第 34 卷 第 2 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 34 No. 2
2013 年 3 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Mar. 2013

文章编号:1007-2985(2013)02-0022-04

关于正定 Hermite 矩阵迹的不等式*

宋 园[1,2],周其生[1]

(1. 安庆师范学院数学与计算科学学院,安徽 安庆 246133;2. 滁州职业技术学院,安徽 滁州 239000)

摘 要:研究了正定 Hermite 矩阵迹不等式的问题,在 2 个已知实数不等式的基础上,利用 Neumann 不等式,得到了 2 个正定 Hermite 矩阵迹的不等式.

关键词:不等式;正定 Hermite 矩阵;迹

中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1007-2985.2013.02.005

矩阵不等式的研究在现代数学中发挥着重要的作用.矩阵的迹是矩阵重要的数字特征,在实际问题(如滤波、随机控制以及计量经济学等)中有广泛的应用.关于矩阵迹的不等式也不断地有新的成果出现.关于正数的不等式,能推广到矩阵的非常少,如:对于任意 2 个实数 a,b 有 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$,而任意 2 个半正定 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2 \geqslant 2\boldsymbol{AB}$ 一般不成立,重要原因是矩阵的乘法不具有交换性;又对 2 个半正定 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,一般也不能由 $\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{B}$ 推出 $\boldsymbol{A}^2 \geqslant \boldsymbol{B}^2$.不过,对于矩阵的迹,情况要好得多,这也是人们对研究矩阵迹不等式感兴趣的另一个原因.

1 问题的提出

最近文献[1-2]分别研究了将某些实数不等式推广为矩阵迹和范数的不等式,其中 2 个不等式如下:

定理 A[1] 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 正定 Hermite 矩阵,则 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{-1}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^2 \geqslant \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}$,当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时不等式取等号.

定理 B[2] 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 阶正定 Hermite 矩阵,则

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^n+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^n \geqslant \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{n-k}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{n-k}\boldsymbol{B}^k \qquad 1\leqslant k\leqslant n-1,$$

当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时不等式等号成立.

上述 2 个矩阵迹不等式是针对一对正定 Hermite 矩阵给出的,笔者进一步研究上述不等式,将它推广到 n 个矩阵的情形.

2 相关定义和引理

定义 1[3] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n\times n$ 复方阵,称它的对角元素之和为 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵迹,记为 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$,即 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则

* **收稿日期**:2012-10-19

基金项目:安徽省高校省级自然科学基金项目(KJ2012Z300)

作者简介:宋 园(1982-),女,安徽滁州人,滁州职业技术学院助讲,在职硕士研究生,主要从事矩阵理论研究.

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k.$$

注 1　矩阵迹满足线性性，即 $\mathrm{tr}(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})=\alpha\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}+\beta\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}$.

引理 1[4]**(Neumann 不等式)**　设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶 Hermite 阵，它们的特征值分别为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 和 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_{n-i+1}\leqslant\mathrm{tr}\,\boldsymbol{AB}\leqslant\sum_{i=}^{n}\lambda_i\mu_i.\tag{1}$$

(1) 式左边等式成立 $\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{n}\mu_{n-i+1}\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^*$，右边等式成立 $\Leftrightarrow\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^*$，$\boldsymbol{\varphi}_1,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的某一组标准正交化特征向量.

引理 2[1]　已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，则 $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}\geqslant a+b$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

引理 3[2]　设 $a>0,b>0$，则有 $a^n+b^n\geqslant a^kb^{n-k}+a^{n-k}b^k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 成立，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

引理 4[5]**(young 不等式)**　设 $a>0,b>0,p,q>1$，则有 $ab\leqslant\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$ 成立，当且仅当 $a^p=b^q$ 时等号成立.

3　主要结果及证明

引理 2 推广到多个实数的情形也是成立的，于是得到下面的引理：

引理 5　已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，则有 $\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{x_n}+\dfrac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

文献[1]将实数不等式 $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}\geqslant a+b$ 推广到矩阵中，得到 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^{-1}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^2\geqslant\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}$. 由此笔者进一步也将引理 5 这个结论推广到矩阵中得到如下结果：

定理 1　设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 为 n 个 $m\times m$ 正定 Hermite 矩阵，则

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^2+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_3^{-1}\boldsymbol{A}_2^2+\cdots+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_{n-1}^2\boldsymbol{A}_n^{-1}+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_n^2\boldsymbol{A}_1^{-1}\geqslant\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_2+\cdots+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_n,\tag{2}$$

当且仅当 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\cdots=\boldsymbol{A}_n$ 时取等号.

证明　令 $\boldsymbol{A}_k$ 的特征值是 $\lambda_1(\boldsymbol{A}_k)\geqslant\lambda_2(\boldsymbol{A}_k)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m(\boldsymbol{A}_k)>0,k=1,2,\cdots,n$，则 $\boldsymbol{A}_k^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_m^{-1}(\boldsymbol{A}_k)\geqslant\lambda_{m-1}^{-1}(\boldsymbol{A}_k)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_1^{-1}(\boldsymbol{A}_k)>0,k=1,2,\cdots,n$.

当 $\boldsymbol{A}\geqslant0$ 时，若 $\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^*$，则 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^*$，$\boldsymbol{A}^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^*$.

由引理 1 知，

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(\boldsymbol{A}_1)\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_2),\text{等号成立}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_2^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_1),\tag{3}$$

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_3^{-1}\boldsymbol{A}_2^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(\boldsymbol{A}_2)\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_3),\text{等号成立}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_3^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_3)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_2),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(\boldsymbol{A}_{n-1})\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_n),\text{等号成立}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_n^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_{n-1})\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_{n-1}),$$

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_n^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(\boldsymbol{A}_n)\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_1),\text{等号成立}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_1^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_n),$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_j)$ 为 $\boldsymbol{A}_j$ 对应于 $\lambda_i(\boldsymbol{A}_j)$ 的某一组标准正交化特征向量($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$).

将以上各不等式两边分别相加，并应用由引理 5，可得

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^2+\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_3^{-1}\boldsymbol{A}_2^2+\cdots+\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_{m-1}^2\boldsymbol{A}_m^{-1}+\operatorname{tr} \boldsymbol{A}_m^2\boldsymbol{A}_1^{-1}\geqslant \sum_{i=1}^m\lambda_i^2(\boldsymbol{A}_1)\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_2)+\cdots+\sum_{i=1}^m\lambda_i^2(\boldsymbol{A}_n)\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A}_1)\geqslant \sum_{i=1}^m\lambda_i(\boldsymbol{A}_1)+\cdots+\sum_{i=1}^m\lambda_i(\boldsymbol{A}_n)=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_1+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_2+\cdots+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_n. \tag{4}$$

又由引理 5,(4) 式第 2 个不等式等号成立当且仅当 $\lambda_i(\boldsymbol{A}_1)=\lambda_i(\boldsymbol{A}_2)=\cdots=\lambda_i(\boldsymbol{A}_n)$,$i=1,2,\cdots,m$. 再由(3) 式即得 $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\boldsymbol{A}_1^{-1}$,从而 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1$. 依次推得 $\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_n$. 因此,(2) 式当且仅当 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\cdots=\boldsymbol{A}_m$ 时取等号. 证毕.

引理 3 推广到多个实数的情形也是成立的,于是得到如下引理:

引理 6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$,则有 $a_1^ka_2^{n-k}+a_2^ka_3^{n-k}+\cdots+a_n^ka_1^{n-k}\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n$,$1\leqslant k\leqslant n-1$,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 等号成立.

证明 用引理 4 可得

$$a_1^ka_2^{n-k}\leqslant\frac{k}{n}a_1^n+\frac{n-k}{n}a_2^n,\cdots,a_n^ka_1^{n-k}\leqslant\frac{k}{n}a_n^n+\frac{n-k}{n}a_1^n,$$

所以

$$a_1^ka_2^{n-k}+a_2^na_3^{n-k}+\cdots+a_n^ka_1^{n-k}\leqslant\frac{k}{n}a_1^n+\frac{n-k}{n}a_2^n+\frac{k}{n}a_2^n+\frac{n-k}{n}a_3^n+\cdots+\frac{n-k}{n}a_1^n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n,$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

文献[2] 将 $a^n+b^n\geqslant a^kb^{n-k}+a^{n-k}b^k$ 推广到矩阵中得到迹的不等式 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^n+\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^n\geqslant\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^{n-k}+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{n-k}\boldsymbol{B}^k$,进一步,将引理 6 推广到矩阵中得到如下结果:

定理 2 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 为 n 个 $m\times m$ 正定 Hermite 矩阵,则

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_1^k\boldsymbol{A}_2^{n-k}+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_2^k\boldsymbol{A}_3^{n-k}+\cdots+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_n^k\boldsymbol{A}_1^{n-k}\leqslant\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_1^n+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_2^n+\cdots+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_n^n, \tag{5}$$

当且仅当 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\cdots=\boldsymbol{A}_n$ 时取等号($1\leqslant k\leqslant n-1$).

证明 因为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 为正定 Hermite 阵,所以 $\boldsymbol{A}_1^n,\boldsymbol{A}_2^n,\cdots,\boldsymbol{A}_n^n$ 也为正定 Hermite 阵. 设 $\boldsymbol{A}_i$ 的特征值为 $\lambda_j(\boldsymbol{A}_i)$($i=1,2,\cdots n$;$j=1,2,\cdots,m$),并设 $\boldsymbol{\varphi}_j(\boldsymbol{A}_i)$($i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$)为 $\boldsymbol{A}_i$ 的对应于 $\lambda_j(\boldsymbol{A}_i)$ 的某一组标准正交特征向量. 由引理 1 和引理 6 得,

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_1^k\boldsymbol{A}_2^{n-k}+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_2^n\boldsymbol{A}_3^{n-k}+\cdots+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_n^k\boldsymbol{A}_1^{n-k}\overset{(6)}{\leqslant}\sum_{j=1}^m\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_1)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_2)+\sum_{j=1}^m\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_2)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_3)+\cdots+\sum_{j=1}^m\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_n)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_1)=\sum_{j=1}^m(\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_1)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_2)+\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_2)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_3)+\cdots+\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_n)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_1))\overset{(7)}{\leqslant}\sum_{j=1}^m(\lambda_j^n(\boldsymbol{A}_1)+\lambda_j^n(\boldsymbol{A}_2)+\cdots+\lambda_j^n(\boldsymbol{A}_n))=\sum_{j=1}^m\lambda_j^n(\boldsymbol{A}_1)+\sum_{j=1}^m\lambda_j^n(\boldsymbol{A}_2)+\cdots+\sum_{j=1}^m\lambda_j^n(\boldsymbol{A}_n)=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_1^n+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_2^n+\cdots+\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_n^n.$$

下面讨论等号成立的充分必要条件.

由引理 1,$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_1^k\boldsymbol{A}_2^{n-k}\leqslant\sum_{i=1}^m\lambda_i^k(\boldsymbol{A}_1)\lambda_i^{n-k}(\boldsymbol{A}_2)$,等号成立 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_2^{n-k}=\sum_{i=1}^m\lambda_i^{n-k}(\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_1)\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_2=\sum_{i=1}^m\lambda_i(\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_1)$,$\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_1)$($i=1,2,\cdots,m$)为 $\boldsymbol{A}_1$ 的某一组标准正交特征向量.

$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_2^k\boldsymbol{A}_3^{n-k}\leqslant\sum_{j=1}^m\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_2)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_3)$ 等号成立 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_2^k=\sum_{i=1}^m\lambda_i^k(\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_3)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_3)\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_2=\sum_{i=1}^m\lambda_i(\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_3)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_3)$,$\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_2)$($i=1,2,\cdots,m$)为 $\boldsymbol{A}_2$ 的某一组标准正交特征向量.

……

$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_n^k\boldsymbol{A}_1^{n-k}\leqslant\sum_{j=1}^m\lambda_j^k(\boldsymbol{A}_n)\lambda_j^{n-k}(\boldsymbol{A}_1)$ 等号成立 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_1^{n-k}=\sum_{i=1}^m\lambda_i^k(\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_n)\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_1=\sum_{i=1}^m\lambda_i(\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{\varphi}_i^*(\boldsymbol{A}_n)$,$\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{A}_2)$($i=1,2,\cdots,m$)为 $\boldsymbol{A}_n$ 的某一组标准正交特征向量.

(6) 式成立等号当且仅当以上各充要条件均成立. 而从引理 6 可知,(7) 式成立等号当且仅当 $\lambda_i(\boldsymbol{A}_1)=$

$\lambda_i(\boldsymbol{A}_2)=\cdots=\lambda_i(\boldsymbol{A}_n)$，$i=1,2,\cdots,m$，再结合以上各充要条件得(5)式等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\cdots=\boldsymbol{A}_n$. 证毕.

3　结语

在 2 个实数不等式的基础上，将它推广到矩阵的迹的不等式中. 进一步的工作是能否将这些实数不等式推广到矩阵的范数、矩阵的奇异值、矩阵的特征值中.

参考文献：

[1]　魏　禹，桂　楚，周其生. 一个实数不等式在矩阵论中的推广 [J]. 安庆师范学院学报，2011(4)：101－103.

[2]　胡　汭，周其生. 关于正定矩阵幂的乘积的一些不等式 [J]. 安庆师范学院学报，2012(2)：44－46.

[3]　王松桂，吴密霞，贾忠贞. 矩阵不等式 [M]. 第 2 版. 北京：科学出版社，2006：129.

[4]　BHATIA R. Matrix Analysis [M]. New York：Springer，1997.

[5]　匡继昌. 常用不等式 [M]. 第 3 版. 济南：山东科学技术出版社，2004：393.

[6]　FENG Tian-xiang，LIU Hong-xia. Several Results on the Trace of Hermite Positive Definite Symmetric Matrix [J]. 数学杂志，2012(2)：263－268.

[7]　WANG Bo-ying，ZHANG Fu-zhen. Trace and Eigenvalue Inequalities for Ordinary and Hadamard Products of Positive Semidefinite Hermitian Matrices [J]. SIAM Matrix Anal. Appl.，1995，16：1 173－1 183.

[8]　张　瑞，周其生. 关于 Hermite 矩阵迹的不等式的几点注记 [J]. 安庆师范学院学报，2011(4)：1－3.

Two Notes on the Inequalities of Positive Definite Hermite Matrix Trace

SONG yuan[1,2]，ZHOU Qi-sheng[1]

(1. School of Mathematics and Computational Science，Anqing Teachers' College，Anqing 246133，Anhui China；
2. Chuzhou Vacational and Technical College，Chuzhou 239000，Anhui China)

Abstract：In this paper，we study the ineqeality's problem for the trace of positive definite Hermite matrix. Based on two results of real inequalities，together with Neumann inequality，two inequalities of positive definite Hermite matrix trace are obtained.

Key words：inequality；positive definite Hermite matrix；trace

（责任编辑　向阳洁）