟值的波动范围是原来的  $\frac{1}{20} \sim \frac{1}{10}$ , 特别是当抽样数量较小时结果离散型降低更为明显。在图 7 中, 半圆环取尾重要抽样法模拟结果的分布区间比圆环取尾重要抽样法的要小, 大致降低到 0.5 倍。当抽样数量从 5000 增加到 50000, 圆环取尾重要抽样法模拟结果的分布范围从  $0.106 \times 10^{-3}$  降低到  $0.035 \times 10^{-3}$ , 相应的半圆环取尾重要抽样法模拟结果分布范围从  $0.059 \times 10^{-3}$  降低到  $0.024 \times 10^{-3}$ , 即采用半圆环取尾分布抽样后的模拟结果比圆环取尾抽样的模拟结果更为集中, 其分散区间降为原来的 0.5 倍左右。此结论跟图 4 的分析结果完全相同。

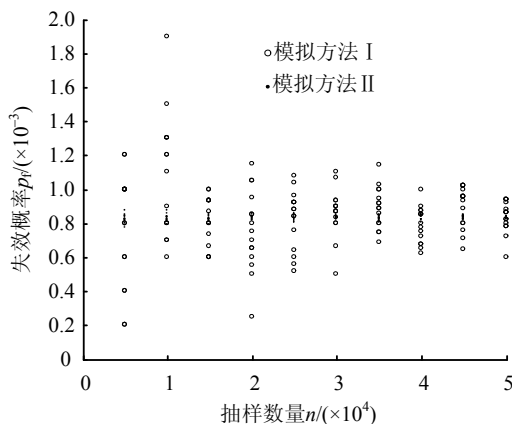


图 6 直接 Monte Carlo 法(模拟方法 I)和圆环取尾重要抽样法(模拟方法 II)模拟结果比较

Fig.6 Result comparison of direct Monte Carlo Method (simulation I) and cirque intercepting Tail importance sampling method (simulation II)

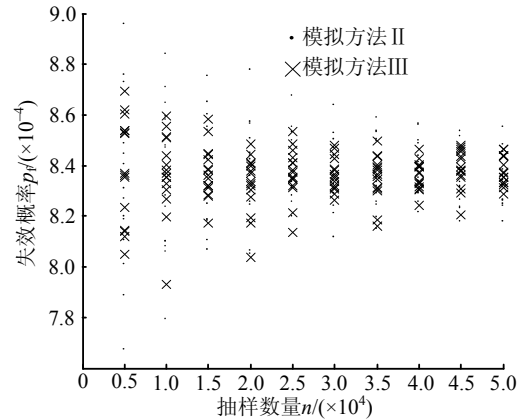


图 7 圆环取尾重要抽样法(模拟方法 II)和半圆环取尾重要抽样法(模拟方法 III)模拟结果比较

Fig.7 Result comparison of cirque(simulation II) and semi-cirque intercepting importance sampling method 5 (simulation III)

## 4 结论

利用重要抽样技术来提高 Monte Carlo 法的模拟精度要比依靠提高样本数量来提高模拟精度更为有效和可行。作为重要抽样技术中的一种, 基于柯西不等式的圆环取尾重要抽样法具有较高的抽样效率, 半圆环取尾重要抽样法可在此基础上将模拟结果的离散性再次缩减到原来的 1/2。模拟结果的方差取决于中介概率  $p_0$ , 随  $p_0$  的增加, 模拟方差急剧减小。结构的失效概率越小, 模拟方差减少的速度越快。通常, 当  $0.15 < p_0 < 0.5$ , 与直接 Monte Carlo 法相比, 半圆环取尾重要抽样法的模拟方差可降低到原来的 0.05 倍以下。

## 参考文献:

- [1] 张崎, 李兴斯. 结构可靠性分析的模拟重要抽样方法 [J]. 工程力学, 2007, 24(1): 33-36.  
Zhang Qi, Li Xingsi. Importance sampling approach in structural reliability analysis based on kriging simulation [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(1): 33-36. (in Chinese)
- [2] 赵国藩. 工程结构可靠性理论 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996: 195.  
Zhao Guofan. Theory of engineering structural reliability [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996: 195. (in Chinese)
- [3] Rubin stein R Y. Simulation and the Monte Carlo Method [M]. New York: Wiley, 1987: 226.
- [4] Maurice Lemaire. Structural reliability [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2009: 155.
- [5] Shinozuka M. Basic analysis of structural safety [J]. Journal of Structural Engineering-ASCE, 1983, 109(3): 721-740.

(参考文献[6]—[18]转第 125 页)