

文章编号:1007-2985(2012)05-0009-03

图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美性*

吴跃生

(华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:图 C_7 的 $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0)$ -冠简记为 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0)$, $St(m)$ 表示有 $m+1$ 个顶点或有 m 条边的星形树. 讨论了 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0)$ 与 $St(m)$ 的非连通并集 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 优美性, 用构造性的方法给出了一些特殊的 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美标号.

关键词:非连通图; 图冠; 星; 优美图

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

DOI:10.3969/j.issn.1007-2985.2012.05.002

1 相关概念

优美图集广泛的应用性和趣味性于一身, 因而优美图的研究是图论中较为活跃的课题之一^[1-22].

定义 1^[2-15] $V(G) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 的每个顶点 v_i 都粘接了 r_i 条悬挂边 ($r_i \geq 0$ 的整数, $i=1, 2, \dots, n$) 所得到的图, 称为图 G 的 (r_1, r_2, \dots, r_n) -冠, 简记为 $G(r_1, r_2, \dots, r_n)$. 特别地, 当 $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ 时, 称为图 G 的 r -冠. 图 G 的 0-冠就是图 G .

定义 2^[1] 对于一个图 $G = (V, E)$, 如果存在一个单射 $\theta: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E(G)|\}$ 使得对所有边 $e = (u, v) \in E(G)$, 由 $\theta'(e) = |\theta(u) - \theta(v)|$ 导出的 $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ 是一个双射, 那么称 G 是优美图, θ 是 G 的一组优美标号, 称 θ' 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值.

许多学者讨论了星形树与其他图的非连通并集的优美性^[16-22]. 笔者讨论了 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0)$ 与星形树 $St(m)$ 的非连通并集 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美性, 用构造性的方法给出了一些特殊的 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美标号, 证明了一些特殊的 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 是优美图.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的顶点集如图 1 所示. 对于任意自然数 m , 且当 r_i 为自然数 ($i=1, 2, 3, 4, 5$), $r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 = m - 2$ 时, 图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 是优美图, 其中 $St(m)$ 表示有 $m+1$ 个顶点或有 m 条边的星形树.

证明 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的顶点标号 θ 定义为: 当 $r_j = 0$ 时, $x_{j,i} = v_j, j=1, 2, 3, 4, 5, i=1, 2, \dots, r_j$; 当 $r_j \neq 0 (j=1, 2, 3, 4, 5)$ 时,

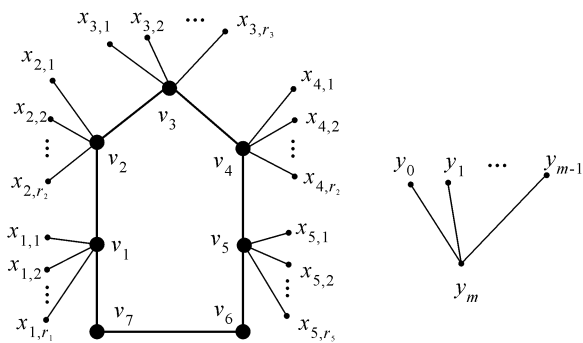


图 1 $C_7(r_1, r_2, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的顶点集

* 收稿日期:2012-06-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11061014); 江西省自然科学基金资助项目(20114BAB201010); 华东交通大学校立科研基金资助项目(11JC05)

作者简介:吴跃生(1959-), 男, 江西瑞金人, 华东交通大学基础科学学院副教授, 硕士, 主要从事图论研究.

$$\begin{aligned} \theta(v_7) &= 3m + 3, \theta(v_1) = 0, \theta(x_{1,i}) = 3m + 3 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_1, \\ \theta(v_2) &= \theta(x_{1,r_1}) - 1 = 3m + 2 - r_1, \theta(x_{2,i}) = \theta(v_1) + i = i \quad i = 1, 2, \dots, r_2, \\ \theta(v_3) &= \theta(x_{2,r_2}) + 1 = r_2 + 1, \theta(x_{3,i}) = \theta(v_2) - i = 3m + 2 - r_1 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_3, \\ \theta(v_4) &= \theta(x_{3,r_3}) - 1 = 3m + 1 - r_1 - r_3, \theta(x_{4,i}) = \theta(v_3) + i = r_2 + 1 + i \quad i = 1, 2, \dots, r_4, \\ \theta(v_5) &= \theta(x_{4,r_4}) + 1 = r_2 - r_4 + 2 = m, \theta(x_{5,i}) = \theta(v_4) - i = 3m + 1 - r_1 - r_3 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_5, \\ \theta(v_6) &= \theta(x_{5,r_5}) - 1 = 3m + 1 - r_1 - r_3 - r_5 - 1 = 3m - (m - 2) = 2m + 2, \\ \theta(y_i) &= m + 1 + i \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

易证对于任意自然数 m , 且当 r_i 为自然数 ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 = m - 2$ 时, $\theta: V(C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 3m + 3\}$ 是一个单射.

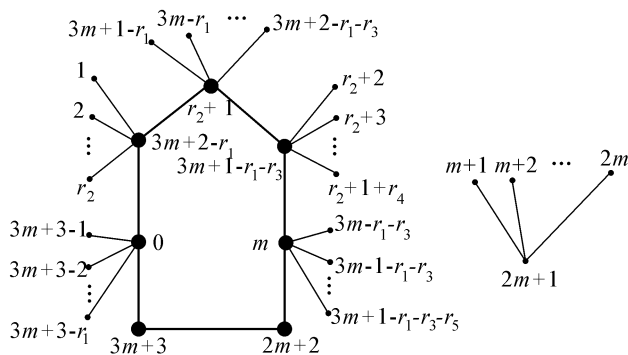
由点标号 θ 导出的边标号 θ' 为:

$$\begin{aligned} \theta'(v_7v_1) &= 3m + 3, \theta'(v_1x_{1,i}) = 3m + 3 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_1, \\ \theta'(v_1v_2) &= 3m + 2 - r_1, \theta'(v_2x_{2,i}) = 3m + 2 - r_1 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_2, \\ \theta'(v_2v_3) &= 3m + 1 - r_1 - r_2, \theta'(v_3x_{3,i}) = 3m + 1 - r_1 - r_2 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_3, \\ \theta'(v_3v_4) &= 3m - r_1 - r_2 - r_3, \theta'(v_4x_{4,i}) = 3m + 1 - r_1 - r_2 - r_3 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_4, \\ \theta'(v_4v_5) &= 3m - 1 - r_1 - r_2 - r_3 - r_4 = 2m + 1 - r_1 - r_3, \\ \theta'(v_5x_{5,i}) &= 2m + 1 - r_1 - r_3 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_5, \\ \theta'(v_5v_6) &= m + 2, \theta'(v_6v_7) = m + 1, \theta'(y_m y_i) = m - i \quad i = 0, 1, \dots, m - 1. \end{aligned}$$

易证对于任意自然数 m , 且当 r_i 为自然数 ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 = m - 2$ 时, $\theta': E(C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3m + 3\}$ 是一个双射.

故 θ 是图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美标号, 即图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 是优美图.

对于任意自然数 m , 且当 r_i 为自然数 ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), $r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 = m - 2$ 时, 图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美标号, 如图 2 所示.



在定理 1 中, 令 $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0, m = 2$, 有如下结论:

推论 1 图 $C_7 \cup St(2)$ 是优美图.

定理 2 设 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的顶点集如图 1 所示. 对于任意自然数 r_1, m , 图 $C_7(r_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(m)$ 是优美图, 其中 $St(m)$ 表示有 $m + 1$ 个顶点或有 m 条边的星形树.

证明 $C_7(r_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(m)$ 的顶点标号 θ 定义为: 当 $r_1 = 0$ 时, $x_{1,i} = v_1, i = 1, 2, \dots, r_1$; 当 $r_1 \neq 0$ 时,

图 2 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美符号 $\theta(v_1) = 0, \theta(x_{1,i}) = 8 + m + r_1 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_1,$

$$\begin{aligned} \theta(v_2) &= \theta(x_{1,r_1}) - 1 = m + 7, \theta(v_3) = 3, \theta(v_4) = \theta(v_2) - 2 = m + 5, \\ \theta(v_5) &= \theta(v_4) - 1 = m + 2, \theta(v_6) = 1, \theta(v_7) = \theta(v_2) - 1 = m + 6, \\ \theta(y_i) &= \begin{cases} 2 & i = m, \\ 4 + i & i = 0, 1, \dots, m - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

易证对于任意自然数 $r_1, m, \theta: V(C_7(r_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(m)) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 7 + m + r_1\}$ 是一个单射.

由点标号 θ 导出的边标号 θ' 为:

$$\begin{aligned} \theta'(v_7v_1) &= m + 6, \theta'(v_1v_2) = m + 7, \theta'(v_2v_3) = m + 4, \theta'(v_3v_4) = m + 2, \theta'(v_4v_5) = 1, \\ \theta'(v_5v_6) &= m + 3, \theta'(v_6v_7) = m + 5, \theta'(v_1x_{1,i}) = m + r_1 + 8 - i \quad i = 1, 2, \dots, r_1, \\ \theta'(y_m y_i) &= 2 + i \quad i = 0, 1, \dots, m - 1. \end{aligned}$$

易证对于任意自然数 $r_1, m, \theta: E(C_7(r_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(m)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 7 + m + r_1\}$ 是一个双射.

故 θ 是图 $C_7(r_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美标号, 即图 $C_7(r_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(m)$ 是优美图.

在定理 2 中, 令 $r_1 = 0, m$ 为任意自然数, 有如下结论:

推论 2 图 $C_7 \cup St(m)$ 是优美图.

如图 3 所示, 根据定理 1, 给出图 $C_7(1, 2, 3, 3, 1, 0, 0) \cup St(7)$ 的优美标号; 如图 4 所示, 根据定理 2, 给出图 $C_7(5, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(7)$ 的优美标号.

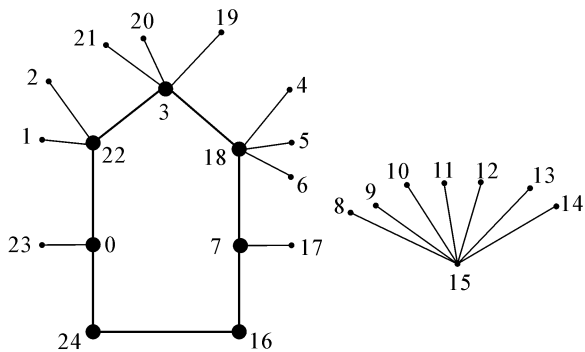


图 3 $C_7(1, 2, 3, 3, 1, 0, 0) \cup St(7)$ 的优美符号

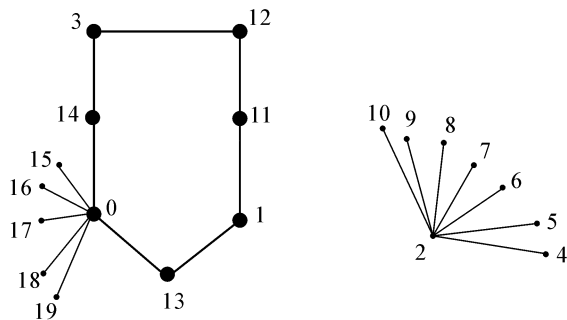


图 4 $C_7(5, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cup St(7)$ 的优美符号

3 结语

研究了图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 是优美图的优美性, 图 $C_n(r_1, r_2, \dots, r_{n-2}, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美性值得进一步研究.

参考文献:

[1] 马杰克. 优美图 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.

[2] 吴跃生. 关于图 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性 [J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(1): 77-80.

[3] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 C_{4h+3} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ -冠的优美性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2011, 32(6): 1-4.

[4] 吴跃生, 李咏秋. 再探图 C_n 的 (r_1, r_2, \dots, r_n) -冠 ($n=7, 8$) 的优美性 [J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版, 2010, 27(4): 1-4.

[5] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 C_3 的 $(1, 2a, 2a+1)$ -冠的优美性 [J]. 河南教育学院学报, 2010(4): 1-2.

[6] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 C_n 的 (r_1, r_2, \dots, r_n) -冠 ($n=7, 8$) 的优美性 [J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版, 2010, 27(3): 20-23.

[7] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 C_{11} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{11})$ -冠的优美性 [J]. 长春师范学院学报, 2010, 29(6): 4-8.

[8] 吴跃生. 图 C_3 的 (r_1, r_2, r_3) -冠都是优美的 [J]. 河南教育学院学报, 2012, 21(1): 15-17.

[9] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 $\omega_{4,4}$ 的 (r_1, r_2, \dots, r_7) -冠的优美性 [J]. 宜春学院学报, 2010, 32(12): 1-3.

[10] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 $\omega_{5,7}$ 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{11})$ -冠的优美性 [J]. 嘉应学院学报, 2011, 29(5): 5-8.

[11] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 $\omega_{5,6}$ 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{10})$ -冠的优美性 [J]. 北京联合大学学报: 自然科学版, 2011, 25(2): 60-62.

[12] 吴跃生. 关于图 $\omega_{4,6}$ 的 (r_1, r_2, \dots, r_9) -冠的优美性 [J]. 宜春学院学报, 2011, 33(8): 1-3.

[13] 康芳茂, 吴跃生. 关于图 $C_n \odot k_1$ 的 $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠 ($n=3, 4$) 的优美性 [J]. 赣南师范学院学报, 2011, 32(6): 25-27.

[14] 康芳茂, 吴跃生. 关于图 $C_6 \odot k_1$ 的 $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_6)$ -冠的优美性 [J]. 怀化学院学报, 2011, 30(5): 8-10.

[15] 吴跃生, 李咏秋. 关于图 $C_n \odot k_1$ 的 $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠 ($n=5$) 的优美性 [J]. 喀什师范学院学报, 2011, 32(6): 11-12.

[16] 潘伟. 路线. 两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n}) \cup T_n$ 的优美性 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2003, 41(4): 153-155.

体 V 的上半部分, V 即整个大环体去掉内部小环体的部分, 由定理 1 知其体积为 $V = 2\pi \cdot 4\pi \cdot 2 - 2\pi \cdot \pi \cdot 2 = 12\pi^2$, 从而 $V_2 = \frac{1}{2}V = 6\pi^2$, 再由定理 1 知 $\bar{x} = \frac{V_2}{2S\pi} = 2$ (也可以直接根据图形的对称性知 $\bar{x} = 2$), 所以平面图形 2 的形心 $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, \frac{28}{9\pi})$.

可见, 在一定条件下, 使用定理 1 中的公式不仅可以非常方便地求出某些旋转体的体积, 还可以方便地求出某些平面图形的形心.

参考文献:

- [1] 同济大学应用数学系. 高等数学(第五版下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 111 - 113.
- [2] 同济大学应用数学系. 高等数学(第五版上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 273 - 275.
- [3] 朱雄才. 关于旋转体的二个积分公式 [J]. 云南师范大学学报: 自然科学版, 2004, 24(4): 6 - 7.
- [4] 李德新. 求旋转体体积的一个公式 [J]. 高等数学研究, 2005, 8(2): 29 - 32.
- [5] 王培吉, 王尚户, 王嘉谋, 等. 基于微元法旋转体体积的计算 [J]. 高师理科学刊, 2010, 30(1): 22 - 24.

Method of Calculating the Volume of Ring Rotating Object

MAO Jun-chao, LI Chang-wen, GAO Jian-ting

(Navy Submarine Academy, Qingdao 266042, China)

Abstract: Based on the idea of combining arith and figure, this paper uses the element method and the shape graph coordinate formula to deduce a calculating formula for the volume of ring rotating object and gives the application.

Key words: ring rotating object; volume; element method; center of gravity

(责任编辑 向阳洁)

(上接第 11 页)

- [17] 蔡 华, 魏丽侠, 吕显瑞. 非连通图 $(P_1 \vee P_n) \cup G_r$ 和 $(P_1 \vee P_n) \cup (P_3 \vee K_r)$ 及 $W_n \cup St(m)$ 的优美性 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2007, 45(4): 539 - 543.
- [18] 魏丽侠, 张昆龙. 几类并图的优美标号 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(3): 10 - 13.
- [19] 蔡 华. 几类非连通图的优美性 [D]. 长春: 吉林大学, 2007.
- [20] 李国竹, 尹淑英. $C_n \cup S_m$ 的优美性 [J]. 科技创新导报, 2007, 31: 96.
- [21] 李长春, 韩兆红, 张国阳. 关于 $St \bigcup_{i=1}^n m_i - C_4$ 的优美性 [J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2007(4): 55 - 56.
- [22] 高 娜. 关于 $(\overline{k_n \vee p_m}) \cup St(p)$ 和 $(\overline{k_n \vee p_m}) \cup k_{2,s}$ 的优美性 [J]. 吉林工程技术师范学院学报, 2010, 26(4): 72 - 73.

Gracefulness of the Graph $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$

WU Yue-sheng

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0)$ -corona of cycle C_7 is written as $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0)$, and $St(m)$ indicates $m+1$ vertexes and star graph with m edges. The gracefulness of the graph $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ is discussed. The graceful labelings are given. It also proves that some graphs $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ are special graceful graph.

Key words: disconnected graph; cycle; corona; star; graceful graph

(责任编辑 向阳洁)