

文章编号: 1000-4750(2013)01-0470-11

# 各柱做不同辐射运动时截头圆柱群的水动力分析

曾晓辉, 梁荣娣

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

**摘 要:** 截头圆柱群是许多海洋浮式结构的主要组成部分。目前对这种圆柱群进行的水动力分析大多考虑将其作为一个整体, 此时各柱间无相对位置变化, 这并不适用于柱间有相对运动的情况。为此, 采用特征展开法研究各柱做不同辐射运动时截头直立圆柱群的水动力相互作用。开展了截头圆柱群中各柱做不同幅值纵荡、横荡和垂荡运动时的波浪辐射分析, 并求得流场速度势。在进行算例考核之后, 进一步计算了多个圆柱同时做不同模态、不同幅值运动时截头柱群的水动力、压力分布等量, 并对结果进行了分析。

**关键词:** 截头圆柱群; 相对运动; 辐射; 水动力相互作用; 水波

中图分类号: P751; O352 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2011.06.0370

## THE HYDRODYNAMIC ANALYSIS FOR ARRAYS OF TRUNCATED CIRCULAR CYLINDERS PERFORMING DIFFERENT RADIATION MOTIONS

ZENG Xiao-hui, LIANG Rong-di

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Arrays of truncated circular cylinders are the main components of many offshore floating structures. Most analyses on the hydrodynamic interactions among cylinders for such cylinder groups usually considered the instance that cylinder arrays react to loads as one whole body, namely that there is no relative position variations between each cylinder of the arrays. Such analysis is not applicable for the case that there are relative motions among cylinders. Then the method of eigenfunction expansion was used to study the hydrodynamic interactions among truncated circular cylinders. The radiation and diffraction by truncated cylinders in which each cylinder performing surge, sway and heave motions with different amplitudes are analyzed. The velocity potential is obtained. After degenerate case comparisons, hydrodynamic forces and pressure distributions are calculated for more complicated cases, in which multi-cylinders perform different mode oscillations with different amplitudes simultaneously.

**Key words:** truncated cylinder arrays; relative motion; radiation; hydrodynamic interactions; water wave

社会文明的进步和世界经济的发展促使人类向海洋拓展生存空间、寻求可再生能源<sup>[1]</sup>。深海平台(TLP、SEMI)<sup>[2]</sup>、超大型浮体(VLFS)<sup>[3]</sup>和波浪发电装置是人类发展出的几类新型海洋浮式结构物。这几类海工结构物的共同特点是其水面浮体部分主要由直立圆柱群组成, 当其柱体长度没入水中不深时, 可将其视为截头圆柱群。

圆柱群可以分为柱间无相对运动和有相对运动两种。对于 TLP、SEMI 来说, 圆柱群中各圆柱间有较刚硬的连接, 它们在波浪作用下作为一个整体进行运动, 各圆柱之间没有相对位置变化(即无相对运动)。而对于振子式波浪发电装置和超大浮体来说, 由于各圆柱之间或者没有刚性约束或者约束较弱, 各圆柱之间存在相对运动。

收稿日期: 2011-06-20; 修改日期: 2011-09-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072246, 10702073); 国家 863 计划项目(2006AA09Z350)

通讯作者: 曾晓辉(1972—), 男, 湖南新化人, 副研究员, 博士, 主要从事深海平台水动力和动力响应研究(E-mail: zxh@imech.ac.cn).

作者简介: 梁荣娣(1985—), 女, 天津人, 硕士生, 主要从事深海平台水动力和动力响应研究(E-mail: liangrongdi@imech.ac.cn).

对于圆柱体这类规则结构物在波浪作用下的水动力问题,已有学者提出了基于特征函数展开的解析方法。Garrett<sup>[4]</sup>运用内外域匹配的思想,采用特征展开的方法讨论了单个截头圆柱的解析解。滕斌、李玉成、董国海<sup>[5]</sup>应用边界元方法研究了圆柱的三阶波浪力。对于由多个截头圆柱组成的圆柱群来说,因为波浪在圆柱间会发生复杂的多次绕射,进而影响圆柱群的响应,因此问题显得比单个圆柱更为复杂。一些研究采用了大间距假设,忽略了快速衰减的局部波。Williams<sup>[6-7]</sup>等人应用改进平面波法求解了截头柱群的线性绕射和辐射问题。此外还有一些学者未作简化,发展出了精确的相互作用理论。Kagemoto 和 Yue<sup>[8]</sup>结合直接矩阵法和多次散射法,得到了线性波浪理论下的任意截面直立柱群波浪势的精确代数解法。Yilmaz<sup>[9]</sup>应用 Kagemoto 的精确代数法计算了截头圆柱群的绕射辐射问题。此后, Yilmaz<sup>[10]</sup>等人又将此方法与实验数据做了对比,并应用到了实际的平台计算。Duclos<sup>[11]</sup>分析了不规则分布的坐底柱群绕射问题。Walker 和 Eatock Taylor<sup>[12-13]</sup>研究了入射波为新波(NewWave)的圆柱群绕射问题,并分析了带沉箱坐底圆柱群的绕射。Siddorn 和 Eatock Taylor<sup>[14]</sup>以浮于水面的振子式波浪发电单元为背景,用解析方法分析了给定一个圆柱振幅时,柱间相对运动圆柱群的辐射问题。值得注意的是:除文献[14]外,目前的研究多是将圆柱群作为一个整体,因此所研究的对象实际上大多是柱间无相对运动圆柱群,对于柱间有相对运动圆柱群的问题还值得深入探讨。而文献 Siddorn 仅分析了某个柱做给定单一运动模态时圆柱群的辐射问题。

比单个柱做单一运动模态的情况更复杂且更有可能在实际中遇到的是,截头圆柱群中各圆柱会同时做多种模态的运动,目前对这种情况尚缺乏深入研究。为此,本文研究了多个截头圆柱同时做不同模态、不同幅值和不同方向运动时截头圆柱群的水动力问题,给出了解析分析方法,进而计算了圆柱群的速度势、水动力等量。

### 1 各柱做不同纵荡、横荡和垂荡时的速度势

本小节研究柱间有相对运动截头柱群的辐射问题。此时圆柱群中各截头圆柱可以同时进行不同模态、不同幅值和不同方向的运动,本文中主要考

虑纵荡、横荡和垂荡三种运动模态。截头柱如图 1 所示,圆柱半径为  $a_i$ , 深度为  $d$ , 吃水为  $h$ 。截头柱分为内域和外域。

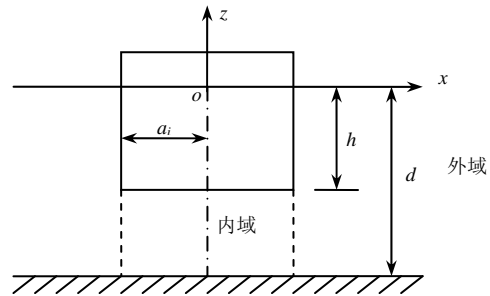


图 1 截头柱的示意图

Fig.1 Single truncated circular cylinder

圆柱群由  $N$  个铅直的截头圆柱组成,如图 2 所示,取  $xOy$  为总体坐标系, $xOy$  平面位于静水面上, $Oz$  轴铅直向上。各柱体的圆心  $O_i$  在总体坐标系下的坐标为  $(r_i, \theta_i)$ , 各圆柱半径为  $a_i, i=1, \dots, N, N$  个原点在圆心  $O_i$  的局部极坐标系为  $O_i r_i \theta_i z$ 。于是,第  $j$  个柱体中心  $O_j$  在第  $i$  柱局部柱坐标系中的坐标可记为  $(R_{ij}, \alpha_{ij}, z)$ , 其中,  $i, j=1, \dots, N$ 。

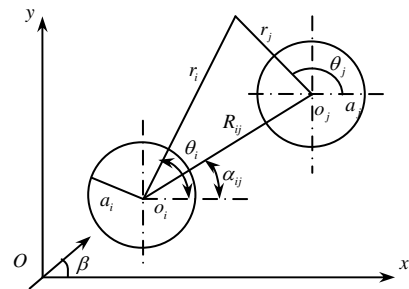


图 2 坐标系示意图

Fig.2 Sketch of coordinate systems

设流体为无粘、不可压缩的理想流体,运动无旋,可采用势流理论,波陡和浮体运动足够小,考虑线性稳态问题。此时速度势和位移等物理量均为频率是  $\omega_0$  的简谐函数,可以分离出时间因子  $e^{-i\omega_0 t}$ 。则流场中总速度势  $\Phi_{RD}$  可写为:

$$\Phi_{RD}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\varphi_{RD}(x, y, z)e^{-i\omega_0 t}\} \quad (1)$$

考虑到圆柱群中各柱体间的水动力相互作用,速度势  $\varphi_{RD}$  可分解为两部分:一部分为柱群中各个单柱做微幅振动所产生的辐射势;另一部分是由该柱之外其他柱体发射出来的波浪在该柱周围产生的绕射势。于是,做给定独立运动圆柱群的总波浪速度势  $\varphi_{RD}$  可表示成为上述辐射势和绕射势之和:

$$\varphi_{RD} = \varphi_R + \varphi_{D1} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{s=1}^3 \varphi_{R_s}^i + \varphi_{D1}^i \right) \quad (2)$$

对于截头柱群来说, 本文考虑辐射问题包括纵荡、横荡和垂荡三个模态的运动, 分别用  $s=1, 2, 3$  来表示。  $\varphi_{R_s}^i$  为圆柱  $i$  做第  $s$  个运动模态微幅振动所产生的辐射势,  $\varphi_{D1}^i$  为其他柱发射出来的波作用于  $i$  柱后产生的绕射势,  $\varphi_R$  为总辐射势,  $\varphi_{D1}$  为总绕射势。

设柱群中第  $i$  个柱体在平衡位置作圆频率为  $\omega_0$  的微幅简谐振动, 则瞬时位移为:

$$\Xi_s^i(t) = \text{Re}\{\zeta_s^i e^{-i\omega_0 t}\} \quad (3)$$

$\zeta_s^i$  表示  $i$  柱体在第  $s$  个运动模态下的振动幅值。

相应的振动速度为:

$$\dot{\Xi}_s^i(t) = \text{Re}\{-i\omega_0 \zeta_s^i e^{-i\omega_0 t}\} \quad (4)$$

$i$  柱体在第  $s$  个运动模态下以  $\zeta_s^i$  为振幅做独立运动时, 可将  $i$  柱体在第  $s$  个运动模态下的辐射势设为:

$$\Phi_{R_s}^i(x, y, z, t) = \text{Re}\{\varphi_{R_s}^i(x, y, z) e^{-i\omega_0 t}\} \quad (5)$$

辐射势应满足的物面条件为:

$$\frac{\partial \Phi_{R_s}^i}{\partial r_i} = \dot{\Xi}_s^i(t) \cdot r_{is} \quad (6)$$

其中,  $r_{is}$  为  $i$  圆柱单位外法向矢量分量。

对于辐射问题考虑纵荡、横荡运动, 外域速度势  $\varphi_{R_{s-E}}^i$  和内域速度势  $\varphi_{R_{s-C}}^i$ , 内外域速度势分别需要满足各自的拉普拉斯方程和海底、自由面、物面、无穷远处边界条件, 如下:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_{R_{s-E}}^i = 0 \\ \frac{\partial \varphi_{R_{s-E}}^i}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \varphi_{R_{s-E}}^i, & z = 0, a_i < r_i < \infty \\ \frac{\partial \varphi_{R_{s-E}}^i}{\partial z} = 0, & z = -d, a_i < r_i < \infty \\ \frac{\partial \varphi_{R_{s-E}}^i}{\partial r} = v_s^i r_{is}, & r_i = a_i, -h < z < 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \varphi_{R_{s-E}}^i}{\partial r} - ik \varphi_{R_{s-E}}^i \right) = 0, & \text{无穷远条件} \\ \nabla^2 \varphi_{R_{s-C}}^i = 0 \\ \frac{\partial \varphi_{R_{s-C}}^i}{\partial z} = 0, & z = -h, 0 \leq r_i \leq a_i \\ \frac{\partial \varphi_{R_{s-C}}^i}{\partial z} = 0, & z = -d, 0 \leq r_i \leq a_i \end{cases} \quad (7)$$

对于垂荡运动, 式(7)中相应的物面条件变为下式所示:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{R_{s-E}}^i}{\partial r} = 0, & r_i = a_i, -h < z < 0 \\ \frac{\partial \varphi_{R_{s-C}}^i}{\partial z} = -v_s^i r_{i3}, & z = -h, 0 \leq r_i \leq a_i \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $v_s^i = -i\omega_0 \zeta_s^i$  为  $i$  柱体物面上在第  $s$  个运动模态方向上的速度。

第  $i$  柱作第  $s$  个辐射运动模态时, 外域产生的辐射势  $\varphi_{R_{s-E}}^i$  为:

$$\varphi_{R_{s-E}}^i = -i\omega_0 \zeta_s^i \sum_{m=-\infty}^{\infty} [R_{0ms}^i Y_0(z) H_m(k_0 r_i) + \sum_{n=1}^{\infty} R_{nms}^i Y_n(z) K_m(k_n r_i)] e^{im\theta} \quad (9)$$

其中:  $H_m = J_m + iY_m$  为第一类 Hankel 函数,  $J_m$  和  $Y_m$  分别为第一类和第二类 Bessel 函数;  $K_m$  为第一类修正的 Bessel 函数; 波数  $k_0$ 、 $k_n$  是分别满足下列色散方程的正特征根,  $n$  为特征模态:

$$\begin{cases} k_0 \tanh(k_0 d) = \omega_0^2 / g \\ k_n \tan(k_n d) = -\omega_0^2 / g \end{cases} \quad (10)$$

式(9)中,  $Y_0(z)$  和  $Y_n(z)$  变量  $z$  的特征函数为:

$$\begin{cases} Y_0(z) = f_0(z) = \frac{\cosh(k_0(z+d))}{\cosh(k_0 d)}, & n = 0 \\ Y_n(z) = f_n(z) \cos(k_n d) = \cos(k_n(z+d)), & n \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $R_{0ms}^i$  与  $R_{nms}^i$  为截头单柱纵荡、横荡和垂荡运动模态下的辐射特征。

当截头单柱的辐射运动为纵荡和横荡模态时,

$R_{0ms}^i$  与  $R_{nms}^i$  如下:

$$\begin{cases} R_{0ms}^i = r_s^m \cdot \frac{D_{R0} \cosh(k_0 d)}{H'_m(k_0 a_i) N_0^{1/2}}, & m = \pm 1, n = 0 \\ R_{nms}^i = r_s^m \cdot \frac{D_{Rn}}{K'_m(k_n a_i) N_n^{1/2}}, & m = \pm 1, n > 0 \end{cases} \quad (12)$$

当截头单柱的辐射运动为垂荡模态时,  $R_{0ms}^i$  与

$R_{nms}^i$  如下:

$$\begin{cases} R_{0ms}^i = -r_s^m \cdot \frac{D_{Rh0} \cosh(k_0 d)}{H'_0(k_0 a) N_0^{1/2}}, & m = 0, n = 0 \\ R_{nms}^i = -r_s^m \cdot \frac{D_{Rhn}}{K'_0(k_n a) N_n^{1/2}}, & m = 0, n > 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中, 式(12)和式(13)中的系数  $D_{Rn}$  和  $D_{Rhn}$  参见

附录。式(12)和式(13)中:  $N_0 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sinh(2k_0 d)}{2k_0 d} \right)$ ,

$$N_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin(2k_n d)}{2k_n d} \right)。$$

若式(9)用矩阵形式表示, 则有:

$$\varphi_{R_{s-E}}^i = -i\omega_0 \zeta_s^i \mathbf{R}_{is}^T \boldsymbol{\psi}_i^{D-E} = -i\omega_0 \zeta_s^i \mathbf{R}_{is}^T \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I \quad (14)$$

式(14)中,  $\mathbf{R}_{is}$  是含有  $n_0(2m_0+1)$  个元素的列向量,  $m_0$  和  $n_0$  是  $m$  和  $n$  的截断项数,  $\mathbf{R}_{is}$  中各元素为  $\mathbf{R}_{is}(0, m) = R_{0ms}^i$ ,  $\mathbf{R}_{is}(n, m) = R_{nms}^i$ 。  $\boldsymbol{\psi}_i^{D-E}$  是含有  $n_0(2m_0+1)$  个元素的列向量, 表示外域组份波:

$$\begin{cases} n=0: & \boldsymbol{\psi}_i^{D-E}(0, m) = Y_0(z) H_m(k_0 r_i) e^{im\theta_i} \\ n \geq 1: & \boldsymbol{\psi}_i^{D-E}(n, m) = Y_n(z) K_m(k_n r_i) e^{im\theta_i} \end{cases} \quad (15)$$

这时式(15)应用 Bessel 函数的加法公式 (Abramowitz 和 Stegun 1964), 可得:

$$\begin{cases} n=0: & \boldsymbol{\psi}_i^{D-E}(0, m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{m-l}(k_0 R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(m-l)} \cdot \\ & Y_0(z) J_l(k_0 r_j) e^{il\theta_j} \\ n \geq 1: & \boldsymbol{\psi}_i^{D-E}(n, m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} K_{m-l}(k_n R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(m-l)} (-1)^l \cdot \\ & Y_n(z) I_l(k_n r_j) e^{il\theta_j} \end{cases} \quad (16)$$

用矩阵形式表示, 有:

$$\boldsymbol{\psi}_i^{D-E} = \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I \quad (17)$$

$\mathbf{T}_{ij}$  是一个  $n_0(2m_0+1) \times n_0(2l_0+1)$  的矩阵, 定义

了一个基于 Bessel 函数加法公式的坐标转换矩阵,  $m_0 = l_0$ 。

$$\begin{cases} n=0: & \mathbf{T}_{ij}(0, m, l) = H_{m-l}(k_0 R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(m-l)} \\ n \geq 1: & \mathbf{T}_{ij}(n, m, l) = K_{m-l}(k_n R_{ij}) e^{i\alpha_{ij}(m-l)} (-1)^l \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $\boldsymbol{\psi}_j^I$  含有  $n_0(2m_0+1)$  个元素, 表示入射组份波的列向量:

$$\begin{cases} n=0: & \boldsymbol{\psi}_j^I(0, m) = Y_0(z) J_m(k_0 r_j) e^{im\theta_j} \\ n \geq 1: & \boldsymbol{\psi}_j^I(n, m) = Y_n(z) I_m(k_n r_j) e^{im\theta_j} \end{cases} \quad (19)$$

第  $i$  柱在其他柱辐射波的入射作用下, 外域绕射势  $\varphi_{D1-E}$  表示为:

$$\begin{aligned} \varphi_{D1-E}^i &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{R0m}^i Y_0(z) H_m(k_0 r_i) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} A_{Rnm}^i Y_n(z) K_m(k_n r_i)] e^{im\theta_i} \end{aligned} \quad (20)$$

用矩阵形式表示  $\varphi_{D1-E}^i$  为:

$$\varphi_{D1-E}^i = \mathbf{A}_{Ri}^T \boldsymbol{\psi}_i^D = \mathbf{A}_{Ri}^T \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I \quad (21)$$

式中,  $\mathbf{A}_{Ri}$  是含有  $n_0(2m_0+1)$  个元素的列向量, 其元素为  $\mathbf{A}_{Ri}(n, m) = A_{Rnm}^i$ ,  $A_{Rnm}^i$  为待求复系数, 是辐射运动波引起  $i$  柱坐标系下外域绕射组份波的波幅

系数。

第  $j$  柱的总入射势为  $j$  柱以外  $N-1$  个柱体同时做不同模式运动时(即可以同时做纵荡、横荡和垂荡), 辐射势与绕射势(包括柱群的存在所带来的干扰)之和:

$$\begin{aligned} \varphi_j^I &= \sum_{i=1, i \neq j}^N \varphi_{R_{s-E}}^i |_j + \sum_{i=1, i \neq j}^N \varphi_{D1-E}^i |_j = \\ & \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{s=1}^3 (-i\omega_0 \zeta_s^i \mathbf{R}_{is}^T) \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I + \sum_{i=1, i \neq j}^N \mathbf{A}_{Ri}^T \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I = \\ & \sum_{i=1, i \neq j}^N \left[ \sum_{s=1}^3 (-i\omega_0 \zeta_s^i \mathbf{R}_{is}^T) + \mathbf{A}_{Ri}^T \right] \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I \end{aligned} \quad (22)$$

对于任意柱体  $j$ , 其总入射势  $\varphi_j^I$  (式(22))和速度势  $\varphi_{D1-E}^i$  (式(21))之间可以通过第  $j$  柱的单柱绕射特征联系起来, 这一绕射特征可以用单柱绕射传递矩阵  $\mathbf{B}_j^E$  表示, 因此我们可以得到:

$$\mathbf{A}_{Rj} = \mathbf{B}_j^E \sum_{i=1, i \neq j}^N \mathbf{T}_{ij}^T \left[ \sum_{s=1}^3 (-i\omega_0 \zeta_s^i \mathbf{R}_{is}) + \mathbf{A}_{Ri} \right] \quad (23)$$

单柱绕射传递矩阵  $\mathbf{B}_j^E$  可通过求解包含行进波和局部波的截头单柱绕射问题得到,  $\mathbf{B}_j^E$  中的元素参见附录。

给定了  $i$  柱第  $s$  模式运动的振动幅值  $\zeta_s^i$ , 并且确定单柱绕射传递矩阵  $\mathbf{B}_j^E$  和辐射系数  $\mathbf{R}_{is}$  之后, 求解方程组式(23)即可求得外域绕射势系数向量  $\mathbf{A}_{Rj}(n, m)$ 。

因此, 当  $i$  柱体同时做不同运动模式的振动幅值  $\zeta_s^i$  ( $s=1, 2, 3$ ) 给定后, 可将  $j$  柱外域速度势  $\varphi_{RD-E}$  表示为:

$$\begin{aligned} \varphi_{RD-E}^j &= \left[ \sum_{s=1}^3 (-i\omega_0 \zeta_s^j \mathbf{R}_{js}^T) + \mathbf{A}_{Rj}^T \right] \boldsymbol{\psi}_j^{D-E} + \\ & \sum_{i=1, i \neq j}^N \left[ \sum_{s=1}^3 (-i\omega_0 \zeta_s^i \mathbf{R}_{is}^T) + \mathbf{A}_{Ri}^T \right] \mathbf{T}_{ij} \boldsymbol{\psi}_j^I \end{aligned} \quad (24)$$

$j$  柱内域速度势  $\varphi_{RD-C}$  为:

$$\begin{aligned} \varphi_{RD-C}^j &= \sum_{s=1}^3 [-i\omega_0 \zeta_s^j \cdot \varphi_{R_s}^C(r, \theta, z)] + \\ & \left\{ \sum_{i=1, i \neq j}^N \left[ \sum_{s=1}^3 (-i\omega_0 \zeta_s^i \mathbf{R}_{is}^T) + \mathbf{A}_{Ri}^T \right] \mathbf{T}_{ij} \right\} (\mathbf{B}_j^C)^T \boldsymbol{\psi}_j^{D-C} \end{aligned} \quad (25)$$

其中,  $\varphi_{R_s}^C(r, \theta, z)$  为截头单柱辐射运动下的内域速度势。式(25)中  $\varphi_{R_s}^C(r, \theta, z)$  为当截头单柱以单位速度纵荡和横荡模态的辐射运动时的内域辐射势:

$$\varphi_{R_s}^C(r, \theta, z) = \left[ \frac{C_{R0}}{2} \frac{r}{a} + \sum_{p=1}^{\infty} C_{R_p} \cdot \frac{I_1(p\pi r / (d-h))}{I_1(p\pi a / (d-h))} \cdot \cos\left(\frac{p\pi(z+d)}{d-h}\right) \right] \cdot r_s \quad (26)$$

当截头单柱以单位速度垂荡模式的辐射运动时，内域辐射势  $\varphi_{R_s}^C(r, \theta, z)$  为：

$$\varphi_{R_s}^C(r, \theta, z) = - \left\{ \left[ \frac{C_{Rh0}}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} C_{Rhp} \frac{I_0(p\pi r / (d-h))}{I_0(p\pi a / (d-h))} \right] \cos\left(\frac{p\pi(z+d)}{d-h}\right) + \frac{(z+d)^2 - r^2 / 2}{2(d-h)} \right\} \cdot r_s \quad (27)$$

其中，式(26)中系数  $C_{R_p}$  和  $C_{Rhp}$  分别参见附录的计算结果。式(25)中， $\psi_j^{D-C}$  为内域势组分波的列向量：

$$\begin{cases} p=0: \psi_j^{D-C}(0, m) = r_j^{|m|} e^{im\theta_j} \\ p \geq 1: \psi_j^{D-C}(p, m) = I_m\left(\frac{p\pi r}{d-h}\right) e^{im\theta_j} \end{cases} \quad (28)$$

式(25)中的  $B_j^C$  为内域总速度势传递矩阵，表示单位幅度入射组分波产生内域绕射组分波的波幅，参见附录。

至此，利用式(24)和式(25)，即可得到各个截头圆柱同时以振动幅值  $\zeta_s^i (s=1, 2, 3)$  做不同模态运动时， $j$  柱外域速度势  $\varphi_{RD-E}$  和内域速度势  $\varphi_{RD-C}$ 。

### 2 截头柱群绕辐射水动力求解

求得  $\varphi_{RD-E}^j$  和  $\varphi_{RD-C}^j$  后，进而可以求得各个圆柱表面上的压力分布：

$$p_{RD}^j = \text{Re} \left\{ -\rho \frac{\partial \Phi_{RD}^j}{\partial t} \Big|_{r_j=a_j} \right\} \quad (29)$$

进一步即可得当各个截头圆柱同时做不同模态运动时，在  $j$  柱上产生的  $k$  方向即水平方向 ( $k=1, k=2$ ) 的水动力  $F_{kRD}^j$ ：

$$F_{kRD}^j = -\rho \iint_{S_b} [-i\omega_0 \varphi_{RD-E}^j] \cdot n_k^j dS \quad (30)$$

在  $j$  柱上产生的  $k$  方向即垂直方向 ( $k=3$ ) 的水动力  $F_{kRD}^j$  与式(30)相似，只是把积分区域  $S_b$  改为  $S_{bh}$ ，积分函数中  $\varphi_{RD-E}^j$  改为  $\varphi_{RD-C}^j$ 。其中， $S_b$  和  $S_{bh}$  分别为圆柱湿表面和圆柱底面。

### 3 不同工况下各柱间有相对运动的算例

Siddorn P 和 Eatock Taylor 研究了给定一个圆

柱振动时截头柱群的辐射问题，这是本文的一种退化情况。为校核本程序的正确性。我们对该文献中的有关算例进行了计算，本文计算结果如图 3、图 4 和图 5 所示，它们分别对应着文献[14]中的图 11、图 12 和图 13。

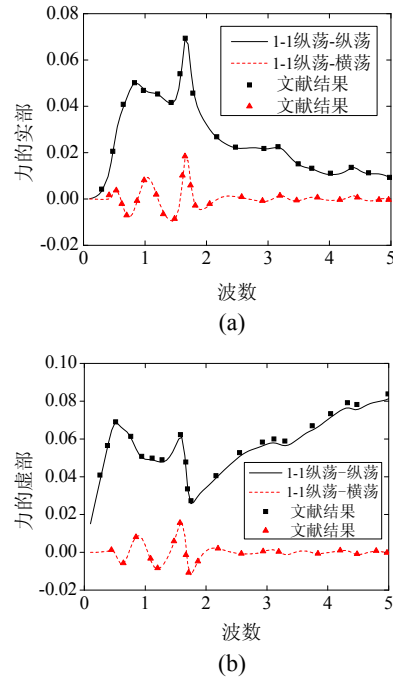


图 3 纵荡-纵荡和纵荡-横荡  
Fig.3 Surge-surge and surge-sway

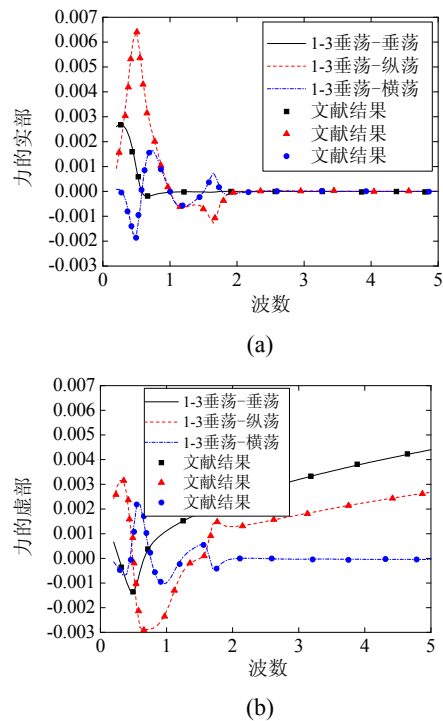


图 4 垂荡-垂荡，垂荡-纵荡和垂荡-横荡  
Fig.4 Heave-heave, heave-surge and heave-sway

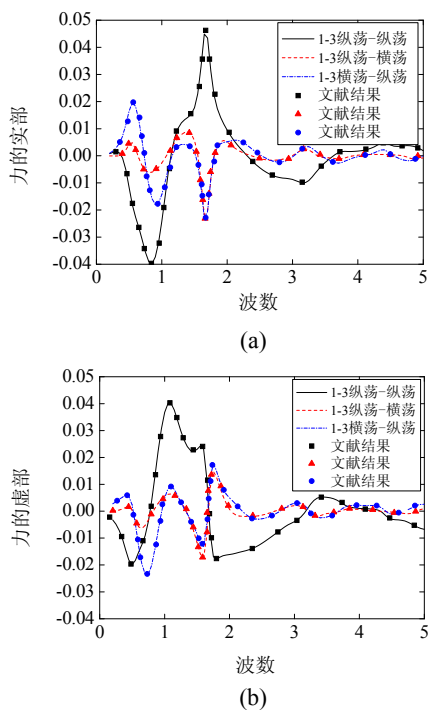


图5 纵荡-纵荡, 纵荡-横荡和横荡-横荡  
Fig.5 Surge-surge, surge-sway and sway-sway

从图3~图5可以看出两者吻合良好。由于该文献给出的只是单一柱单一方向振动下的解, 为进一步了解柱群间存在更复杂相对运动后柱群相互作用引起的水动力特性, 需计算柱群中一个圆柱或多个圆柱不同方向同时振动时, 辐射力的随波数变化的情况。为此, 我们进行了当各个截头圆柱同时做不同模态运动时的水动力分析, 以下给出具体结果。

考察如图6所示的典型等间距截头四柱结构, 每个圆柱的半径为  $a$ , 柱间距为  $R=5a$ , 水深  $d=6a$ , 吃水  $h=2a$ 。

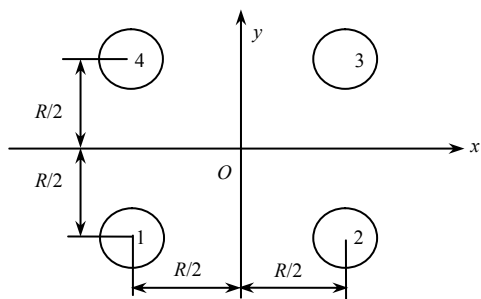


图6 四柱结构坐标系  
Fig.6 Coordinates system of four cylinders

计算结果图中的横坐标是无量纲波数  $k_0a$ , 纵坐标是截头圆柱群各柱水动力的实部  $\text{Re}(FRk) = \text{Re}[F_{kRD}^j]/(\rho g \pi a^2 h \sqrt{g/a})$ 、虚部  $\text{Im}(FRk) = \text{Im}[F_{kRD}^j]/(\rho g \pi a^2 h \sqrt{g/a})$  和幅值  $|FRk| =$

$|F_{kRD}^j|/(\rho g \pi a^2 h \sqrt{g/a})$ 。首先计算了1柱以单位速度  $45^\circ$  方向运动同时还以单位速度做垂荡运动时, 柱群相互作用引起的各柱辐射力。

图7中“1/2/3/4柱  $x$  方向-1柱  $45^\circ$  方向和垂荡”表示1柱以单位速度  $45^\circ$  方向运动同时还以单位速度做垂荡运动时, 1柱、2柱、3柱和4柱  $x$  方向上水动力的实部和虚部, 图8和图9分别是指  $y$  方向和  $z$  方向上的水动力。从图7和图8中可以看出在波数为1.2附近水平方向上水动力的幅值都有所增加, 并且图7和图8之间是具有对称性的。另外, 图9(b)中1柱的数值远远大于其他圆柱, 并且垂向水动力的幅值主要由辐射力的虚部决定。

下面进一步计算两个圆柱同时不同运动的问题, 图10~图12表示1柱  $45^\circ$  方向单位速度振动同时2柱  $135^\circ$  方向单位速度振动, 同时1柱和2柱还做单位速度垂荡。

从图10~图12中, 我们可以明显的看出, 1柱和2柱之间, 3柱和4柱之间,  $x$  方向和  $y$  方向之间, 是具有对称性的。图10和图11显示各柱水平方向上的水动力随波数的变化波动明显。而铅垂方向(图12)水动力只是在小波数附近变化明显, 随波数的增加趋于线性变化, 垂向水动力的幅值主要由虚部决定。

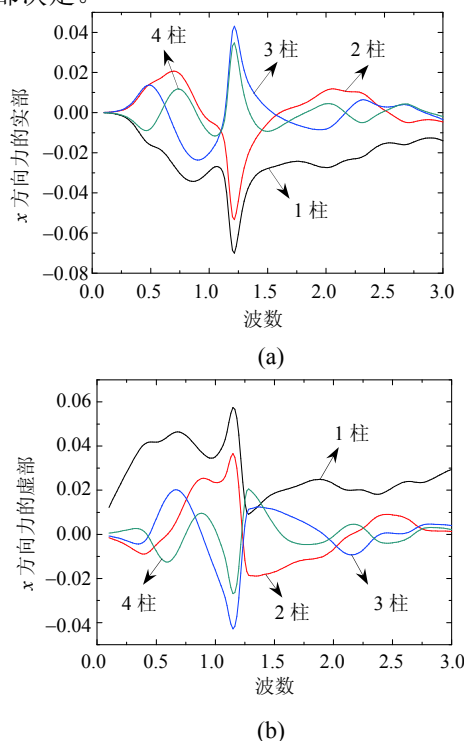
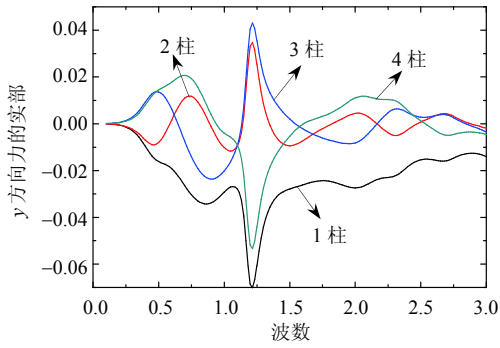
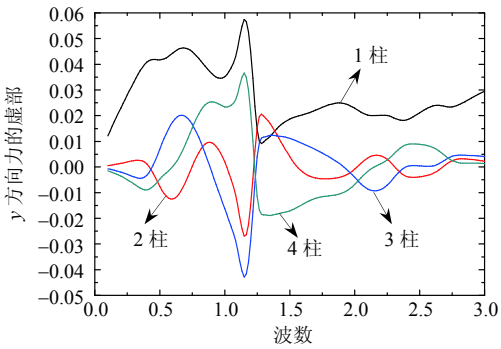


图7 1/2/3/4柱  $x$  方向-1柱  $45^\circ$  方向和垂荡  
Fig.7 Cylinder 1/2/3/4  $x$  direction-cylinder 1 horizontal motion in  $45^\circ$  direction and heave

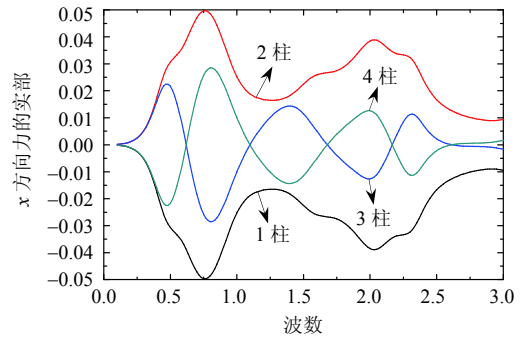


(a)

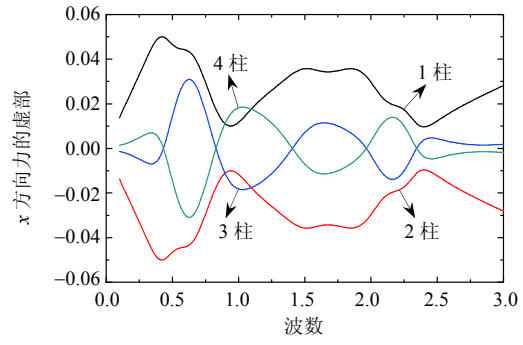


(b)

图8 1/2/3/4柱y方向-1柱45°方向和垂荡  
 Fig.8 Cylinder 1/2/3/4 y direction-cylinder 1 horizontal motion in 45° direction and heave



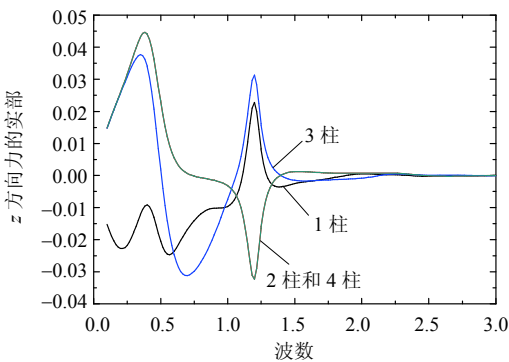
(a)



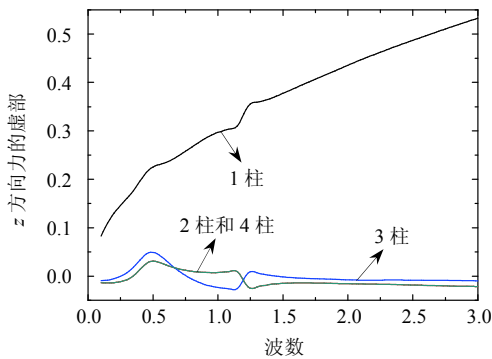
(b)

图10 1/2/3/4柱x方向-1柱45°方向和垂荡方向+2柱135°方向和垂荡

Fig.10 Cylinder 1/2/3/4 x direction-cylinder 1 horizontal motion in 45° direction and heave+ cylinder 2 horizontal motion in 135° direction and heave

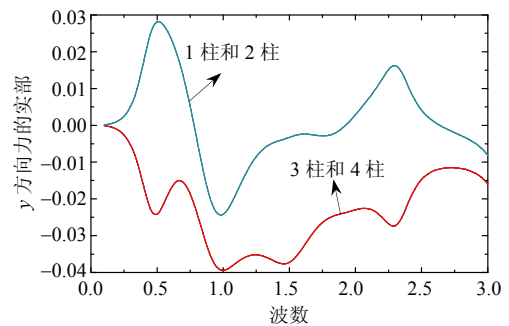


(a)

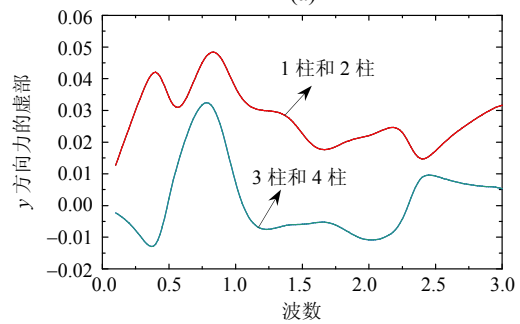


(b)

图9 1/2/3/4柱z方向-1柱45°方向和垂荡  
 Fig.9 Cylinder 1/2/3/4 z direction-cylinder 1 horizontal motion in 45° direction and heave



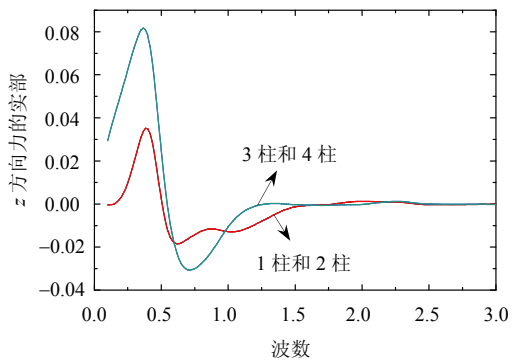
(a)



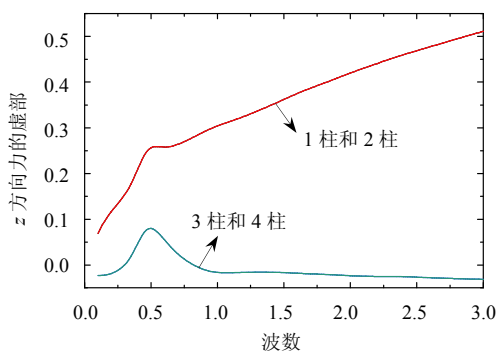
(b)

图11 1/2/3/4柱y方向-1柱45°方向和垂荡方向+2柱135°方向和垂荡

Fig.11 Cylinder 1/2/3/4 y direction-cylinder 1 horizontal motion in 45° direction and heave+ cylinder 2 horizontal motion in 135° direction and heave



(a)



(b)

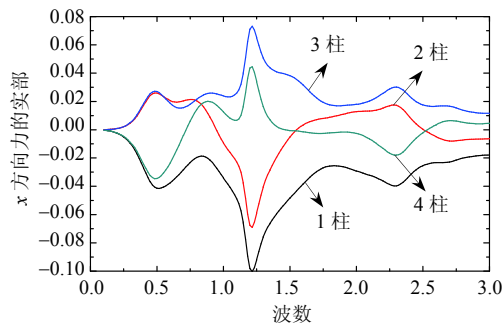
图 12 1/2/3/4 柱 z 方向-1 柱 45°方向和垂荡方向+2 柱 135°方向和垂荡

Fig.12 Cylinder 1/2/3/4 z direction-cylinder 1 horizontal motion in 45° direction and heave+ cylinder 2 horizontal motion in 135° direction and heave

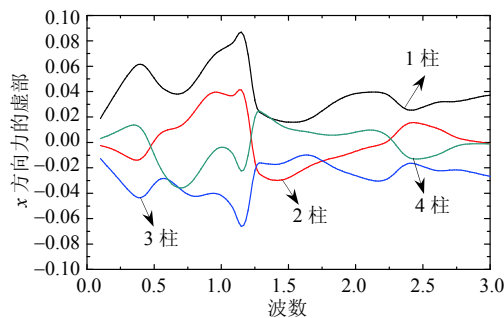
我们进一步计算给定 3 个圆柱同时运动的情况，并且 3 个圆柱给定不同运动模式的叠加，也就是说给定圆柱任意方向的辐射运动，计算辐射力的结果。

图 13~图 15 表示 1 柱 0°方向振动、2 柱 90°方向振动，3 柱 225°方向振动，同时 1 柱、2 柱和 3 柱做单位速度垂荡。图 13 和图 14 显示各柱水平方向上的水动力随波数的变化产生明显振荡。而各柱铅垂方向(图 15)水动力只是在小波数附近变化明显，随波数的增加趋于线性变化，水动力幅值主要由虚部决定。

图 16 表示 1 柱 225°方向、2 柱 135°方向、3 柱 45°方向，4 柱 315°方向振动，同时 1 柱、2 柱、3 柱和 4 柱做单位速度垂荡时，在波数  $k_0 a = 1$  时各柱的压力分布图。我们很明显能看出 1 柱和 3 柱、2 柱和 4 柱的对称性，压力幅值分布在接近柱群中央的方向上明显要更大。柱面压力幅值是随着 z 方向逐渐减小，并且压力幅值大小的分布与柱群各柱给定的运动幅值和方向有很明显的关系。



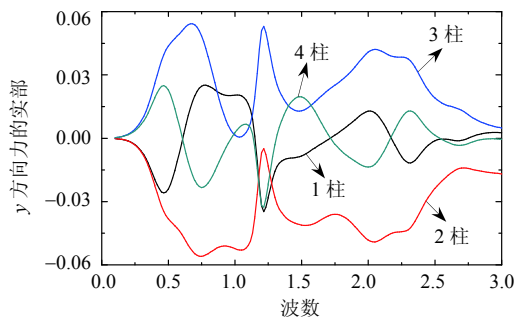
(a)



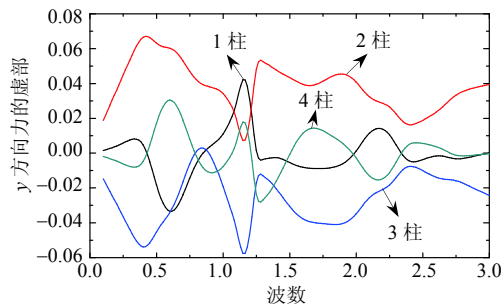
(b)

图 13 1/2/3/4 柱 x 方向-1 柱 0°方向和垂荡+2 柱 90°方向和垂荡+3 柱 225°方向和垂荡

Fig.13 Cylinder 1/2/3/4 x direction-cylinder 1 horizontal motion in 0° direction and heave+ cylinder 2 horizontal motion in 90° direction and heave+ cylinder 3 horizontal motion in 225° direction and heave



(a)



(b)

图 14 1/2/3/4 柱 y 方向-1 柱 0°方向和垂荡+2 柱 90°方向和垂荡+3 柱 225°方向和垂荡

Fig.14 Cylinder 1/2/3/4 y direction-cylinder 1 horizontal motion in 0° direction and heave+ cylinder 2 horizontal motion in 90° direction and heave+ cylinder 3 horizontal motion in 225° direction and heave



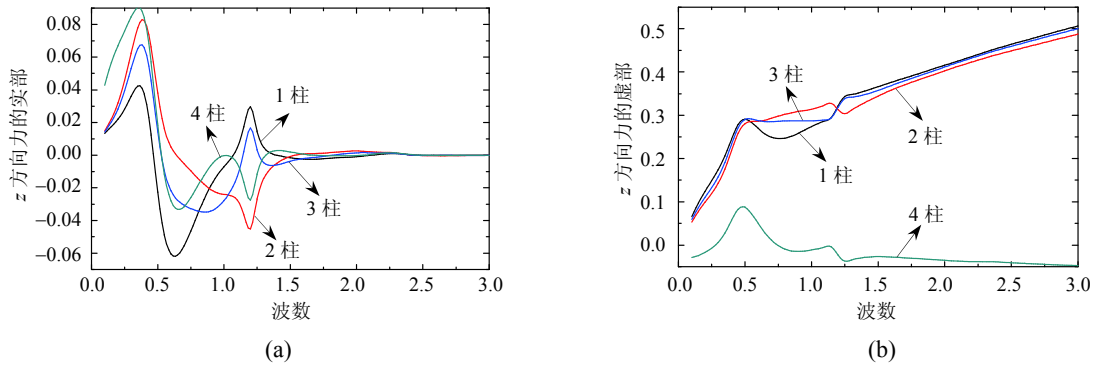


图 15 1/2/3/4 柱  $z$  方向-1 柱  $0^\circ$  方向和垂荡+2 柱  $90^\circ$  方向和垂荡+3 柱  $225^\circ$  方向和垂荡

Fig.15 Cylinder 1/2/3/4  $z$  direction-cylinder 1 horizontal motion in  $0^\circ$  direction and heave+ cylinder 2 horizontal motion in  $90^\circ$  direction and heave+ cylinder 3 horizontal motion in  $225^\circ$  direction and heave

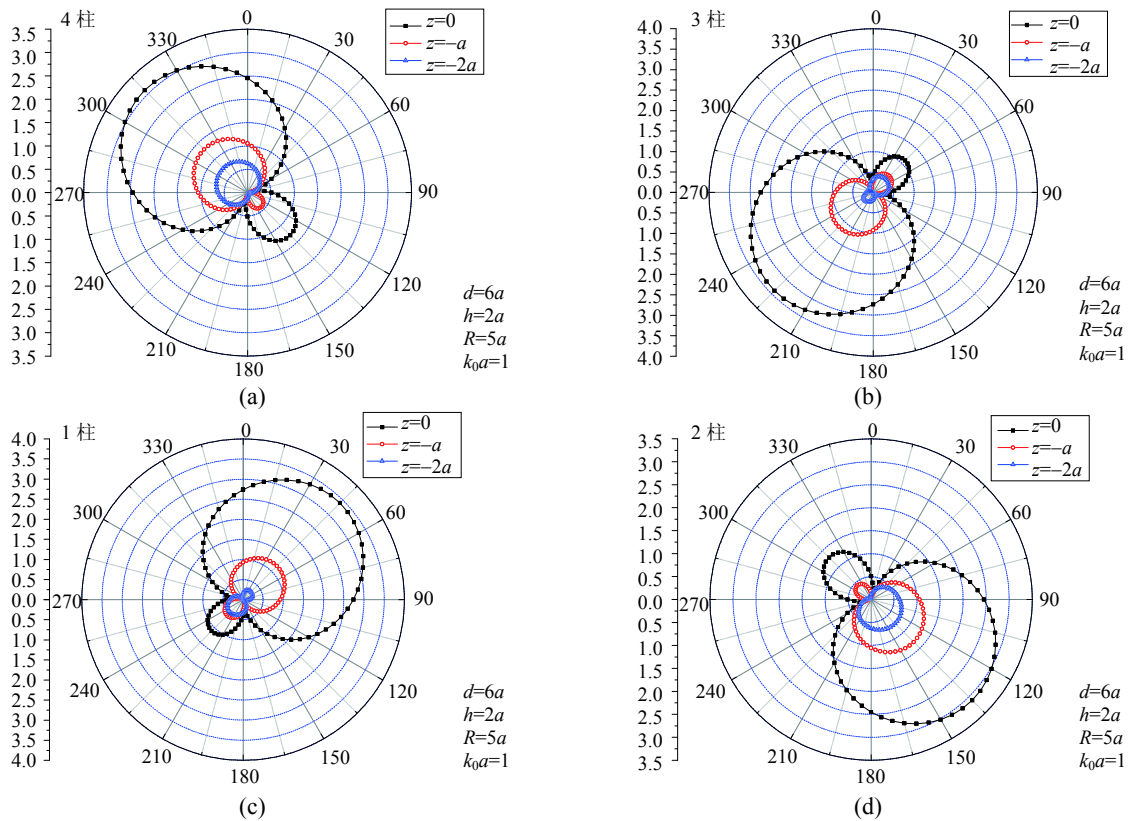


图 16 四个柱同时不同运动下的压力幅值分布图

Fig.16 Pressure amplitude distributions when four cylinders performing different motions

### 4 结论

本文针对有相对运动截头圆柱群(其中各个圆柱同时做不同模态运动)进行了水动力分析。基于特征展开方法,考虑各圆柱之间的水动力相互作用,推导了流场速度势、压力分布和水动力的表达式,从而给出了该问题的解析分析方法。以该方法为基础针对某一典型四柱截头柱群,考虑不同运动模态组合下的情况,计算了作用在各柱上不同方向上的水动力。从中可看出:

- (1) 由于各柱运动模态和幅度大小的不同,致使变量数目增加,因而速度势、水动力等的求解比单一运动模态下的情况要复杂许多。
- (2) 各个圆柱同时做不同模态运动时,水平方向上水动力的幅值在某些波数下会出现峰值,各柱水平方向上的水动力随波数的变化波动明显。
- (3) 铅垂方向水动力只是在小波数附近波动明显,随波数的增加趋于线性变化,垂向水动力的幅值主要由虚部决定。

参考文献:

[1] António F. de O. Falcão. Wave energy utilization: A review of the technologies [J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2010, 14(3): 899–918.

[2] 董艳秋. 深海采油平台波浪载荷及响应[M]. 天津: 天津大学出版社, 2005: 1–60.  
Dong Yanqiu. Wave loads and response of the oil-extraction platform in deep ocean [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2005: 1–60. (in Chinese)

[3] Kashiwagi M. Hydrodynamic interactions among a great number of columns supporting a very large flexible structure [J]. Journal of Fluids and Structures, 2000, 14: 1013–1034.

[4] Garrett C J R. Wave forces on a circular dock [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1971, 46(1): 129–139.

[5] 滕斌, 李玉成, 董国海. 轴对称物体上的三阶波浪力 [J]. 海洋学报, 2000, 22(2): 105–112.  
Teng Bin, Li Yucheng, Dong Guohai. A method for third-order wave force on axisymmetric bodies [J]. Acta Oceanologica Sinica, 2000, 22(2): 105–112. (in Chinese)

[6] Williams A N, Demirbilek Z. Hydrodynamic interactions in floating cylinder arrays- I : Wave scattering [J]. Ocean Engineering, 1988, 15(6): 549–583.

[7] Williams A N, Abul-Azm A G. Hydrodynamic interactions in floating cylinder arrays- II : Wave radiation

[J]. Ocean Engineering, 1989, 16(3): 217–263.

[8] Kagemoto H, Yue D K P. Interactions among multiple three-dimensional bodies in water waves: An exact algebraic method [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 166: 189–209.

[9] Yilmaz O. Hydrodynamic interactions of waves with group of truncated vertical cylinders [J]. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 1998, 124(5): 272–279.

[10] Yilmaz O, Incecik A, Barltrop N. Wave enhancement due to blockage in semisubmersible and TLP structures [J]. Ocean Engineering, 2001, 28: 471–490.

[11] Duclos G, Clement A H. Wave propagation through arrays of unevenly spaced vertical piles [J]. Ocean Engineering, 2004, 31(13): 1655–1668.

[12] Walker D A G, Eatock Taylor R. Wave diffraction from linear arrays of cylinders [J]. Ocean Engineering, 2005, 32(17/18): 2053–2078.

[13] Walker D A G, Eatock Taylor R, Taylor P H, Zang J. Wave diffraction and near-trapping by a multi-column gravity-based structure [J]. Ocean Engineering, 2008, 35(2): 201–229.

[14] Siddorn P, Eatock Taylor R. Diffraction and independent radiation by an array of floating cylinders [J]. Ocean Engineering, 2008, 35(13): 1289–1303.

附录:

根据文献[9]的方法可以得到截头单柱绕射传递矩阵  $B_j^E$  和  $B_j^C$ ，它是一个的稀疏矩阵，其元素对应单位幅值入射组分波产生的绕射组分波的幅值，如下：

$$\left\{ \begin{aligned} B_j^E(0,0,m) &= -\frac{J'_m(k_0 a)}{H'_m(k_0 a)} + \frac{D_0^m \cosh k_0 d}{H'_m(k_0 a) N_0^{1/2} e^{im(\pi/2-\beta)}}, \quad n=0, q=0 \\ B_j^E(q,0,m) &= \frac{D_q^m}{K'_m(k_q a) N_q^{1/2} e^{im(\pi/2-\beta)}}, \quad n=0, q \geq 1 \\ B_j^E(0,n,m) &= \frac{D[n]_0^m \cosh k_0 d}{H'_m(k_0 a) N_0^{1/2}}, \quad n \geq 1, q=0 \\ B_j^E(q,n,m) &= \begin{cases} \frac{D[n]_q^m}{K'_m(k_q a) N_q^{1/2}}, & n \geq 1, q \geq 1, q \neq n \\ \frac{I'_m(k_q a)}{K'_m(k_q a)} + \frac{D[n]_q^m}{K'_m(k_q a) N_q^{1/2}}, & n \geq 1, q \geq 1, q = n \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (A1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_j^C(0,0,m) &= \frac{C_0^m}{2a^{|m|} i^m}, \quad n=0, p=0 \\ B_j^C(p,0,m) &= \frac{C_p^m}{I_m(p\pi a / (d-h)) i^m} \cdot \cos\left(\frac{p\pi(z+d)}{d-h}\right), \quad n=0, p \geq 1 \\ B_j^C(0,n,m) &= \frac{C[n]_0^m}{2a^{|m|}}, \quad n \geq 1, p=0 \\ B_j^C(p,n,m) &= \frac{C[n]_p^m}{I_m(p\pi a / (d-h))} \cdot \cos\left(\frac{p\pi(z+d)}{d-h}\right), \quad n \geq 1, p \geq 1 \end{aligned} \right. \quad (A2)$$

求解满足如下方程组的系数  $C_{Rp}$ 、 $D_{Rn}$ ：

$$\begin{cases} C_{Rp} + \sum_{n=0}^{\infty} F_{Rpn} D_{Rn} = 0 & n=0,1,\dots \\ D_{Rn} - \sum_{p=0}^{\infty} G_{Rnp} C_{Rp} = S_n & q=0,1,\dots \end{cases} \quad (A3)$$

方程组(A3)中的各项系数为：

$$\begin{cases} F_{Rp0} = -\frac{2H_1(k_0 a) k_0 (d-h) (-1)^p \sinh(k_0 (d-h))}{H'_1(k_0 a) \cdot N_0^{1/2} \cdot [k_0^2 (d-h)^2 + p^2 \pi^2]}, \quad n=0 \\ F_{Rpn} = -\frac{2K_1(k_n a) k_n (d-h) (-1)^p \sin(k_n (d-h))}{K'_1(k_n a) \cdot N_n^{1/2} \cdot [k_n^2 (d-h)^2 - p^2 \pi^2]}, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (A4)$$

$$\begin{cases} G_{R00} = \frac{\sinh(k_0 (d-h))}{2a \cdot d \cdot k_0^2 N_0^{1/2}}, \quad n=0, p=0 \\ G_{Rn0} = \frac{\sin(k_n (d-h))}{2a \cdot d \cdot k_n^2 N_n^{1/2}}, \quad n \geq 1, p=0 \\ G_{R0p} = \frac{I'_1\left(\frac{p\pi a}{d-h}\right) \cdot p\pi (d-h) (-1)^p \cdot \sinh(k_0 (d-h))}{I_1\left(\frac{p\pi a}{d-h}\right) \cdot d \cdot N_0^{1/2} \cdot [k_0^2 (d-h)^2 + p^2 \pi^2]}, \quad n=0, p \geq 1 \\ G_{Rnp} = \frac{I'_1\left(\frac{p\pi a}{d-h}\right) \cdot p\pi (d-h) (-1)^p \cdot \sin(k_n (d-h))}{I_1\left(\frac{p\pi a}{d-h}\right) \cdot d \cdot N_n^{1/2} \cdot [k_n^2 (d-h)^2 - p^2 \pi^2]}, \quad n \geq 1, p \geq 1 \end{cases} \quad (A5)$$

$$\begin{cases} S_0 = \frac{1}{k_0^2 d} \cdot N_0^{-1/2} \cdot [\sinh(k_0 d) - \sinh(k_0 (d-h))], \quad q=0 \\ S_n = \frac{1}{k_n^2 d} \cdot N_n^{-1/2} \cdot [\sin(k_n d) - \sin(k_n (d-h))], \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (A6)$$

系数  $C_{Rhp}$ 、 $D_{Rhn}$  的确定通过求解以下方程组得到：

$$\begin{cases} C_{Rhp} + \sum_{q=0}^{\infty} F_{hpn} D_{Rhn} = R_{hp} & p = 0, 1, \dots \\ D_{Rhn} - \sum_{n=0}^{\infty} G_{hnp} C_{Rhp} = S_{hn} & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (A7)$$

方程组(A7)中的各项系数为:

$$\begin{cases} F_{hp0} = -\frac{2H_0(k_0 a)k_0(d-h)(-1)^p \sinh(k_0(d-h))}{H_0'(k_0 a) \cdot N_0^{1/2} \cdot [k_0^2(d-h)^2 + p^2 \pi^2]}, & q = 0 \\ F_{hpn} = -\frac{2K_0(k_n a)k_n(d-h)(-1)^p \sin(k_n(d-h))}{K_0'(k_n a) \cdot N_n^{1/2} \cdot [k_n^2(d-h)^2 - p^2 \pi^2]}, & q \geq 1 \end{cases} \quad (A8)$$

$$\begin{cases} G_{h00} = 0, & n = 0, p = 0 \\ G_{hn0} = 0, & n \geq 1, p = 0 \\ G_{h0p} = \frac{I_0' \left( \frac{p\pi a}{d-h} \right) \cdot p\pi(d-h)(-1)^p \cdot \sinh(k_0(d-h))}{I_0 \left( \frac{p\pi a}{d-h} \right) \cdot d \cdot N_0^{1/2} \cdot [k_0^2(d-h)^2 + p^2 \pi^2]}, & n = 0, p \geq 1 \\ G_{hnp} = \frac{I_0' \left( \frac{p\pi a}{d-h} \right) \cdot p\pi(d-h)(-1)^p \cdot \sin(k_n(d-h))}{I_0 \left( \frac{p\pi a}{d-h} \right) \cdot d \cdot N_n^{1/2} \cdot [k_n^2(d-h)^2 - p^2 \pi^2]}, & n \geq 1, p \geq 1 \end{cases} \quad (A9)$$

确定系数  $C[n]_p^m$ 、 $D[n]_q^m$  的方程组为:

$$\begin{cases} C[n]_p^m + \sum_{q=0}^{\infty} F[n]_{pq}^m D[n]_q^m = R[n]_p^m, & m, p = 0, 1, 2, \dots \\ D[n]_q^m - \sum_{p=0}^{\infty} G[n]_{qp}^m C[n]_p^m = 0, & n, q = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (A10)$$

其中:

$$\begin{cases} R[n]_p^m = 2 \left[ I_m(k_n a) - \frac{I_m'(k_n a)}{K_m'(k_n a)} K_m(k_n a) \right] \cdot \frac{(-1)^p k_n(d-h) \sin(k_n(d-h))}{k_n^2(d-h)^2 - p^2 \pi^2}, \\ F[n]_{pq}^m = F_{pq}^m, \\ G[n]_{qp}^m = G_{qp}^m. \end{cases} \quad (A11)$$

### 向投递高水平论文的作者致敬

为了表彰给《工程力学》期刊提供了高水平稿件的作者,《工程力学》杂志社决定每年分别对上溯 5 年和 10 年间发表的高引用率论文予以公示和表彰,引用率以“CNKI”《中国引文数据库》的数据为基准,分别选出前 10 篇予以公布,中选的文章我社将向作者寄发证书以示感谢。

表 1 《工程力学》期刊 2012 年上溯 5 年间(2007-2012)高引用率论文

序号	论文题目	作者	年/期	该统计截止到 2012 年 12 月 19 日
1	三维一致粘弹性人工边界及等效粘弹性边界单元	谷 音, 刘晶波, 杜义欣	2007/12	69
2	建筑保温节能墙体的发展现状与展望	张泽平, 李 珠, 董彦莉	2007/S2	54
3	钢筋混凝土框架结构抗连续倒塌设计方法的研究	陆新征, 李 易, 叶列平, 马一飞, 梁 益	2008/S2	52
4	大跨度空间结构多维多点非平稳随机地震反应分析	丁 阳, 林 伟, 李忠献	2007/03	51
5	流固耦合问题的描述方法及分类简化准则	朱洪来, 白象忠	2007/10	44
6	往复荷载下钢筋混凝土柱受力性能的数值模拟	汪训流, 陆新征, 叶列平	2007/12	44
7	大理岩三轴压缩变形破坏与能量特征研究	杨圣奇, 徐卫亚, 苏承东	2007/01	43
8	单层平面钢框架连续倒塌动力效应分析	胡晓斌, 钱稼茹	2008/06	42
9	基于 ABAQUS 平台的扩展有限元法	方修君, 金 峰	2007/07	37
10	大跨越输电塔线体系随机脉动风场模拟研究	白海峰, 李宏男	2007/07	32

表 2 《工程力学》期刊 2012 年上溯 10 年间(2002-2012)高引用率论文

序号	论文题目	作者	年/期	该统计截止到 2011 年 12 月 19 日
1	波动问题中的三维时域粘弹性人工边界	刘晶波, 王振宇, 杜修力, 杜义欣	2005/06	214
2	结构静力弹塑性分析方法和改进	尹华伟, 汪梦甫, 周锡元	2003/04	171
3	碳纤维布加固已承受荷载的钢筋混凝土梁抗弯性能试验研究及抗弯承载力计算	王文炜, 赵国藩, 黄承逵, 任海东	2004/04	111
4	柔性铰链的设计计算	吴鹰飞, 周兆英	2002/06	104
5	混凝土结构抗震非线性分析模型、方法及算例	叶列平, 陆新征, 马千里, 汪训流, 缪志伟	2006/S2	102
6	半刚性梁柱节点连接的初始刚度和结构内力分析	王 燕, 李华军, 厉见芬	2003/06	101
7	两节点曲线索单元精细分析的非线性有限元法	杨孟刚, 陈政清	2003/01	97
8	大跨度钢结构施工过程的结构分析方法研究	崔晓强, 郭彦林, 叶可明	2006/05	95
9	考虑桩、土、垫层协同作用的刚性桩复合地基沉降计算方法	沈 伟, 池跃君, 宋二祥	2003/02	93
10	一种改进的基于频率测量的结构损伤识别方法	谢 峻, 韩大建	2004/01	90