第 33 卷　第 4 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 4
2012 年 7 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Jul. 2012

文章编号:1007 - 2985(2012)04 - 0025 - 06

一类图的列表强边染色*

黄会芸

(南京化工职业技术学院,江苏 南京　210048)

摘　要:给出了列表强边染色的定义,证明了若 G 为 $d(x)+d(y)\leqslant 5$,则强边选择数 $S\chi'_l(G)\leqslant 6$.

关键词:染色;强边染色;强边色数;列表强边染色;强边选择数

中图分类号:O157.5　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.3969/j.issn.1007 - 2985.2012.04.006

1　基本概念和主要结论

仅考虑有限、无向、无环但可以有平行边的图.用 $G(V,E)$ 来表示图,其中 V 表示图 G 的顶点集,E 表示图 G 的边集.图 G 的一个 k -边正常染色是指一个映射 $\varphi:E(G)\rightarrow\{1,2,\cdots,k\}$,若对任何 2 个相邻的边 e 和 e',均有 $\varphi(e)=\varphi(e')$,简称为图 G 的一个 k -边染色或称该图是 k -边可染的,最小的整数 k 称为 G 的边色数,记为 $\chi'(G)$.

图 G 的 k -强边染色是正常 k -边染色,使得没有相邻于具有相同颜色的 2 条边.若图 G 存在 k -强边染色,则称图 G 是 k -强边可染的.图 G 的强边色数是使得 G 是 k -强边可染的最小的整数 k,记为 $s\chi'(G)$.图 G 的部分强边着色是指一个满足上述条件的着色,除了 G 的某些边未被着色.

文献[1] 中提出一个公开问题:如果 G 是二部图,图中的任意一条边 $xy\in E(G)$,那么 $d(x)+d(y)\leqslant 5$.文献[2] 中证明若 $d(x)+d(y)\leqslant 5$,则 $s\chi'(G)\leqslant 6$.

给 G 的每条边 e 分配一个颜色列表 $L(e)$,称 G 是 L -强边染色的是指对每条边 e,都可从其对应列表中 $L(e)$ 找到一种染色 $f(e)\in L(e)$,使得 f 是 G 的一个强边染色.如果每条边列表长度都相同,此时强边着色数 $S\chi'_l(G)$(或强边选择数)定义为满足下面条件的最小的正整数 k,使对 G 的任一边 e,只要当 $|L(e)|\geqslant k$ 时,G 都是 L 强边可染的.设 L 为 G 的任意一个边列表分配,G 的部分 L -强边染色是部分强边染色 f 使得对于任意 $e\in E\subseteq E(G)$,有 $f(e)\in L(e)$.

文献[3] 中得到如下结论:当 $\Delta(G)\leqslant 3$ 且 $\delta(G)\leqslant 2$,则 $S\chi'_l(G)\leqslant 10$;若 G 为 3 正则图,当 $g(G)=3$ 时,$S\chi'_l(G)\leqslant 10$;若 G 为 3 正则图,当 $g(G)\geqslant 4$ 时,$S\chi'_l(G)\leqslant 11$.

笔者将证明:除了图 H_0 的列表强边色数等于 7 以外,当图的最大边度数小于等于 5 时,列表强边色数小于等于 6.其中 H_0 的构造如下:给定一个 5 圈,再增加 1 个顶点,将这个顶点与 5 圈的 2 个不相邻的顶点相连.可以看出 H_0 有 7 条边,任意 2 条边之间的距离不超过 2(如图 1 所示),从而有 $S\chi'_l(G)=7$.即证明:

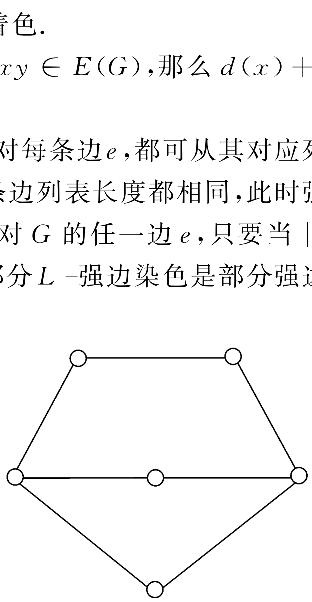

图 1　$\boldsymbol{H_0}$

定理 1　给定图 G,G 不同构于 H_0,若对图 G 的任一条边 xy,满足 $d(x)+d(y)\leqslant 5$,则当二度点相

*　**收稿日期:**2012 - 04 - 11

作者简介:黄会芸 (1979 -),女,江西高安人,南京化工职业技术学院基础部讲师,硕士,主要从事数学教学研究.

邻时,有 $S\chi'_l(G) \leqslant 6$;当二度点不相邻时,有 $S\chi'_l(G) \leqslant 7$.

2 对图的边进行排序

文献[4]利用贪心算法构造 3 正则图的一个部分强边着色并介绍了图的边排序的方法.笔者也将借用这种方法,给图进行边排序后,再利用贪心算法得到一个部分强边着色.

S 是 $V(G)$ 的顶点子集,顶点 $v \in V(G)$,$d_S(v)$ 表示 v 到 S 的距离,定义为$\min\limits_{\omega \in S}\{d(v,\omega)\}$.$S$ 是 $V(G)$ 的顶点子集,I 表示从 $V(G)$ 中的一个点到的 S 最大距离.设 $D_i = \{v \in V(G) \mid d(v,S) = i\}(i = 0,1,\cdots,I)$.定义一个从 $E(G)$ 到$[0,I]$的映射 d_S 如下:对任意一条边 $e \in E(G)$,$d_S(e) = \min\{i \mid e \cap D_i \neq \varnothing, 0 \leqslant i \leqslant I\}$.$S$ 是 $V(G)$ 的顶点子集,$R = (e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_m})$ 是图 G 的一个边序列.对任意 2 正整数 $i,j \in [1,m]$,如果 $k_i \leqslant k_j$ 意味着 $d_S(e_{k_i}) \geqslant d_S(e_{k_j})$,就称图 G 的边序列 R 关于映射 d_S 是可比较的.

设 $E(G)$ 中的任一条边 e,$E(G)$ 的强领域 $N(e)$ 是 $E(G)$ 中与 e 的距离小于等于 2 的边集合.令 f 为图 G 的部分 L -强边着色,对于未染色边 e,$E(G)$ 为部分强边染色边集.使用 $F(e)$ 表示的禁用颜色集合,$F(e) = \{f(e') \mid 1 \leqslant d_G(e,e') \leqslant 2, e' \in E'\}$.

Hall 定理 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 S 的 m 个子集,子集族 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 的一个相异代表系 SDR 是指 S 的一个子集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 满足:(ⅰ)$a_i \in A_i, i \in \{1,\cdots,m\}$;(ⅱ)对于任意 $i \neq j$,有 $a_i \neq a_j$.子集族 A 存在 SDR 当且仅当对于任意子集 $J \subseteq \{1,\cdots,m\}$ 有 $|\bigcup_{i\in j} A_i| \geqslant |J|$.

引理 1 设 G 是一个连通图,当图的最大边度数小于等于 5,L 为 G 的任意一个边列表分配,设对任意一条边 e,$|L(e)| = 6$,S 是 $V(G)$ 的任意顶点子集,R 是图 G 的关于映射 d_S 的可比较的边序列,除了满足 $d_S(e) = 0$ 的边外,利用贪心算法对边序列 R 进行着色,即可产生图 G 的一个部分强边着色.

证明 如果 e 是满足 $d_S(e) \geqslant 0$ 的一条边,那么一定存在另一条边 e',e 和 e' 有一公共的端点,并且 $d_S(e') \leqslant d_S(e)$.设 x 是 e 和 e' 的公共端点,y 是 e' 的另一端点,当利用贪心算法对 e 边着色时,与 y 关联的边还没着色.设 L 为 G 的任意边列表分配,定义 e 的禁用颜色集合 $F(e)$.从图的结构可知 $|F(e)| \leqslant 5$,即从 $|L(e)| = 6$ 的列表中总可以挑出 1 种颜色给边 e,使边 e 进行正常的 L -强边着色.

3 $d(x) + d(y) \leqslant 5$ 图的强边选择数

3.1 树的列表强边染色

定理 2 若 G 是树,则 $s\chi'_l(T) = s\chi'(T) = \sigma(G) = \max\limits_{xy \in E(G)}\{d(x) + d(y) - 1\}$.

证明 设 A 为 G 中度为 1 的顶点的集合,设 uv 为 $V(G) - A$ 所展开的树图的一条边,令 u 在 T 的度为 1,任取 $\omega \in A$,使 $uw \in E(G)$.设 L 为 G 的任意一个边列表分配,使得对任意 $e \in E(G)$,有 $|L(e)| = \sigma(G)$.假设对树 $G - \omega$ 命题成立,即对 $G - \omega$ 每条边均能从长度为 $\sigma(G - \omega)$ 的列表中选取 1 种颜色来上色.对于未着色的边 $uw \in E(G)$ 有最多 $d_{G-w}(u) + d_{G-w}(v) < d_G(u) + d_G(v) - 1 < \sigma(G)$ 种禁用色,所以对于 $u\omega$ 从它的长度为 $\sigma(G)$ 的列表中存在至少 1 种未用的颜色分配给 $u\omega$.

3.2 圈的列表强边染色

定理 3 设 C_n 是长度为 n 的圈,则 $S\chi'_l(C_6) = 3$.

证明 L 为 G 的任意一个边列表分配,f 为 G 的 L -强边染色.对于任意未染色边 e 都定义一个可利用颜色列表 $L'(e) = L(e) \backslash F(e)$,使得 G 中任意边 e,均有 $|L(e)| = 3$.

设图 G 的 6 圈为 $C = v_1v_2v_3v_4v_5v_6$,令 $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_4v_5, e_5 = v_5v_6, e_6 = v_6v_1$.

情形 1 若 $L(e_1) \cap L(e_4) = \varnothing$ 且 $L(e_2) \cap L(e_5) = \varnothing$ 且 $L(e_3) \cap L(e_6) = \varnothing$.令子集族 $e = \{e_1e_2e_3e_4e_5e_6\}$,对任意子集 $J \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$,都有 $|UL'(e_i)| \geqslant |J|$,故子集族 e 存在 SDR,即 G 是 L -强边可染的.

情形 2 若 $L(e_1) \cap L(e_4) \neq \varnothing$ 或 $L(e_2) \cap L(e_5) \neq \varnothing$ 或 $L(e_3) \cap L(e_6) \neq \varnothing$.设 f 为 G 的 L -强边染色.不妨令 $f(e_1) = f(e_4) = a \in L(e_1) \cap L(e_4)$.给 e_2, e_3, e_5 的颜色分别为 b,c,d.对 e_6 而言,若 $L(e_6) \neq \{a,b,d\}$,则命题成立.若 $L(e_6) = \{a,b,d\}$,考虑 e_5,若 $L(e_5) \neq \{a,c,d\}$ 则将 e_5 换色,命题成

立.假设 $L(e_5)=\{a,c,d\}$,再考虑 e_3,若 $L(e_3)\neq\{a,b,c\}$ 则将 e_3 换色,命题成立.若 $L(e_3)=\{a,b,c\}$,有 $f(e_3)=f(e_6)=b$,$f(e_1)=f(e_4)=a$,则 e_2,e_5 可正常染色,命题成立.

定理 4 设 C_n 是长度为 n 的圈,则

$$S\chi'_l(C_n)=\begin{cases}4 & n=4,\\ 5 & n=5,\\ 4 & n\geqslant 6 \text{ 且 } n\neq 3k.\end{cases}$$

证明 由列表强边着色的定义,可得到 $S\chi'_l(C_3)=3$,$S\chi'_l(C_4)=4$,$S\chi'_l(C_5)=5$.

由定理 3 得 $S\chi'_l(C_6)=3$.下证当 $n\geqslant 6$ 且 $n\neq 3k$ 时 $S\chi'_l(C_n)=4$.

设圈 $C_n=v_1v_2v_3v_4v_5v_6\cdots v_n$,$e_i=v_iv_{i+1}$,$i=1,\cdots,n-i$,$e_n=v_nv_1$.设 L 为 G 的任意一个边列表分配.f 为 G 的 L -强边染色.对于任意未染色边 e 都定义一个可利用颜色列表 $L'(e)=L(e)\backslash F(e)$.

情形 1 $L(e_1)\cap L(e_4)\neq\varnothing$.不妨令 $f(e_1)=f(e_4)=a\in L(e_1)\cap L(e_4)$.从 e_2 开始一直到 e_n 依次着色,可以看出 $|L'(e_2)|\geqslant 3$,$|L'(e_3)|\geqslant 2$,$|L'(e_5)|\geqslant 2$,$|L'(e_6)|\geqslant 2,\cdots$,$|L'(e_{n-1})|\geqslant 2$,$|L'(e_n)|\geqslant 1$,即 $|L(e)|=4$,可以得到 L -强边染色.

情形 2 $L(e_1)\cap L(e_4)=\varnothing$,先对 e_5 从开始一直到 e_n 依次着色,$|L(e)|=4$,可以得到 L -强边染色.对于边 $e_1e_2e_3e_4$,$|L'(e_1)|\geqslant 2$,$|L'(e_2)|\geqslant 3$,$|L'(e_3)|\geqslant 3$,$|L'(e_4)|\geqslant 2$,由 $L(e_1)\cap L(e_4)=\varnothing$,则 $|L'(e_1)\cup L'(e_4)|\geqslant 4$,对于任意子集 $J\subseteq\{1,2,3,4\}$ 都有 $|\bigcup L'(e_i)|\geqslant|J|$ $(i=1,2,3,4)$,故 L' 存在 SDR,根据 Hall 定理用 $|L(e)|=4$,就可以得到 L -强边染色.

假设 G 是连通图,若 $\Delta(G)=4$,则 G 同构于 $k_{1,4}$,显然 $S\chi'_l(k_{1,4})=4$;若 $\Delta(G)=1$,则 $S\chi'_l(G)=1$.下面分别证明 $\Delta(G)=2$,$\Delta(G)=3$ 的情形,定理 1 的证明由下面一系列的定理组成.

3.3 $\boldsymbol{\Delta(G)=2}$ 的图的列表强边染色

定理 5 设 P_n 是 n 个顶点的路,则 $S\chi'_l(P_n)=3(n\geqslant 4)$.

证明 当 $n=2$ 时,$S\chi'_l(P_2)=1$;当 $n=3$ 时,$S\chi'_l(P_3)=2$;当 $n\geqslant 4$ 时,令 $P_n=v_1v_2v_3v_4v_5v_6\cdots v_n$,对应边为 $e_1e_2\cdots e_ne_{n-1}$.设 L 为 G 的任意一个边列表分配,使得 G 中任意边 e 均有 $|L(e)|=3$.对 G 按照从左到右顺序着色.从 $L(e_1)$ 中任取一色 a 给边 e_1,再从 $L(e_2)$ 中任取异于 a 的颜色 b 给边 e_2,接下来从 $L(e_3)$ 中任取异于 a,b 的颜色给边 e_3,由此类推,对 e_n 的着色可从 $L(e_n)$ 中选取异于 e_{n-1},e_{n-2} 的颜色.故 $|L(e)|=3$,即可对 P_n 进行 L -强边着色,即 $S\chi'_l(P_n)\leqslant 3(n\geqslant 4)$.另一方面由于 $S\chi'_l(P_n)=3\leqslant 6$,因此定理成立.

3.4 $\boldsymbol{\Delta(G)=3}$ 的图的列表强边染色

定理 6 如果图 G 有一顶点的度为 1,那么 $S\chi'_l(G)\leqslant 6$.

证明 设 v_0 是度为 1 的顶点,e_0 是和 v_0 关联的边.由图 G 的结构可知,令 $S=\{v_0\}$,由引理 1,除 e_0 外所有边是 L -强边可染的.由于 $|N(e_0)|\leqslant 4$,因此边 e_0 也可正常着色.从而,$S\chi'_l(G)\leqslant 5\leqslant 6$,即命题成立.

下面假定图 G 没有度为 1 的顶点.

定理 7 如果图 $g(G)=2$ 或 3,那么 $S\chi'_l(G)\leqslant 6$.

证明 设 S 是由图 G 中最小圈的顶点组成的集合.首先利用贪心算法对 G 中所有满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行着色.当 $g(G)=2$ 时,$|L'(e_0)|\geqslant 3$,$|L'(e_1)|\geqslant 5$,$|L'(e_2)|\geqslant 5$,对于任意子集 $J\subseteq\{0,1,2\}$ 都有 $|UL'(e_i)|\geqslant|J|$ $(i=0,1,2)$,故 L' 存在 SDR,根据 Hall 定理用 $|L(e)|=6$ 就可以得到 L -强边染色.同理,当 $g(G)=3$ 时,$|L'(e_0)|\geqslant 3$,$|L'(e_1)|\geqslant 5$,$|L'(e_2)|\geqslant 6$,$|L'(e_3)|\geqslant 5$,故 L' 存在 SDR,根据 Hall 定理,$S\chi'_l(G)\leqslant 6$,即命题成立.

定理 8 如果图 $g(G)=4$,那么 $S\chi'_l(G)\leqslant 6$.

证明 设 L 是图 G 的任意一个边列表分配,使得对任意 $e\in E(G)$,有 $|L(e)|=6$.设 $\varnothing$ 为 G 的部分 L -强边染色,对于任意未染色边 e 都定义一个可利用颜色列表 $L'(e)=L(e)\backslash F(e)$.当 $|E(G)\leqslant 6|$ 时,显然命题成立.假设 $|E(G)|>6$,设图 G 的 4 -圈为 $C=v_1v_2v_3v_4$,并设 $S=V(C)$.如果在 C 中至多有 1 个 3 度点,首先利用贪心算法对 G 中所有满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行着色,那么 $|L'(e_0)|\geqslant 3$,$|L'(e_1)|\geqslant$

5，$|L'(e_2)|\geqslant 6$，$|L'(e_3)|\geqslant 6$，$|L'(e_4)|\geqslant 5$，故 L' 存在 SDR，根据 Hall 定理用 $|L(e)|=6$，就可以得到 L-强边染色.

下面考虑 C 中恰好有 2 个不相邻的 3 度点的情形.

不妨设 $d(v_1)=d(v_3)=3$，设与 v_1 和 v_3 相邻的点分别为 u_1 和 u_3，令 $e_1=v_1v_2$，$e_2=v_2v_3$，$e_3=v_3v_4$，$e_4=v_4v_1$，$f_1=v_1u_1$，$f_3=v_3u_3$. 如果 $u_1=u_3$，那么 G 与 $K_{2,3}$ 同构，显然 $S\chi'_l(K_{2,3})\leqslant 6$. 假设 $u_1\neq u_3$，如果 $u_1u_3\in E(G)$，那么 G 与 H_0 同构. 因此，假设 $u_1u_3\notin E(G)$，设 u_1 的另一邻点是 ω_1，u_3 的另一邻点是 ω_3. 首先利用贪心算法对 G 中所有满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行着色. 下面将 $\emptyset$ 扩展成整个图的 L-强边着色.

情形 1 若 $L'(f_1)\cap L'(f_3)\neq\emptyset$，则可令 $\emptyset(f_1)=\emptyset(f_3)\in L'(f_1)\cap L'(f_3)$，此时可看出，$|L'(e_i)|\geqslant 4(i=1,2,3,4)$，所以可以从 $L'(e_i)$ 中挑出 1 种颜色给每条边着色，从而得到图 G 的 $|L(e)|=6$ 的 L-强边着色.

情形 2 若 $L'(f_1)\cap L'(f_3)=\emptyset$，对于任意子集 $J\subseteq\{i,j\}(i=1,2,3;j=1,3)$ 都有 $|\bigcup L'(e_i)\cup L'(f_j)|\geqslant|J|$，则 $L'=\{L'(e)\mid e$ 为未染色边$\}$ 存在 SDR，那么 $\emptyset$ 扩展到 G.

定理 9 如果图 $g(G)=5$，那么 $S\chi'_l(G)\leqslant 6$.

证明 设 $C=v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ 是图 G 的一个 5-圈，并设 $S=v(C)$. 设 $\emptyset$ 为 G 的部分 L-强边染色，下面将 $\emptyset$ 扩展到 G. 对于任意未染色边 e 都定义一个可利用颜色列表 $L'(e)$. 如果在 C 中至多有 1 个 3 度点，首先利用贪心算法对 G 中所有满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行着色，那么 $|L'(e_0)|\geqslant 3$，$|L'(e_1)|\geqslant 6$，$|L'(e_2)|\geqslant 5$，$|L'(e_3)|\geqslant 5$，$|L'(e_4)|\geqslant 6$，$|L'(e_5)|\geqslant 6$，对于任意子集 $J\subseteq\{0,1,2,3,4,5\}$ 都有 $|\bigcup L'(e_i)|\geqslant|J|(i=0,1,2,3,4,5)$，故 L' 存在 SDR，根据 Hall 定理用 $|L(e)|=6$，就可以得到 L-强边染色.

下面考虑 C 中恰好有 2 个不相邻的 3 度点的情形.

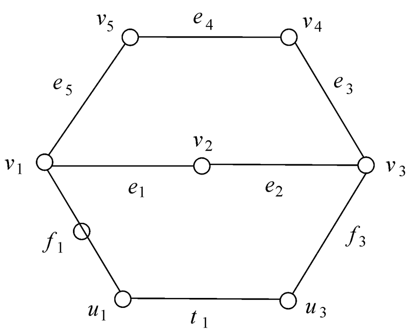

图 2　图 *G* 围长为 5

不妨设 $d(v_1)=d(v_3)=3$，设与 v_1 和 v_3 相邻的点分别为 u_1 和 u_3，令 $e_1=v_1v_2$，$e_2=v_2v_3$，$e_3=v_3v_4$，$e_4=v_4v_5$，$e_5=v_5v_1$，$f_1=v_1u_1$，$f_3=v_3u_3$，由于 G 没有 4-圈，因此必有 $u_1\neq u_3$. 如果 $u_1u_3\in E(G)$，如图 2 所示，先用 $|L(e)|=6$ 对 $e_1e_2e_3e_4e_5$ 进行 L-强边着色. 对于剩下 3 条边 f_1,f_3,t_1，$|L'(f_1)|\geqslant 2$，$|L'(f_2)|\geqslant 2$，$|L'(t_1)|\geqslant 2$. 又因为 $F(f_3)=\{e_1e_2e_3e_4\}$，$F(f_1)=\{e_1e_2e_4e_5\}$，$F(t_1)=\{e_1e_2e_3e_5\}$，$|\bigcup L'(f_1)\cup L'(f_2)\cup L'(t_1)|\geqslant 3$，所以 L' 存在 SDR，根据 Hall 定理用 $|L(e)|=6$，就可以得到 L-强边染色. 现在考虑 $u_1u_3\notin E(G)$，设 u_1 的另一邻点是 ω_1，u_3 的另一邻点是 ω_3. $t_1=u_1\omega_1$，$t_3=u_3\omega_3$，首先利用贪心算法对 G 中所有满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行着色. 若 $L'(f_1)\cap L'(f_3)\neq\emptyset$，则可令 $\emptyset(f_1)=\emptyset(f_3)\in L'(f_1)\cap L'(f_3)$，此时可看出 $|L'(e_i)|\geqslant 4(i=1,2,3,5)$，$|L'(e_4)|\geqslant 5$，这样可以按照边的次序 $e_3e_2e_1e_5e_4$，从每条边 e_i 的 $L'(e_i)$ 中选取 1 种颜色给这 5 条边着色，从而将 $\emptyset$ 扩充成整个图 G 的 L-强边着色. 若 $L'(f_1)\cap L'(f_3)=\emptyset$，则对于未着色的 7 条边，$|L'(e_4)|=6(i=1,2,3,5)$，$|L'(e_i)|\geqslant 5(i=1,2,3,5)$，$|L'(f_i)|\geqslant 3(i=1,3)$.

情形 1 $|\bigcup\limits_{i=1}^{5}L'(e_i)\cup L'(f_1)\cup L'(f_3)|=7$，对于任意子集 $J\subseteq\{i,j\}(i=1,2,3,4,5;j=1,3)$，都有 $|\bigcup L'(e_i)\cup L'(f_j)|\geqslant|J|$，则 $L'=\{L'(e)\mid e$ 为未染色边$\}$ 存在 SDR，那么 $\emptyset$ 扩展到 G.

情形 2 $|\bigcup\limits_{i=1}^{5}L'(e_i)\cup L'(f_1)\cup L'(f_3)|=6$，则 $L'(f_1)\cap L'(e_3)\neq\emptyset$. 不妨令 $\emptyset(f_1)=a$，$\emptyset(f_3)=b$，$\emptyset(e_3)=a$，则 $|L'(e_4)|\geqslant 4$，$|L'(e_5)|\geqslant 4$，$|L'(e_1)|\geqslant 3$，$|L'(e_2)|\geqslant 3$. 按照次序 $e_2e_1e_5e_4$，从 $e_i(i=2,1,5,4)$ 的 $L'(e_i)$ 中选取 1 种颜色给这 4 条边着色，从而将 $\emptyset$ 扩充成整个图 G 的 L-强边着色.

定理 10 如果图 $g(G)=6$，那么 $S\chi'_l(G)\leqslant 6$.

证明 设 $C=v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ 是图 G 的一个 6-圈，并设 $S=v(C)$. 首先利用贪心算法对 G 中所有

满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行着色.设 $\varnothing$ 为 G 的部分 L -强边染色,那么 $|L'(e_i)|\geqslant 3(i=1,2,3,4,5,6)$.根据定理 3 知可以将 $\varnothing$ 扩展到 G.

定理 11　如果 G 有 2 个相邻的度为 2 的点,且 $g(G)\geqslant 7$,那么 $S\chi_l'(G)\leqslant 6$.

证明　由定理 7,8,9,10,可假设 G 的围长至少是 7.设 v_1,v_2 是 2 个相邻的度为 2 的点,如图 3 所示.设与 v_1,v_2 相邻的点分别为 u_1,u_2,设 $e_1=v_1v_2,f_1=v_1u_1,f_2=v_2u_2$,设 $N(u_1)=\{v_1w_1w_2\},N(u_2)=\{v_2w_3w_4\}$.由于 G 中没有圈长小于 6 的圈,也没有度为 1 的点,因此 $w_1w_2w_3w_4$ 是度为 2 的 4 个不同点,$g_1=u_1w_1,g_2=u_2w_2,g_3=u_2w_3,g_4=u_2w_4$.设 L 为 G 的任意一个边列表分配,对于任意未染色的边 e 定义一个可利用颜色列表 $L'(e)$,$\varnothing$ 为 G 的部分 L -强边染色,令 $S=\{v_1,v_2,u_1,u_2\}$.利用贪心算法对满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行部分 L -强边染色,此时 $|L'(e_1)|\geqslant 6,|L'(f_i)|\geqslant 4,|L'(g_i)|\geqslant 2$.

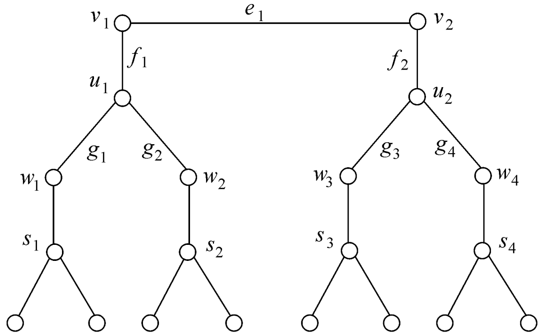

图 3　图 G 围长至少为 7

情形 1　$|\bigcup\limits_{i=1}^{4}L'(g_i)|\geqslant 7$,对于任意子集 $J\subseteq\{i,j,k\}(i=1;j=1,2;k=1,2,3,4)$ 都有 $|\bigcup L'(e_i)\bigcup L'(f_j)\bigcup L'(g_k)|\geqslant|J|$,则 $L'=\{L'(e)\mid e$ 为未染色边$\}$ 存在 SDR,那么 $\varnothing$ 扩展到 G.

情形 2　$2\leqslant|\bigcup\limits_{i=1}^{4}L'(g_i)|\leqslant 3$,则 $|L'(e_1)|\geqslant 3,|L'(f_1)|\geqslant 2,|L'(f_2)|\geqslant 2$.利用贪心着色算法按次序从每条边的列表中选取 1 种颜色来依次着色,从而 $\varnothing$ 扩展到 G.

情形 3　$4\leqslant|\bigcup\limits_{i=1}^{4}L'(g_i)|\leqslant 6$.

情形 3.1　$4\leqslant|\bigcup\limits_{i=1}^{4}L'(g_i)|\leqslant 6$,且 $L'(g_1)\cap L'(f_2)\neq\varnothing$ 或 $L'(g_2)\cap L'(f_2)\neq\varnothing$ 或 $L'(g_3)\cap L'(f_1)\neq\varnothing$ 或 $L'(g_4)\cap L'(f_1)\neq\varnothing$.不妨令 $\varnothing(g_1)=\varnothing(f_2)=a\in L'(g_1)\cap L'(f_2)\neq\varnothing$,则 $|L'(e_1)|\geqslant 2,|L'(f_1)|\geqslant 2$,依次序 $g_2g_3g_4f_1e_1$ 用贪心算法即可得到正常着色.

情形 3.2　$4\leqslant|\bigcup\limits_{i=1}^{4}L'(g_i)|\leqslant 6$ 或 $L'(g_1)\cap L'(g_3)\neq\varnothing$ 或 $L'(g_1)\cap L'(g_4)\neq\varnothing$ 或 $L'(g_2)\cap L'(g_3)\neq\varnothing$ 或 $L'(g_2)\cap L'(g_4)\neq\varnothing$,不妨令 $\varnothing(g_1)=\varnothing(g_3)=a$,则 $|L'(e_i)|\geqslant 3,|L'(f_1)|\geqslant 2,|L'(f_2)|\geqslant 2$,按照次序用贪心算法从每条边的列表中选取 1 种颜色来依次着色,从而 $\varnothing$ 扩展到 G.

情形 3.3　$4\leqslant|\bigcup\limits_{i=1}^{4}L'(g_i)|\leqslant 6$ 且 $L'(g_i)\cap L'(f_j)=\varnothing$,当 $i=1,2,j=2$,当 $i=3,4,j=1$,不妨设 $L'(e_1)=\{1,2,3,4,5,6\}$,由题设分析可得 $L'(g_1)=L'(g_2)=\{1,2\}$.$L'(f_2)=\{3,4,5,6\}$,$L'(g_3)=\{3,4\}$,$L'(g_4)=\{3,4\}$,此时,$L'(f_1)$ 只能为$\{1,2,5,6\}$ 而无法得到正常的 L -强边着色.可分析边 w_4s_4,此时不妨令 $\varnothing(w_4s_4)=2$,边 w_4s_4 除着色 2 外还有选择 1 或 3 或 4.可将 $\varnothing(w_4s_4)=2$ 改为 $\varnothing(w_4s_4)=1$ 或 3 或 4,则 $L'(g_3)$,$L'(g_4)$ 随之改变,即可得到 L -列表强边着色.

定理 12　如果任意 2 度点不相邻,且 $g(G)\geqslant 8$,那么 $S\chi_l'(G)\leqslant 7$.

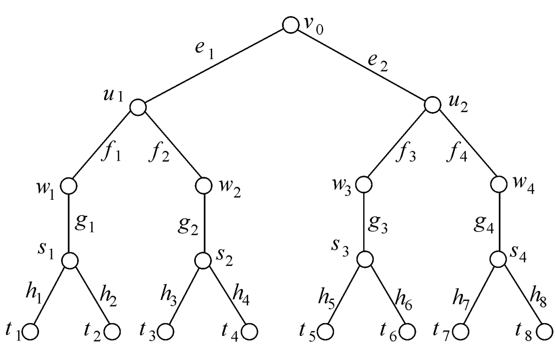

图 4　图 G 的围长至少为 8

证明　假定 G 是连通图并且没有 1 度点.设 v_0 是度为 2 的点且 $N(v_0)=\{u_1u_2\}$,如图 4 所示.设 L 为 G 的任意一个边列表分配,对于任意未染色的边 e 定义一个可利用颜色列表 $L'(e)$.设 $\varnothing$ 为 G 的部分 L -强边染色,令 $S=\{v_0\}$.利用贪心算法对满足 $d_S(e)\geqslant 0$ 的边进行部分 L -强边染色.此时 $|L'(e_1)|\geqslant 1,|L'(e_2)|\geqslant 1$,由于已着色,下面根据 f_i 着色的色类可分为 2,3,4 这 3 类:

情形 1　当 $|\varnothing(f_i)|\leqslant 3$,此时 $|L'(e_1)|\geqslant 2$,$|L'(e_2)|\geqslant 2$,则 e_1e_2 可正常着色,从而 $\varnothing$ 扩展到

G.

情形2 当 $|\varnothing(f_i)|=4$,此时 $|L'(e_1)|\geqslant 1$,$|L'(e_2)|\geqslant 1$,考虑边 g_1g_2 的着色.

情形2.1 当 $\varnothing(g_1)=\varnothing(g_2)$,此时 $|L'(e_1)|\geqslant 2$,$|L'(e_2)|\geqslant 2$,则 e_1e_2 可正常着色.

情形2.2 当 $\varnothing(g_1)=\varnothing(f_3)$ 或 $\varnothing(g_1)=\varnothing(f_4)$ 或 $\varnothing(g_2)=\varnothing(f_3)$ 或 $\varnothing(g_2)=\varnothing(f_4)$,此时 $|L'(e_1)|\geqslant 2$,$|L'(e_2)|\geqslant 2$,则 e_1e_2 可正常着色.

情形2.3 当 $\varnothing(g_1)\neq\varnothing(g_2)$ 且 $\varnothing(g_1)\neq\varnothing(f_3)$ 且 $\varnothing(g_1)\neq\varnothing(f_4)$,不妨设 $\varnothing(f_1)=a$,$\varnothing(f_2)=b$,$\varnothing(f_3)=c$,$\varnothing(f_4)=d$,$\varnothing(g_1)=x$,$\varnothing(g_2)=y$,$\varnothing(g_3)=z$,$\varnothing(g_4)=m$,$L_1=\{a,b,c,d,x,y)$,$L_2=\{a,b,c,d,z,m\}$.

情形2.3.1 若 $|L(e_1)\cap L_1|\leqslant 5$ 或 $|L(e_2)\cap L_2|\leqslant 5$,则 e_1e_2 可正常着色.

情形2.3.2 若 $|L(e_1)\cap L_1|=6$ 且 $|L(e_2)\cap L_2|=6$,不妨令 $L(e_1)=\{a,b,c,d,x,y,A\}$,$L(e_2)=\{a,b,c,d,z,m,B\}$.

情形2.3.2.1 若 $A\neq B$,令 $\varnothing(e_1)=A$,$\varnothing(e_2)=B$,则 e_1e_2 可正常着色.

情形2.3.2.2 若 $A=B$,则对 g_1 进行换色.由于 $|L'(g_1)|\geqslant 3$,对 g_1 而言,除色 x 外,还有另外2种色 α,β 可选,如将 $\varnothing(g_1)=x$ 换为 $\varnothing(g_1)=\alpha$.若 $\alpha\neq\varnothing(f_1)=a$ 且 $\alpha\neq\varnothing(f_2)=b$,则可令 $\varnothing(e_1)=e$,$\varnothing(e_2)=A$ 即可完成着色.若 $\alpha=\varnothing(f_1)=a$ 且 $\alpha=\varnothing(f_2)=b$,则 f_1 随之换色,令 $\varnothing(f_1)=a$,此时可令 $\varnothing(e_1)=A$,$\varnothing(e_2)=a$ 即可完成着色.

参考文献:

[1] FAUDREE R J,SCHELP R H,GYARFAS A,et al. The Strong Chromatic Index of Graphs [J]. Ars Combinatoria,1990,29B:205-211.

[2] WU Jian-zhuan. The Strong Chromatic Index of a Class of Graphs [J]. Discrete Mathematics,2008,308:6 254-6 261.

[3] 朱海洋. Delta(G)=3 的图的列表强边染色 [J]. 山东理工大学学报,2008,22:54-58.

[4] ERDOS P. Problems and Results in Combinatorial Analysis and Graph Theory [J]. Discrete Mathematics,1988,72:81-92.

List Strong Edge Coloring of Some Graphs

HUANG Hui-yun

(Nanjing Colleng of Chemical Technology,Nanjing 210048,China)

Abstract:List strong edge coloring is defined. It is proved that if G is a graph with $d(x)+d(y)\leqslant 5$,then $S\chi'_l(G)\leqslant 6$.

Key words:coloring;strong edge coloring;strong edge chromatic number;list strong edge coloring;strong edge choice number

(责任编辑 向阳洁)