文章编号:1007－2985(2013)04－0016－03

带非连续解椭圆问题的 3 次 Hermite 配点方法*

姜英军,邹莳珺

(长沙理工大学数学与计算科学学院,湖南 长沙　410114)

摘　要:使用 3 次 Hermite 配点方法,对一类带有非连续解的椭圆问题进行数值求解,将其解的不连续点取作网格节点,解在不连续点的左右极限作为未知量,结合解在不连续点的"跳跃"信息对原问题进行离散.数值实验表明此方法的收敛阶为 $O(h^4)$.

关键词:椭圆问题;Hermite 插值;配点方法

中图分类号:O175.26　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007－2985.2013.04.004

1　具有非连续解的椭圆问题

考虑求解一维椭圆问题[1-2]

$$(\beta u_x)_x+\kappa u=f+C\delta(x-\alpha)+\frac{1}{2}(\beta^{+}+\beta^{-})\hat{C}\delta'(x-\alpha)\qquad -1<x<1,\tag{1}$$

$$u(-1)=u_{-1},u(1)=u_1.\tag{2}$$

其中:$C,\hat{C},u_{-1},u_1$ 是给定常数;$\alpha\in(-1,1)$;$\beta(x),\kappa(x),f(x)$ 是光滑函数($\beta(x)$ 可以在 α 点处不连续);$\beta^{+}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^{+}}\beta(\alpha+\varepsilon)$;$\beta^{-}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^{+}}\beta(\alpha-\varepsilon)$.(1),(2) 式可被重新叙述为:[1]

$$(\beta u_x)_x+\kappa u=f\qquad -1<x<1\text{ 且 }x\neq\alpha,\tag{3}$$

$$\begin{cases}u(-1)=u_{-1},u(1)=u_1,\\ u^{+}-u^{-}=\hat{C},\beta^{+}u_x^{+}-\beta^{-}u_x^{-}=C.\end{cases}$$

(1) 式的唯一解在除去 $x=\alpha$ 点外是光滑函数,文献[1] 给出了对其求解的 2 阶收敛性算法.文中将使用文献[3] 中所提出的求解偏微分方程的埃尔米特配点算法对(1) 式进行数值求解.

2　Hermite 配点方法

对$[-1,1]$ 剖分为 $-1=x_0<x_1<\ldots<x_m=\mu<\ldots<x_N=1$,使用一个分段三次多项式 $v(x)$ 作为 $u(x)$ 的近似,$v(x)$ 的定义为

$$v(x)=\begin{cases}v_i\varphi_1(s)+v_{x,i}h_i\varphi_2(s)+v_{i+1}\varphi_3(s)+v_{x,i+1}h_i\varphi_4(s) & x\in[x_i,x_{i+1}],i\neq m-1,m,\\ v_{m-1}\varphi_1(s)+v_{x,m-1}h_{m-1}\varphi_2(s)+v_m^{-}\varphi_3(s)+v_{x,m}^{-}h_{m-1}\varphi_4(s) & x\in[x_{m-1},x_m],\\ v_m^{+}\varphi_1(s)+v_{x,m}^{+}h_m\varphi_2(s)+v_{m+1}\varphi_3(s)+v_{x,m+1}h_m\varphi_4(s) & x\in[x_m,x_{m+1}].\end{cases}$$

其中:$v_k,v_{x,k}(k=0,1,\ldots,m-1,m+1,m+2,\ldots,N),v_m^{-},v_m^{+},v_{x,m}^{-},v_{x,m}^{+}$ 可分别理解为$u(x_k),u_x(x_k)$,

* **收稿日期**:2013－03－14
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10901027)
作者简介:姜英军(1975－),男,湖南长沙人,长沙理工大学数学与计算科学学院副教授,博士,主要从事微分方程数值解研究.

$u(x_{m-})$，$u(x_{m+})$，$u_x(x_{m-})$，$u_x(x_{m+})$ 的近似；局部坐标 $s=\dfrac{x-x_i}{h_i}$；$h_i=x_{i+1}-x_i$；形函数 $\varphi_1(s)=(1+2s)(1-s)^2$；$\varphi_2(s)=s(1-s)^2$；$\varphi_3(s)=(3-2s)s^2$；$\varphi_4(s)=(s-1)s^2$．对 $x\in[x_i,x_{i+1}]$，有

$$v_x(x)=\frac{1}{h_i}\left(v_i\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}s}+v_{x,i}h_i\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}s}+v_{i+1}\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}s}+v_{x,i+1}h_i\frac{\mathrm{d}\varphi_4}{\mathrm{d}s}\right).$$

令 $F(x,u,u_x)=\kappa u(x)-f(x)$，$G(u_x)=-\beta u_x$，(3) 式化简为

$$F(x,u,u_x)=\frac{\partial}{\partial x}G(u_x).$$

在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上将(3) 式中 u 换成 v，并对区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的 2 个半区间进行积分可得

$$\int_{x_i}^{(x_i+x_{i+1})/2}F\,\mathrm{d}x=G_{i+1/2}-G_i,\tag{4}$$

$$\int_{(x_i+x_{i+1})/2}^{x_{i+1}}F\,\mathrm{d}x=G_{i+1}-G_{i+1/2}.\tag{5}$$

其中：$G_i=G(v_x)\big|_{x=x_i}$；$G_{i+1/2}=G(v_x)\big|_{x=(x_i+x_{i+1})/2}$；$G_{i+1}=G(v_x)\big|_{x=x_{i+1}}$；$F(x,u,u_x)=\kappa v(x)-f(x)$．

记 $s_1=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$s_2=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$s_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$s_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，则区间 $[x_i,(x_i+x_{i+1})/2]$ 的高斯点为 $x_{ij}=x_i+s_jh_i(j=1,2)$，区间 $[(x_i+x_{i+1})/2,x_{i+1}]$ 的高斯点为 $x_{ij}=x_i+s_jh_i(j=3,4)$，高斯系数皆为 $A_1=A_2=1/4$．(4)，(5) 式中的积分使用 2 点高斯公式可得

$$\begin{cases}A_1F_{i1}+A_2F_{i2}=G_{i+1/2}-G_i,\\A_1F_{i3}+A_2F_{i4}=G_{i+1}-G_{i+1/2},\end{cases}\tag{6}$$

其中 $i=0,1,\dots,N-1$，$F_{ij}=F\big|_{x=x_{ij}}$．令

$$\begin{cases}v_0=u_{-1},v_{x,N}=u_1,\\v_m^+-v_m^-=\hat{C},\beta^+u_x^+-\beta^-u_x^-=C.\end{cases}\tag{7}$$

(6)，(7) 式即为(1)，(2) 式的离散问题．

3　数值实验

求解下面问题：

$$\begin{cases}-u_{xx}=\pi^2\sin\pi x-\dfrac{2}{3}\delta(x)-\dfrac{1}{4}\delta'(x)\qquad -1<x<1,\\u(-1)=u(1)=0.\end{cases}$$

此问题精确解为

$$u=\begin{cases}\sin\pi x+x-1 & x<0,\\\sin\pi x-\dfrac{x+1}{2} & x>0.\end{cases}$$

表 1 中列出实验结果，其中 e_N 表示近似解的无穷范数误差，即 $e_N=\|u-v\|_\infty$，$r=\log(e_N/e_{N-4})/\log(N/(N-4))$．实验结果表明，该算法具有 4 阶收敛性．

表 1　数值实验结果

N	10	14	18	22	26
e_N	3.5339×10^{-4}	9.2068×10^{-5}	3.3705×10^{-5}	1.5107×10^{-5}	7.7447×10^{-6}
r		3.9974	3.9986	3.9991	3.9993
N	30	34	38	42	46
e_N	4.3696×10^{-6}	2.6487×10^{-6}	1.6976×10^{-6}	1.1375×10^{-6}	7.9058×10^{-7}
r	3.9995	3.9996	3.9997	3.9997	3.9998

4 结语

设计了一种有效的数值方法求解带不连续解的椭圆型问题,并将解的不连续点作为网格节点,解在不连续点的左右极限作为未知量,结合解在不连续点的"跳跃"信息得到了原问题的离散格式.实验表明这种方法是有效的,具有4阶收敛性.应用此方法求解带有非连续解的抛物问题[4-5].

参考文献:

[1] LEVEQUE R J,LI Zhi-lin. The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients and Singular Sources [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1994,31:1 019-1 044.

[2] TIKHONOV A N,SAMARSKII A A. Homogeneous Difference Schemes [J]. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics,1962(1):5-67.

[3] HUANG W Z,RUSSELL R D. A Moving Collocation Method for the Numerical Solution of Time Dependent Differential Equations [J]. Applied Numerical Mathematics,1996,20:101-116.

[4] MA Jing-tang,JIANG Ying-jun. Moving Mesh Methods for Blow up in Reaction-Diffusion Equations with Traveling Heat Source [J]. Journal of Computational Physics,2009,228:6 977-6 990.

[5] 马敬堂,姜英军.带插值的自适应网格重构算法求解带移动热源的反应扩散方程的理论分析 [J].中国科学,2011,41:235-251.

Cubic Hermite Collocation Method for Solving the Elliptic Problem with a Discontinuous Solution

JIANG Ying-jun,ZOU Shi-jun

(Department of Mathematics and Computing Science,Changsha University of Science and Technology,Changsha 410114,China)

Abstract:The cubic Hermite collocation method is used in discretization of an elliptic problem with a discontinuous solution. The discontinuous points of the solution are taken as grid points,the left and right limits of the solution at the discontinuous points as unknowns. The jumpings of the solution at the discontinuous points are combined to dicrete the original problem. The test indicates that the method has the convergence of order $O(h^4)$.

Key words:elliptic problem;Hermite interpolation;collocation method

(责任编辑 向阳洁)

文章编号:1007-2985(2013)04-0019-04

强混合删失数据密度函数估计的 r 阶相合性*

刘　艳,吴群英,叶彩园

(桂林理工大学理学院,广西 桂林　541006)

摘　要:在 α-混合序列下,研究了基于删失数据的密度函数 $f(x)$ 核估计的 $r(r>2)$ 阶相合性,并给出了失效率函数 $\lambda(x)$ 的估计,且证明了其 $r(r>2)$ 阶相合性.

关键词:α-混合;删失数据;核估计;r 阶相合性

中图分类号:O211.67　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007-2985.2013.04.005

1　相关定义

在统计分析中,经常存在需要对给定事件发生的时间进行估计和预测.在记录数据时,由于观测时间的局限,观察对象在进入或退出试验的随机性,以及对生存数据试验的设计,都可能使人们记录不到事件发生的具体时间,而只能记录到事件发生在某一段时间内,这样的数据称之为删失数据[1],如果事件发生的时间大于某个时间点,称为右删失数据,反之称为左删失数据.

定义 1[2]　令 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的实值随机变量序列,记 $\mathscr{F}_1^m=\sigma(X_i, 1\leqslant i\leqslant m)$ 和 $\mathscr{F}_m^\infty=\sigma(X_i, m\leqslant i<\infty)$ 分别是由随机变量 $\{X_i, 1\leqslant i\leqslant m\}$ 和 $\{X_i, m\leqslant i<\infty\}$ 产生的 σ 代数,定义 $\alpha(n)=\sup\limits_{m\geqslant 1}\sup\limits_{A\in\mathscr{F}_1^m, B\in\mathscr{F}_{m+n}^\infty}|P(AB)-P(A)P(B)|$.若当 $n\to\infty$ 时,$\alpha(n)\to 0$,则称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是 α-混合的.$\alpha(n)$ 称为混合系数,若存在 $0<\rho<1, a>0$,使 $\alpha(n)\leqslant a\rho^n$,则称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是几何 α-混合的.

在文中,设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一列同分布的 α-混合序列,分布函数为 $F(x)=P(X_1\leqslant x)$ 且 $F(x)$ 连续,密度为 $f(x)$,$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是独立同分布的随机变量,其分布函数为 $G(y)=P(Y_1\leqslant y)$,且 $G(x)$ 连续.在随机右删失模型中,假设随机变量 X_i 是独立于 Y_i 的,不能完全观察到 X_i,而只能观察到 $Z_i=\min(X_i, Y_i)$,$\delta_i=I(X_i\leqslant Y_i)$,其中 $I(\cdot)$ 表示事件的示性函数,称 Z_i 是 X_i 被 Y_i 随机删失的,Z_i 有连续的分布函数 H,且有 $1-H=(1-F)(1-G)$.定义 $\tau_H=\inf\{x: H(x)=1\}\leqslant\infty$,则 $f(x)$ 的估计可定义为 $f_n(x)=\dfrac{1}{nh_n}\sum\limits_{i=1}^n K\left(\dfrac{Z_i-x}{h_n}\right)\dfrac{\delta_i}{1-G(Z_i)}$,失效率函数 $\lambda(x)=\dfrac{f(x)}{1-F(x)}$,其估计可定义为 $\lambda_n(x)=\dfrac{1}{nh_n}\sum\limits_{i=1}^n K\left(\dfrac{Z_i-x}{h_n}\right)\dfrac{\delta_i}{1-H(Z_i)}$.

对 α-混合序列的大样本性质已有很多文献作了研究,如刘君[3] 研究了 α-弱相依序列加权和的几乎处处中心极限定理,杨善朝[4] 研究了 α-混合序列和的强大数律及其应用,许冰[5] 研究了 α-混合序列的完全收敛性等.对删失数据的研究近些年也得到了广泛的关注,如徐芹[6] 在 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 和 $\{Y_i, i\geqslant 1\}$ 分别是独立随机变量时,研究了删失数据下线性回归模型的参数估计;薛留根[7] 研究了删失数据下核密度估计的误差分布的强逼近等.笔者研究了在 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 是同分布 α-混合

* **收稿日期**:2013-03-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11061012);广西省高校人才小高地建设创新团队资助计划 (桂教人(2011) 47 号);广西省研究生教育创新计划项目(2011105960202M32);广西省自然科学基金资助项目(2012GXNSFAA053010)

作者简介:刘　艳(1988-),女,山西长治人,桂林理工大学理学院硕士,主要从事概率统计研究

通讯作者:吴群英(1961-),女,广西桂林人,桂林理工大学理学院教授,博士,主要从事概率统计研究,E-mail wqy666@glut.edu.cn.