文章编号:1007-2985(2013)01-0014-02

Sierpinski 垫上某类柯西变换的解析性*

李红光

(怀化学院数学系,湖南 怀化　418008)

摘　要:利用儒歇定理证明了一类新函数 $G(z)=\int_K(1-zw)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$ 在 $|z|<1$ 内没有零点,$\frac{1}{G(z)}$ 在 $|z|<1$ 内解析,其中 K 为 Sierpinski 垫.

关键词:解析;Hausdorff 测度;Sierpinski 垫

中图分类号:O174.12　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007-2985.2013.01.004

1　问题的提出

近年来,文献[1-3]中讨论了自相似测度柯西变换 $F(z)=\int_K(z-w)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$ 在 $|z|>1$ 内的罗朗系数及矩 $\int_K|w|^n\mathrm{d}\mu(w)$ 的估计,后者在物理领域内有较为广泛的应用.

假设 $\{S_j\}_{j=0}^2$ 是由压缩映射

$$S_j(z)=\varepsilon_j+\rho(z-\varepsilon_j)\tag{1}$$

组成的迭代函数系(IFS),ρ 为压缩比,且满足 $0<\rho<\frac{1}{2}$,$\varepsilon_j=\mathrm{e}^{\frac{2\pi ji}{3}}$.

由文献[1]中性质 5.1 可知,$\{S_j\}_{j=0}^2$ 满足开集条件[4].由文献[2]中 Hutchinson 定理可知,存在一个非空紧集 K 满足 $K=\bigcup_{j=0}^2 S_jK$.现称 K 为满足 $\{S_j\}_{j=0}^2$ 的吸引子,K 正好是 Sierpinski 垫[4].由文献[3]中定理 9.3 可知,K 的 Hausdorff 维数为 $\alpha=\log_2 3$.笔者考虑 K 上的正规化 Hausdorff 测度 μ,根据文献[1],它满足自相似恒等式 $\mu=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^2\mu\circ S_j^{-1}$.$G(z)=\int_K(1-zw)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$ 被称为 μ 的柯西变换.

2　柯西变换的解析性

引理 1　设 $G(z)=\int_K(1-zw)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$,其中 K 为 Sierpinski 垫,$G(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,有泰勒展式 $G(z)=\sum_{k=0}^\infty a_{3k}z^{3k}$,其中 $a_{3k}=3\int_{S_0K}w^{3k}\mathrm{d}\mu(w)$,则有 $a_{3k}>0$.

证明　设 $G(z)=\int_K(1-zw)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$,其中 K 为 Sierpinski 垫.由 $G(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,则在 $|z|<1$ 内有泰勒展开

$$G(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n,a_n=\int_K w^n\mathrm{d}\mu(w).\tag{2}$$

由(2)式和 μ 的旋转不变性,有

$$a_n=\left(\int_{S_0K}+\int_{S_1K}+\int_{S_2K}\right)w^n\mathrm{d}\mu(w)=(1+\varepsilon_1^n+\varepsilon_1^{2n})\int_{S_0K}w^n\mathrm{d}\mu(w).\tag{3}$$

* **收稿日期**:2012-11-12

基金项目:湖南省教育厅资助项目(11B095)

作者简介:李红光(1979-),男,湖南新宁人,怀化学院数学系讲师,主要从事函数论研究.

当 $n=3k$ 时，$a_n=3\int_{S_0K}w^{3k}\mathrm{d}\mu(w)$，当 $n\neq 3k$ 时，$a_n=0$. 由文献[1] 中定理 5.2 知，$a_{3k}=3\int_{S_0K}w^{3k}\mathrm{d}\mu(w)>0$.

引理 2　设 $\alpha=\log_2 3\approx 1.584\ 96$，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^{\alpha}}<\frac{1}{1.732}$.

证明　设 $f(x)=x^{-\frac{3}{2}}$，显然 $f(x)$ 为$[1,\infty)$ 上非负递减函数，因此有

$$n^{-\frac{3}{2}}\leqslant\int_{n-1}^{n}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\leqslant(n-1)^{-\frac{3}{2}}\qquad n=2,3,\cdots,$$

依次相加可得

$$\sum_{n=2}^{m}n^{-\frac{3}{2}}\leqslant\int_{1}^{m}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{m}(n-1)^{-\frac{3}{2}}\qquad n=2,3,\cdots.\tag{4}$$

由(4) 式左边，对任何正整数 m，有

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}n^{-\frac{3}{2}}\leqslant 1+\int_{1}^{m}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\leqslant 1+\int_{1}^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x,$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^{\alpha}}<\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)^{-\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\int_{1}^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\times 3=\frac{1}{1.732}.$$

定理 1　设$\{S_j\}_{j=0}^{2}$ 由(1) 式定义，其中 $0<\rho<\frac{1}{2}$ 和 $\alpha=\log_2 3$，又设 $G(z)=\int_K(1-zw)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$，$K$ 为 Sierpinski 垫，则 $G(z)$ 在 $|z|<1$ 内没有零点，$\frac{1}{G(z)}$ 在 $|z|<1$ 内解析.

证明　由 $G(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，则在 $|z|<1$ 内有泰勒展开 $F(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$，$a_n=\int_K w^n\mathrm{d}\mu(w)$. 由(3) 式的结果，有 $F(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{3k}z^{3k}$，$a_{3k}=3\int_{S_0K}w^{3k}\mathrm{d}\mu(w)$.

令 $f(z)=1$ 和 $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{3k}z^{3k}$，在 $|z|=1$ 上，由引理 1 有

$$|g(z)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{3k}z^{3k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_{3k}.\tag{5}$$

由文献[1] 中定理 5.6，有

$$(3k+1)^{-\alpha}\times 1.426\ 68\leqslant a_{3k}\leqslant(3k+1)^{-\alpha}\times 1.426\ 76\qquad k=1,2,\cdots.\tag{6}$$

由(5)，(6) 式和引理 2，有 $|g(z)|<\frac{1}{1.732}\times 1.426\ 76<1$.

因此在 $|z|=1$ 上，有 $|f(z)|-|g(z)|>0$，由儒歇定理知 $G(z)$ 在 $|z|<1$ 内没有零点. 同时，由上面的结论可得 $\frac{1}{G(z)}$ 在 $|z|<1$ 内解析.

参考文献：

[1]　DONG X H，LAU K S. Cauchy Transforms of Self-Similar Measures：The Laurent Coefficients [J]. Funct. Anal.，2003，202：67－97.

[2]　HUTCHINSON J. Fractals and Self-Similarity [J]. Indiana Univ. Math.，1981，30：713－747.

[3]　FALCONER K J. Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications [M]. New York：John Wiley & Sons，1990：54－65.

[4]　肯尼思·法尔科内. 分形几何——数学基础及其应用[M]. 沈阳：东北大学出版社，1991：65－75.

Analytic Behavior of Certain Cauchy Transforms on Sierpinski Gasket

LI Hong-guang

(Department of Mathematics，Huaihua College，Huaihua 410008，Hunan China)

Abstract：It is proved that a new function $G(z)=\int_K(1-zw)^{-1}\mathrm{d}\mu(w)$ has no zero points in $|z|<1$ and $\frac{1}{G(z)}$ is analytic in $|z|<1$ by Rouché's theorem，where K is Sierpinski Gasket.

Key words：analytic；Hausdorff measure；Sierpinski gasket

（责任编辑　向阳洁）