

文章编号: 1000-4750(2013)01-0087-04

双特征参数法与最优模态法在弹性直杆 动力屈曲问题中解的一致性

毛柳伟, 王安稳, 邓 磊, 韩大伟

(海军工程大学理学院, 武汉 430033)

摘 要: 采用求解最优模态的方法, 分别对弹性压应力波作用下受载端夹支和简支两种边界条件直杆的动力屈曲问题进行了探讨, 研究中所设的屈曲模态不仅满足边界条件, 而且满足文献所得的波前附加约束条件。研究发现屈曲模态中放大最快的模态所对应的临界力参数和惯性项的指数参数与双特征参数法所得的结果是一致的, 即用双特征参数法求解所得屈曲模态就是最优模态。另外, 计算表明, 最低阶动力屈曲载荷远高于静力屈曲载荷, 确定动力屈曲载荷时应计及横向惯性。

关键词: 动力屈曲; 应力波; 双特征参数法; 最优模态; 弹性直杆

中图分类号: O347 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.07.0441

THE IDENTICALNESS OF THE DYNAMIC BUCKLING RESULTS OF ELASTIC BARS BETWEEN THE TWIN-CHARACTERISTIC-PARAMETER SOLUTION AND THE PREFERRED MODE SOLUTION

MAO Liu-wei, WANG An-wen, DENG Lei, HAN Da-wei

(College of Science, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: By use of the method of the preferred mode, theoretical analyses of dynamic buckling for elastic bars subjected to axial compression, with the loaded end clamped but movable in axial direction or simply supported, were performed. The supposed buckling modes fulfill not only the boundary condition, but also the supplementary restraint equation given in literatures. Research shows that the critical-load parameter and the dynamic characteristic parameter of the most amplified mode are in accordance with the results given by the Twin-characteristic-parameter solution. That is to say, the dynamic buckling modes given by the Twin-characteristic-parameter solution are also the preferred mode of buckling. Calculation results shows that the first order of the critical load of dynamic buckling is much higher than the static critical load with the same boundary condition. So the transverse inertia should be considered in the calculation of the critical load of dynamic buckling.

Key words: dynamic buckling; stress wave; twin-characteristic-parameter solution; preferred mode; elastic bar

直杆在轴向冲击下的动力屈曲问题已为国内外众多学者所研究, 部分研究工作可见文[1—9]。早期的研究大多采用放大函数法, 寻求任意初始位

移缺陷和初始速度缺陷发展最快时所对应的屈曲模态, 称其为最优模态。经典的放大函数法要求结构具有某种初始缺陷, 如果杆是理想无缺陷的, 则

收稿日期: 2011-07-15; 修改日期: 2011-12-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(10772196)

通讯作者: 毛柳伟(1985—), 男, 陕西西安人, 博士生, 主要从事船舶结构力学研究(E-mail: 111mlw@163.com).

作者简介: 王安稳(1945—), 男, 山东日照人, 教授, 博导, 主要从事结构力学、结构稳定性理论研究(E-mail: wtng4509@public.wh.hb.cn);

邓 磊(1988—), 男, 河南开封人, 博士生, 主要从事船舶结构力学研究(E-mail: denglei05111@yahoo.com.cn);

韩大伟(1986—), 男, 山东潍坊人, 博士生, 主要从事船舶结构力学研究(E-mail: handawei1112@163.com).

无论轴向冲击载荷多大, 杆中不会有屈曲产生。另外, 放大函数法假定屈曲发生时杆中各截面处于均匀的轴向受力状态, 对于高速撞击下杆的局部动力屈曲, 该方法不再适用。屈曲是受压直杆的内在本质特性, 在研究中引入初始缺陷在某种程度上掩盖了分叉问题的物理本质。文[4-5]研究了考虑应力波传播时理想直杆的动力屈曲问题, 给出了不同屈曲时间的临界载荷值。文[6]指出考虑横向惯性力的作用必将增强结构反抗屈曲的能力。文[7]将动力屈曲中的临界应力参数和动力屈曲控制方程中惯性项的指数参数作为一对耦合特征参数进行求解, 称之为双特征参数法。通过能量守恒定律推导了动力屈曲发生瞬间的能量转换和守恒准则, 根据该准则得出了压缩波前屈曲变形的补充约束方程, 由此导出求解两个特征参数和动力屈曲模态的完备定解条件, 建立了求解直杆动力屈曲的较严密的理论方法, 指出考虑惯性效应所得临界应力值是忽略惯性效应计算值的 2.5 倍。文[8]的实验证实了以上理论结果。

总结现有文献可以看出: 以往用最优模态法进行的直杆动力屈曲的研究中, 所设屈曲模态一般只满足杆的边界条件, 如两边固支杆应满足杆的两端位移和转角为零, 两端简支杆应满足杆的两端位移和曲率为零。然而, 在考虑应力波作用下直杆的局部动力屈曲研究中, 所设模态函数满足受载端的边界条件和应力波波阵面处的边界条件似乎更为合理。本文采用求解最优模态的方法, 分别对弹性压应力波作用下受载端夹支和简支两种边界条件直杆的动力屈曲问题进行了探讨, 研究中所设的屈曲模态不仅满足边界条件, 而且满足文[7]所得波前附加约束条件。研究发现屈曲模态中放大最快的模态所对应的临界力参数和惯性项的指数参数与双特征参数法所得的结果是一致的, 即用双特征参数法求解所得屈曲模态就是最优模态。另外, 计算表明, 最低阶动力屈曲载荷约为相同边界条件下静力屈曲载荷的 2.5 倍, 远高于静力屈曲载荷, 确定动力屈曲载荷时应计及横向惯性。

1 动力屈曲控制方程

如图 1 所示为一右端固定的等截面直杆, 直杆以 ox 为原始平衡位形, 其长度 L , 截面积 A , 材料密度 ρ , 材料弹性模量为 E , 截面惯性矩 I 。设在 $t=0$ 时刻, 从左端开始作用一恒值为 N 的阶跃载荷, t 时

刻压应力波阵面离开受载端传播的距离为:

$$l = ct, \quad c = \sqrt{E/\rho} \quad t \leq L/c \quad (1)$$

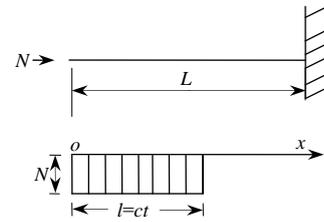


图 1 压应力波作用下杆中的轴向力(应力波未反射)

Fig.1 Axial force in bar before reflection of compression wave

c 为弹性压应力波在杆中的传播速度。根据屈曲时杆的能量转换关系, 屈曲控制方程可以表示为^[9]:

$$N \int_0^l \dot{w}_{,x} w_{,x} dx - \int_0^l \rho A \dot{w} \dot{w} dx - \int_0^l EI w_{,xx} \dot{w}_{,xx} dx = 0 \quad (2)$$

其中, $w(x,t)$ 为横向位移, 字母上一点表示对时间的导数。

高速摄影表明, 最初出现的屈曲变形, 其位置是固定的, 仅幅值随时间增大^[10]。据此对屈曲模态做变量分离, 令:

$$w(x,t) = Y(x) \cdot T(t) \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 得:

$$\alpha^2 \int_0^l Y_{,x}^2 dx - \int_0^l \lambda^2 Y^2 dx - \int_0^l Y_{,xx}^2 dx = 0 \quad (4)$$

$$\ddot{T} - \gamma^2 \lambda^2 T = 0 \quad (5)$$

其中: $\alpha^2 = N/EI$ 为临界载荷参数; λ^2 为动力特征参数, 表征横向惯性对结构屈曲的影响; 参数 γ 定义为 $\gamma^2 = EI/\rho A$ 。

2 动力屈曲分析

2.1 受载端夹支情况

直杆受载端夹支情况下, 应满足以下边界条件:

$$w(0,t) = w_{,x}(0,t) = 0 \quad (6)$$

由于在临界屈曲时刻, 轴向弹性压缩波前材料未受扰动, 在波阵面前不可能有约束反力矩产生, 因而在临界屈曲时刻, 该处杆的曲率为零。应力波波阵面应满足以下边界条件^[7]:

$$w(l,t) = w(l,t)_{,x} = w_{,xx}(l,t) = 0 \quad (7)$$

满足以上边界条件, 设屈曲模态函数为:

$$Y(x) = C_1 \left(\sin \frac{n_1 \pi}{l} x - \frac{n_1}{n_2} \sin \frac{n_2 \pi}{l} x \right) \quad (8)$$

其中, n_1 、 n_2 为同奇或同偶的正整数。

将式(8)代入式(4), 利用三角函数的正交性进行化简, 得:

$$\alpha^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \cdot \left[\left(\frac{n_1\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{\lambda l}{n_2\pi} \right)^2 \right] \quad (9)$$

为求最优模态的半波长应使 N 取最小值^[9], 即:

$$dN / dl = 0 \quad (10)$$

由式(10)可得, 最优模态所对应的动力特征参数为:

$$\lambda^2 = \left(\frac{n_1 n_2 \pi^2}{l^2} \right)^2 \quad (11)$$

将式(11)代入式(9), 得最优模态所对应的临界力参数为:

$$\alpha_{cr}^2 = \frac{\pi^2}{l^2} (n_1^2 + n_2^2) \quad (12)$$

对应的临界屈曲时间为:

$$t_{cr} = \frac{\pi}{c} [(n_1^2 + n_2^2) / \alpha_{cr}^2]^{1/2} \quad (13)$$

2.2 受载端简支情况

直杆受载端简支情况下, 应满足以下边界条件:

$$w(0, t) = w_{,xx}(0, t) = 0 \quad (14)$$

应力波波阵面应满足式(7)所示边界条件。

满足以上边界条件, 设屈曲模态函数为:

$$Y(x) = C_1 \left(\sin \frac{m_1 \pi}{l} x + \frac{m_1}{m_2} \sin \frac{m_2 \pi}{l} x \right) \quad (15)$$

其中, m_1 、 m_2 为正整数, 且奇偶不同。

将式(15)代入式(4), 利用三角函数的正交性进行化简, 得:

$$\alpha^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_1^2} \cdot \left[\left(\frac{m_1 \pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{\lambda l}{m_2 \pi} \right)^2 \right] \quad (16)$$

同样, 为求最优模态的半波长应使 N 取最小值, 由式(10)可得, 最优模态所对应的动力特征参数为:

$$\lambda^2 = \left(\frac{m_1 m_2 \pi^2}{l^2} \right)^2 \quad (17)$$

将式(17)代入式(16), 得最优模态所对应的临界力参数为:

$$\alpha_{cr}^2 = \frac{\pi^2}{l^2} (m_1^2 + m_2^2) \quad (18)$$

对应的临界屈曲时间为:

$$t_{cr} = \frac{\pi}{c} [(m_1^2 + m_2^2) / \alpha_{cr}^2]^{1/2} \quad (19)$$

3 算例及结果分析

在式(11)、式(12)中令 $n_1 = 1$ 、 $n_2 = 3$, 可得受载端夹支边界条件下最小动态屈曲临界载荷和相

应的动力特征参数为:

$$(N_{cr})_{min} = 10 \frac{EI\pi^2}{l^2}, \quad (\lambda_{cr}^2)_{min} = \left(\frac{3\pi^2}{l^2} \right)^2 \quad (20)$$

在式(17)、式(18)中令 $m_1 = 1$ 、 $m_2 = 2$, 可得受载端简支边界条件直杆最小动态屈曲临界载荷和相应的动力特征参数为:

$$(N_{cr})_{min} = 5 \frac{EI\pi^2}{l^2}, \quad (\lambda_{cr}^2)_{min} = \left(\frac{2\pi^2}{l^2} \right)^2 \quad (21)$$

两端夹支直杆的静力屈曲临界载荷最小值为 $EI\pi^2 / (0.5l)^2$, 一端简支, 一端固支边界条件直杆的静力屈曲临界载荷最小值为 $EI\pi^2 / (0.7l)^2$ 。可以看出由于横向惯性的影响, 最低阶动力屈曲载荷远高于相应边界条件的静力屈曲载荷, 约是等效长度直杆静力屈曲载荷的 2.5 倍。文[8]实验得到, 撞击端为夹支和简支时, 动力屈曲载荷值分别为相同边界条件下静力屈曲的 2.23 倍和 2.49 倍, 本文的结果与实验结果非常接近。

同文[7], 定义无量纲临界力参数和动力特征参数:

$$\Lambda_1^{(n)} = (\alpha l)^2, \quad \Lambda_2^{(n)} = \lambda l^2 \quad (22)$$

取 $n_2 = n_1 + 2$, $m_2 = m_1 + 1$, 由式(11)、式(12)、式(17)、式(18)计算临界力参数和动力特征参数, 并将相应结果代入式(22), 可得应力波未反射时弹性直杆前三阶模态临界力参数和动力特征参数的值, 如表 1 所示。

表 1 前三阶模态临界力参数和动力特征参数的值 (应力波未反射)

Table 1 Values of critical-load parameter and dynamic characteristic parameter corresponding to the first three modes for dynamic buckling (Before reflection of compression wave)

约束情况	受载端夹支			受载端简支		
	$n_1=1$	$n_1=2$	$n_1=3$	$m_1=1$	$m_1=2$	$m_1=3$
模态阶数						
临界力参数	$10\pi^2$	$20\pi^2$	$34\pi^2$	$5\pi^2$	$13\pi^2$	$25\pi^2$
动力特征参数	$3\pi^2$	$8\pi^2$	$15\pi^2$	$2\pi^2$	$6\pi^2$	$12\pi^2$

表 1 所得结果与文[7]中用双特征参数法计算所得结果完全相同。说明若所设的屈曲模态不仅满足边界条件, 而且满足文[7]所得波前附加约束条件, 则最优模态法与双特征参数法所得的临界载荷以及相应的动力特征参数的结果是一致的, 即用双特征参数法求解所得屈曲模态就是最优模态。

4 结论

(1) 在考虑应力波作用下直杆的局部动力屈曲

研究中, 设模态函数满足受载端的边界条件和应力波波阵面处的边界条件。采用最优模态法, 对弹性压应力波作用下受载端夹支和简支两种边界条件直杆的动力屈曲问题进行了探讨。研究发现屈曲模态中放大最快的模态所对应的临界力参数和惯性项的指数参数与双特征参数法所得的结果是一致的, 即用双特征参数法求解所得屈曲模态就是最优模态。

(2) 计算结果表明, 最低阶动力屈曲载荷约为相同边界条件下静力屈曲载荷的 2.5 倍, 远高于静力屈曲载荷。这是由于横向惯性的影响造成的, 所以确定动力屈曲载荷时应计及横向惯性。

参考文献:

- [1] Abrahamson G A, Goodier J N. Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33(2): 241—247.
- [2] Takuo Hayashi, Yukio Sano. Dynamic buckling of elastic bars: 2nd Report, The case of high velocity impact [J]. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 1972, 18(88): 1176—1184.
- [3] Air-Gur J, Weller T, Singer J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1982, 18(8): 619—641.
- [4] 滕宁钧, 苏先榭. 半无限长弹性直杆受轴向冲击载荷作用的分叉问题[J]. *力学学报*, 1989, 21(5): 591—595.
Teng Ningjun, Su Xianye. Impact bifurcation of the semi-infinite elastic thin bars [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21(5): 591—595. (in Chinese)
- [5] 韩强, 张善元, 杨桂通. 理想直杆中轴向应力波传播和反射导致的分叉问题[J]. *固体力学学报*, 1998, 19(3): 199—206.
Han Qiang, Zhang Shanyuan, Yang Guitong. The bifurcation problem caused by the propagation of the axial stress wave and its reflection in an ideal column [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 19(3): 199—206. (in Chinese)
- [6] 朱兆祥. 应力波引起的弹性结构屈曲准则[C]. *塑性力学和地球动力学文集*. 北京: 北京大学出版社, 1990: 56—70.
Zhu Zhaoxiang. Criterion of structural elastic buckling caused by stress waves [C]. *Collected Papers on Plasticity and Earth Dynamics*. Beijing: Peking University Press, 1990: 56—70. (in Chinese)
- [7] 王安稳. 弹性压应力波下直杆动力失稳的机理和判据[J]. *力学学报*, 2001, 33(6): 812—820.
Wang Anwen. Mechanism and criterion for dynamic instability of bars under elastic compression wave [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(6): 812—820. (in Chinese)
- [8] 王蕊, 韩志军, 张善元. 两种边界条件直杆的撞击屈曲及其应力波效应[J]. *工程力学*, 2007, 24(11): 7—11.
Wang Rui, Han Zhijun, Zhang Shanyuan. Dynamic buckling of elastic bar with two different boundary conditions and the effect of stress wave [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(11): 7—11. (in Chinese)
- [9] 王礼立, 余同希, 李永池. 冲击动力学进展[M]. 合肥: 中国科学技术出版社, 1992: 157—176.
Wang Lili, Yu Tongxi, Li Yongchi. *Advances in impulse dynamics* [M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 1992: 157—176. (in Chinese)
- [10] Lindberg H E, Florence A L. Dynamic pulse buckling: Theory and experiment [M]. Washington: Defence Nuclear Agency, 1983: 1—5.