文章编号: 1001-0920 (2012) 08-1139-06

基于PI控制器的线性系统的鲁棒耗散控制

王淑平[1,2], 张国山[1]

(1. 天津大学 电气与自动化工程学院，天津 300072；2. 杭州电子科技大学 理学院，杭州 310018)

摘 要: 针对参数具有确定性及不确定性的连续系统, 给出两种严格耗散PI控制器的设计方法. 首先, 系统参数确定时, 采用线性矩阵不等式方法, 导出了类状态反馈和静态输出反馈严格耗散PI控制器存在的充要条件, 并由线性矩阵不等式的可行解构造出严格耗散PI控制器增益的显式表达式; 然后, 考虑系数矩阵均具有范数有界不确定性时的鲁棒严格耗散控制问题, 得到相似的结果; 最后, 通过数值算例表明了所给方法的有效性.

关键词: 线性系统；PI控制器；鲁棒耗散控制；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust dissipative control for linear systems via PI controller

WANG Shu-ping[1,2], *ZHANG Guo-shan*[1]

(1. School of Electrical Engineering and Automation，Tianjin University，Tianjin 300072，China；2. School of Science, Hangzhou Dianzi University，Hangzhou 310018，China．Correspondent：WANG Shu-ping，E-mail：wangshuping@tju.edu.cn)

Abstract: For the linear systems with and without uncertainty, two PI controllers are designed. Firstly, while considering the linear systems without uncertainty, the necessary and sufficient condition for the existence of quadratic dissipative PI controller of analogous state feedback and static output feedback is derived. And the parametric representation of gains of PI controller is also given. Then the same problems and similar results for linear systems with uncertainty are considered. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: linear systems；PI controllers；robust dissipative control；linear matrix inequalities

1 引 言

随着计算机技术和信息技术的飞速发展, 尽管一些先进控制策略不断推出, 但比例-积分-微分 (PID) 控制以其结构简单、对模型误差具有鲁棒性以及易于操作等特点, 仍然是目前最通用最基本的一种控制方法. PID控制器设计的核心问题是如何整定PID控制参数, 使PID控制系统达到所期望的性能[1-2]. 实际的控制系统通常要满足多个性能指标, 且各性能指标之间又往往存在竞争关系, 因此, 设计PID控制器, 使得系统满足两个或多性能指标不仅具有理论意义, 而且具有实际应用价值.

文献 [3] 从频域角度, 基于幅值裕度和相角裕度来整定PID 参数, 使系统具有良好的控制性能和鲁棒性能, 相应时域、幅值裕度和相角裕度分别由界实引理和无源理论来处理. H_∞ 控制和无源控制在过去几十年已得到了较为广泛的研究, 然而无源设计是通过回路相位差小于180° 来实现闭环稳定, 没有利用前向、反馈通道的增益, 所得结果具有保守性; H_∞ 控制则通过回路增益小于1来使闭环稳定, 没有利用前向、反馈通道的相位信息, 所得结果也具有保守性[4-6]. 运用耗散理论[7], 既可利用系统的增益又能提取相位信息, 能在增益和相位之间进行较好的折衷, 使所得结果保守性较小[8]. 基于这一理论, 文献 [9] 考虑了线性不确定系统的鲁棒分析问题和基于状态反馈的鲁棒耗散控制问题.

鉴于耗散理论和PID控制器的优越性, 本文研究了基于类状态反馈和静态输出反馈PI控制器的线性系统鲁棒耗散控制问题, 不仅得到闭环系统耗散和鲁棒耗散的充要条件及相应PI控制器增益的显示表达式, 而且得到了统一的 H_∞ 和正实控制结论.

2 预备知识

考虑如下状态空间描述的线性时不变系统:

收稿日期: 2011-01-21；**修回日期:** 2011-05-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674019, 61074088).

作者简介: 王淑平(1983−), 女, 讲师, 博士, 从事对称系统、广义系统鲁棒控制的研究；张国山(1961−), 男, 教授, 博士生导师, 从事广义系统、非线性系统等研究.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t),$$
$$z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t),$$
$$y(t) = C_2x(t),\ x(0) = 0. \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统状态; $w(t) \in \boldsymbol{R}^q$ 为外部扰动输入且满足 $w(t) \in L_2[0,\infty)$; $u(t) \in \boldsymbol{R}^m$ 为控制输入; $y(t) \in \boldsymbol{R}^p$ 为测量输出; $z(t) \in \boldsymbol{R}^r$ 为输出; $x(0)$ 为系统的初值; $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}$ 为适维的常矩阵.

对于系统 (1), 选取如下形式的能量供给率函数:

$$E(w,z,T) = \langle z, Qz\rangle_T + 2\langle z, Sw\rangle_T + \langle w, Rw\rangle_T. \tag{2}$$

其中: Q, R 为给定的具有适当维数的对称矩阵; S 为给定的具有适当维数矩阵, 且

$$\langle u, v\rangle_T \triangleq \int_0^T u^{\mathrm{T}} v\mathrm{d}t,\ u, v \in \boldsymbol{R}^n,\ T \geqslant 0. \tag{3}$$

定义 1[10] 对于给定的能量供给率函数 (2), 若

$$E(w,z,T) + \beta(x_0) \geqslant 0 \tag{4}$$

成立, 则称系统 (1)($u = 0$) 是(Q, R, S)-耗散的. 进一步, 如果对于 $T > 0$ 和足够小的 $\alpha > 0$, 有

$$E(w,z,T) + \beta(x_0) \geqslant \alpha \prec w, w \succ_T \tag{5}$$

成立, 则称系统 (1) 是严格 (Q, R, S)-耗散的.

注 1 1) 当 $Q = -I, S = 0, R = \gamma^2 I$ 时, 严格 (Q, S, R)-耗散退化为 H_∞ 范数约束;

2) 当 $Q = 0, S = I, R = 0$ 时, 严格 (Q, S, R)-耗散退化为严格正实约束;

3) 当 $Q = -\theta I, S = (1-\theta)I, R = \theta\gamma^2 I$ 或 $Q = -\gamma^{-1}\theta I, S = (1-\theta)I, R = \theta\gamma I$ 时, 严格 (Q, S, R)-耗散对应为混合 H_∞ 和正实约束.

定义 2[11] 考虑系统 (1)($u = 0$), 其传递函数为 $G(s) = C_1(sI - A)^{-1}B_1$. $G(s)$ 的 H_∞ 范数定义为

$$||G(s)||_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}\{G(\mathrm{j}\omega)\},$$

即系统频率响应的最大奇异值的峰值.

为了讨论问题方便, 记 $M_0 = R + D_{11}^{\mathrm{T}} S + S^{\mathrm{T}} D_{11}$, $\star$ 为对称项, 给出如下假设和引理.

假设 1 令

$$M \triangleq R + D^{\mathrm{T}} S + S^{\mathrm{T}} D + D^{\mathrm{T}} QD > 0,\ Q_- \triangleq -Q \geqslant 0.$$

引理 1[8] 对于给定的矩阵 Q, S, R 和系统 (1) ($u = 0$), 以下条件是等价的:

1) 系统 (1) 渐近稳定且是严格 (Q, R, S)- 耗散的;

2) 存在一个对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB_1 - C_1^{\mathrm{T}}S & C_1^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ \star & -M_0 & D_{11}^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

引理 2[12] 对于给定的矩阵 $\varSigma \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $\varGamma \in \boldsymbol{R}^{k\times n}$, $\varOmega = \varOmega^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}\varSigma = m < n$, $\mathrm{rank}\varGamma = k < n$, 存在矩阵 $X \in \boldsymbol{R}^{m\times k}$ 满足不等式

$$\varSigma X\varGamma + (\varSigma X\varGamma)^{\mathrm{T}} + \varOmega < 0, \tag{7}$$

当且仅当矩阵 $\varSigma, \varGamma, \varOmega$ 满足

$$\varSigma^\perp \varOmega \varSigma^{\perp\mathrm{T}} < 0,\ \varGamma^{\mathrm{T}\perp}\varOmega\varGamma^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} < 0. \tag{8}$$

此时, 所有满足不等式 (7) 的矩阵 X 由下式给出:

$$X = -\rho\varSigma^{\mathrm{T}}\varPhi\varGamma^{\mathrm{T}}(\varGamma\varPhi\varGamma^{\mathrm{T}})^{-1} + \rho\varXi^{-1/2}\varUpsilon(\varGamma\varPhi\varGamma^{\mathrm{T}})^{-1/2}. \tag{9}$$

其中

$$||\varUpsilon|| < 1,\ \varPhi = (\rho\varSigma\varSigma^{\mathrm{T}} - \varOmega)^{-1},$$
$$\rho \geqslant \lambda_{\max}[\varSigma^+(\varOmega - \varOmega\varSigma^{+\mathrm{T}}(\varSigma^\perp\varOmega\varSigma^{\perp\mathrm{T}})^{-1}\varSigma^\perp\varOmega)\varSigma^{+\mathrm{T}}],$$
$$\varXi = \rho I - \varSigma^{\mathrm{T}}[\varPhi - \varPhi\varGamma^{\mathrm{T}}(\varGamma\varPhi\varGamma^{\mathrm{T}})^{-1}\varGamma\varPhi]\varSigma, \tag{10}$$

$(\cdot)^+$ 为矩阵的 Moore-Penrose 逆, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 为矩阵的最大特征值.

引理 3[11] 给定适当维数的矩阵 Y, D 和 E, 其中 Y 是对称的, 则有 $Y + DFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} < 0$. 对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得 $Y + \varepsilon DD^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E < 0$.

3 基于 PI 控制器的严格耗散控制

3.1 基于类状态反馈的 PI 控制器的严格耗散控制

设计如下类状态反馈的 PI 控制器:

$$u(t) = K_{\mathrm{p}}x(t) + K_{\mathrm{i}}\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

其中 $K_{\mathrm{p}}, K_{\mathrm{i}}$ 为待整定的参数矩阵, 使闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = (\bar{A} + \bar{B}_2K)\xi(t) + \bar{B}_1w(t), \\ z(t) = (\bar{C}_1 + D_{12}K)\xi(t) + D_{11}w(t) \end{cases} \tag{12}$$

渐近稳定且 (Q, S, R)-耗散, 同时有

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix},\ \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix},\ \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{C}_1 = [C_1\ \ 0],\ K = [K_{\mathrm{p}}\ \ K_{\mathrm{i}}].$$

I 为单位阵, 其秩与 A 的秩相同. 根据引理 1 可得类状态反馈的 PI 控制器的存在条件和设计方法.

定理 1 给定矩阵 Q, S, R 满足假设 1, 闭环系统 (12) 存在一个类状态反馈的 PI 控制器, 使其 (Q, S, R)-耗散的充要条件为: 存在一个对称正定矩阵 Y_0 和矩阵 W_0, 满足如下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}Y_0 + \bar{B}_2W_0) + (\bar{A}Y_0 + \bar{B}_2W_0)^{\mathrm{T}} & \rightarrow \\ * & \\ * & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \leftarrow \bar{B}_1 + (Y\bar{C}_1^{\mathrm{T}} + W^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}})S & (Y\bar{C}_1^{\mathrm{T}} + W^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}})Q_-^{\frac{1}{2}} \\ -M_0 & D_{11}^{\mathrm{T}}Q_-^{\frac{1}{2}} \\ * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

如果矩阵不等式 (13) 存在一个可行解 Y_0^*, W_0^*, 则 K

$= W_0^*(Y_0^*)^{-1}$ 为一个状态反馈的耗散控制器, PI控制器增益的显式表达式由 $K = [K_\mathrm{p}\ \ K_\mathrm{i}]$ 得到.

证明　根据引理1, 闭环系统(12)渐近稳定且 (Q,S,R)-耗散的充要条件为: 存在一个对称正定矩阵 $P>0$ 且满足

$$\begin{bmatrix} (\bar A+\bar B_2K)^\mathrm{T}P+P(\bar A+\bar B_2K) & P\bar B_1+(\bar C_1+D_{12}K)^\mathrm{T}S & (\bar C_1+D_{12}K)^\mathrm{T}Q_-^{\frac12} \\ * & -M_0 & D_{11}^\mathrm{T}Q_-^{\frac12} \\ * & * & -I \end{bmatrix}<0. \tag{14}$$

在式(14)两边分别左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}\{P^{-1},I,I\}$, 令 $Y_0=P^{-1}$, $W_0=KY$, 可得式(13). □

推论1　考虑闭环系统(12), 当矩阵 Q,S,R 满足假设1和注1的1)时, 存在一个类状态反馈的PI控制器(11), 使其 H_∞ 范数小于 γ 的充要条件为: 存在一个对称正定矩阵 $Y_{0\infty}$ 和矩阵 $W_{0\infty}$ 且满足不等式

$$\begin{bmatrix} (\bar AY_0+\bar B_2W_0)+(\bar AY_0+\bar B_2W_0)^\mathrm{T} & \bar B_1 & Y_0\bar C_1^\mathrm{T}+W_0^\mathrm{T}D_{12}^\mathrm{T} \\ * & -\gamma I & D_{11}^\mathrm{T} \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix}<0. \tag{15}$$

进而, 如果矩阵不等式(15)存在一个可行解 Y_0^*, W_0^*, 则 $K=W_0^*(Y_0^*)^{-1}$ 为一个状态反馈的 H_∞ 控制器.

证明　令 $\theta\to 1$, 根据定理1即可得证. □

推论2　考虑闭环系统(12), 当矩阵 Q,S,R 满足假设1和注1的2)时, 存在一个类状态反馈的PI控制器(11), 使其严格正实的充要条件为: 存在一个对称正定矩阵 Y_{0p} 和矩阵 W_{0p} 且满足

$$\begin{bmatrix} (\bar AY_{0p}+\bar B_2W_{0p})+(\bar AY_{0p}+\bar B_2W_{0p})^\mathrm{T} & \bar B_1+Y_{0p}\bar C_1^\mathrm{T}+W_{0p}^\mathrm{T}D_{12}^\mathrm{T} \\ * & -(D_{11}^\mathrm{T}+D_{11}) \end{bmatrix}<0. \tag{16}$$

进而, 如果矩阵不等式(16)存在一个可行解 Y_{0p}^*, W_{0p}^*, 则 $K=W_{0p}^*(Y_{0p}^*)^{-1}$ 为一个状态反馈的正实控制器.

证明　令 $\theta\to 0$, 根据定理1即可得证. □

3.2　基于类静态输出反馈的PI控制器的严格耗散控制

设计如下形式的类静态输出反馈的PI控制器:

$$u(t)=K_\mathrm{p}y(t)+K_\mathrm{i}\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{17}$$

使闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\bar x}(t)&=(\widetilde A+\bar B_2G\bar C_2)\bar x(t)+\bar B_1w(t), \\ z(t)&=(\bar C_1+D_{12}G\widetilde C_2)\bar x(t)+D_{11}w(t) \end{aligned} \tag{18}$$

渐近稳定且 (Q,S,R)-耗散. 其中

$$\bar x(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau \end{bmatrix},\ \bar y(t)=\begin{bmatrix} C_2x(t) \\ \int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau \end{bmatrix},$$

$$\widetilde A=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix},\ \widetilde C_2=\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},\ G=[K_\mathrm{p}\ \ K_\mathrm{i}],$$

$K_\mathrm{p},K_\mathrm{i}$ 为待整定的参数矩阵. 根据引理1同样可以得到满足闭环系统耗散的类静态输出反馈PI控制器的存在条件和设计方法.

定理2　给定矩阵 Q,S,R 满足假设1和注1的3). 闭环系统(18)存在一个类静态输出反馈的PI控制器, 使其 (Q,S,R)-耗散的充要条件为: 存在对称正定矩阵 X,Y 和矩阵 N 且满足

$$\begin{bmatrix} B_2^\perp(AY+YA^\mathrm{T})B_2^{\perp\mathrm{T}} & B_2^\perp(AN+YC_2^\mathrm{T}) & \theta B_2^\perp B_1D_{12}^\perp \\ * & C_2N+N^\mathrm{T}C_2^\mathrm{T} & 0 \\ * & * & -\gamma\theta\alpha D_{12}D_{12}^\mathrm{T} \end{bmatrix}<0,\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} C_2^{\mathrm{T}\perp}(A^\mathrm{T}X+XA)C_2^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} & C_2^{\mathrm{T}\perp}XB_1+(\theta-1)C_2^{\mathrm{T}\perp}XC_1^\mathrm{T} & \theta C_2^{\mathrm{T}\perp}C_1^\mathrm{T} \\ * & -\gamma\theta I+(\theta-1)(D_{11}+D_{11}^\mathrm{T}) & \theta D_{11}^\mathrm{T} \\ * & * & -\gamma\theta I \end{bmatrix}<0. \tag{19}$$

进而, 静态输出反馈控制增益显式表示为

$$G=-\rho\hat B^\mathrm{T}\hat\Phi\hat C^\mathrm{T}(\hat C\hat\Phi\hat C^\mathrm{T})^{-1}+\rho\varXi^{-\frac12}L(\hat C\hat\Phi\hat C^\mathrm{T})^{-\frac12}. \tag{20}$$

其中

$||L||<1,\ \alpha=\sqrt{\theta^2+(1-\theta)^2}$,

$\rho\geqslant\lambda_{\max}[\hat B^+(\varPhi-\varOmega\hat B^{+\mathrm{T}}(\hat B^\perp\varOmega\hat B^{\perp\mathrm{T}})^{-1}\hat B^\perp\varOmega)\hat B^{+\mathrm{T}}]$,

$\hat\varPhi=(\rho\hat B\hat B^\mathrm{T}-\varOmega)^{-1}$,

$\varXi=\rho I-\hat B^\mathrm{T}[\hat\varPhi-\hat\varPhi\hat C^\mathrm{T}(\hat C\hat\varPhi\hat C^\mathrm{T})^{-1}\hat C\hat\varPhi]\hat B$,

$\hat B=[\bar B_2^\mathrm{T}P\ \ -D_{12}^\mathrm{T}S\ \ D_{12}^\mathrm{T}Q_-^{\frac12}]^\mathrm{T}$, $\hat C=[\widetilde C_2\ \ 0\ \ 0]$,

$$\varOmega=\begin{bmatrix} \widetilde A^\mathrm{T}P+P\widetilde A & P\bar B_1-\bar C_1^\mathrm{T}S & \bar C_1^\mathrm{T}Q_-^{1/2} \\ * & -M_0 & D_{11}^\mathrm{T}Q_-^{1/2} \\ * & * & -I \end{bmatrix}.$$

证明　根据引理1, 闭环系统(18)渐近稳定且严格耗散的充要条件为: 存在一个对称矩阵 $P>0$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}}P+P\widetilde{A} & PB_1-\bar{C}_1^{\mathrm{T}}S & \bar{C}_1^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ * & -M_0 & D_{11}^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ * & * & -I \end{bmatrix}+$$

$$[\bar{B}_2^{\mathrm{T}}P\ \ -D_{12}^{\mathrm{T}}S\ \ D_{12}^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2}]^{\mathrm{T}}G[\widetilde{C}_2\ \ 0\ \ 0]+$$

$$[\widetilde{C}_2^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}[\bar{B}_2^{\mathrm{T}}P\ \ -D_{12}^{\mathrm{T}}S\ \ D_{12}^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2}]<0. \tag{21}$$

根据引理2, 不等式(21)成立的充要条件为

$$\hat{B}^{\perp}\varOmega\hat{B}^{\perp\mathrm{T}}<0,\ \hat{C}^{\mathrm{T}\perp}\varOmega\hat{C}^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}<0. \tag{22}$$

令

$$P=\begin{bmatrix} X & M \\ M^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\mathrm{T}} & W \end{bmatrix}.$$

利用文献[11]中引理4.1.3, 可以得到式(19). 进一步, 利用引理2, 可得到式(20). □

4 基于PI控制器的鲁棒严格耗散控制

考虑如下的不确定系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)=&(A+\Delta A)x(t)+(B_1+\Delta B_1)w(t)+\\ &(B_2+\Delta B_2)u(t),\\ z(t)=&(C_1+\Delta C_1)x(t)+(D_{11}+\Delta D_{11})w(t)+\\ &(D_{12}+\Delta D_{12})u(t),\\ y(t)=&(C_2+\Delta C_2)x(t). \end{aligned} \tag{23}$$

其中参数不确定矩阵满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_1 & \Delta B_2 \\ \Delta C_1 & \Delta D_{11} & \Delta D_{12} \\ \Delta C_2 & * & * \end{bmatrix}=$$

$$[H_1\ \ H_2\ \ H_3]^{\mathrm{T}}F(t)[E_1\ \ E_2\ \ E_3]F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I, \tag{24}$$

H_1,H_2,H_3,E_1,E_2,E_3 为已知矩阵, $*$ 为任意矩阵.

引理4 给定矩阵 Q,R,S 满足假设1, 系统(23)($u=0$)严格耗散的充要条件为: 存在常数 $\epsilon>0$ 和对称矩阵 $P>0$ 且满足如下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+\epsilon E_1^{\mathrm{T}}E_1 & PB_1-C_1^{\mathrm{T}}S+\epsilon E_1^{\mathrm{T}}E_2 & C_1^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} & PH_1 \\ * & -M_0+\epsilon E_2^{\mathrm{T}}E_1 & D_{11}^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} & -S^{\mathrm{T}}H_2 \\ * & * & -I & Q_-^{1/2}H_2 \\ * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix}<0. \tag{25}$$

证明 为了方便起见, 记

$$\hat{A}=A+\Delta A,\ \hat{B}_1=B_1+\Delta B_1,\ \hat{C}_1=C_1+\Delta C_1,$$

$$\hat{B}_2=B_2+\Delta B_2,\ \hat{D}_{11}=D_{11}+\Delta D_{11},$$

$$\hat{D}_{12}=D_{12}+\Delta D_{12},\ \hat{M}_0=R+\hat{D}_{11}^{\mathrm{T}}S+S^{\mathrm{T}}\hat{D}_{11}.$$

根据引理1可知系统(23)渐近稳定且严格耗散的充要条件为: 存在对称矩阵 $P>0$ 且满足如下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^{\mathrm{T}}P+P\hat{A} & P\hat{B}_1-\hat{C}_1^{\mathrm{T}}S & \hat{C}_1^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ * & -\hat{M}_0 & \hat{D}_{11}^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ * & * & -I \end{bmatrix}<0. \tag{26}$$

化简式(26)可得

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA & PB_1-C_1^{\mathrm{T}}S & C_1^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ * & -M_0 & D_{11}^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} \\ * & * & -I \end{bmatrix}+$$

$$[E_1\ \ E_2\ \ 0]^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}[H_1^{\mathrm{T}}P\ \ -H_2^{\mathrm{T}}S\ \ H_2^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2}]+$$

$$[H_1^{\mathrm{T}}P\ \ -H_2^{\mathrm{T}}S\ \ H_2^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2}]^{\mathrm{T}}F[E_1\ \ E_2\ \ 0]<0. \tag{27}$$

运用引理3可得式(25). □

4.1 基于类状态反馈的PI控制器的鲁棒严格耗散控制

考虑系统(23), 设计PI控制器(11)可得闭环系统的增广系统为

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=A_c\xi(t)+B_cw(t), \\ z(t)=C_c\xi(t)+\hat{D}_{11}w(t). \end{cases} \tag{28}$$

其中

$$A_c=\begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}[K_{\mathrm{p}}\quad K_{\mathrm{i}}],\ B_c=\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_c=[\hat{C}_1\ \ 0]+\hat{D}_{12}[K_{\mathrm{p}}\ \ K_{\mathrm{i}}].$$

运用引理4, 可以得到如下定理3.

定理3 给定矩阵 Q,R,S 满足假设1, 存在PI控制律(11), 使得闭环系统(28)严格耗散的充要条件为: 存在常数 $\zeta>0$, 对称矩阵 $Y_r>0$ 和矩阵 W_r 且满足如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}Y_r+Y_r\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_2W_r+W_r^{\mathrm{T}}\bar{B}_2^{\mathrm{T}}+\zeta\bar{H}_1\bar{H}_1^{\mathrm{T}} & \bar{B}_1-Y_r\bar{C}_1^{\mathrm{T}}S-W_r^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}}S-\zeta\bar{H}_1H_2^{\mathrm{T}}Q_-^{1/2} & H_r & Y_r\bar{E}_1^{\mathrm{T}}+W_r^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} \\ * & -M_0+\zeta S^{\mathrm{T}}H_2H_2^{\mathrm{T}}S & (D_{11}^{\mathrm{T}}-\zeta S^{\mathrm{T}}H_2H_2^{\mathrm{T}})Q_-^{1/2} & E_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & -I+\zeta Q_-^{1/2}H_2H_2Q_-^{1/2} & 0 \\ * & * & * & -\zeta I \end{bmatrix}<0. \tag{29}$$

其中

$$\bar{H}_1=[H_1^{\mathrm{T}}\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ \bar{E}_1=[E_1\ \ 0],$$

$$H_r=(Y_r\bar{C}_1^{\mathrm{T}}+(D_{12}W_r)^{\mathrm{T}}+\zeta\bar{H}_1H_2^{\mathrm{T}})Q_-^{1/2}.$$

进而, 如果矩阵不等式(29)存在一个可行解 Y_r^*, W_r^*, 则 $K=W_r^*(Y_r^*)^{-1}$ 为一个状态反馈的耗散控制器.

证明 为了方便起见, 记

$$\bar{\Delta}A=\begin{bmatrix}\Delta A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{\Delta}B_1=\begin{bmatrix}\Delta B_1\\ 0\end{bmatrix},$$
$$\bar{\Delta}B_2=\begin{bmatrix}\Delta B_2\\ 0\end{bmatrix},\ \bar{\Delta}C_1=[\Delta C_1\ \ 0].$$

闭环系统 (28) 可以等价地转化为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t)=&[(\bar{A}+\bar{B}_2K)+(\bar{\Delta}A+\bar{\Delta}B_2K)]\xi(t)+\\&(\bar{B}_1+\bar{\Delta}B_1)w(t),\\ z(t)=&[(\bar{C}_1+D_{12}K)+(\bar{\Delta}C_1+\Delta D_{12}K)]\xi(t)+\\&(D_{11}+\Delta D_{11})w(t).\end{aligned}\tag{30}$$

利用引理 4 和定理 1 可得证. □

4.2 基于类静态输出反馈的 PI 控制器的鲁棒严格耗散控制

利用线性不确定系统 (23) 设计类输出反馈控制器 (17). 设 $\Delta C_2=0$, 则闭环系统可表示为

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}(t)=A_o\bar{x}(t)+B_ow(k),\\ z(t)=C_o\bar{x}(t)+D_ow(t).\end{cases}\tag{31}$$

其中

$$A_o=\begin{bmatrix}\hat{A} & 0\\ C_2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_2\\ 0\end{bmatrix}[K_{\rm p}\ \ K_{\rm i}]\begin{bmatrix}C_2 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},$$
$$B_o=[\hat{B}_1^{\rm T}\ \ 0]^{\rm T},\ D_o=\hat{D}_{11},$$
$$C_o=[\hat{C}_1\ \ 0]+\hat{D}_{12}[K_{\rm p}\ \ K_{\rm i}]\begin{bmatrix}C_2 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

利用引理 4 和定理 2 的结论，可得到类静态输出反馈鲁棒耗散控制律的存在条件和设计方法.

定理 4　给定对称矩阵 Q,R,S 满足假设 1, 存在 PI 控制律 (17), 使得闭环系统 (31) 严格耗散的充要条件为: 存在常数 $\mu>0$, 对称矩阵 $X_o,Y_o>0$ 且满足如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}B_2\\ 0\\ -S^{\rm T}D_{12}\\ Q_-^{1/2}D_{12}\\ E_3\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}AY_o+Y_oA^{\rm T}+\mu H_1H_1^{\rm T} & Y_oC_2^{\rm T}+AN & B_1-Y_oC_1^{\rm T}S-\mu H_1H_2^{\rm T}S & (Y_oC_1^{\rm T}-\mu H_1H_2^{\rm T})Q_-^{1/2} & Y_oE_1^{\rm T}\\ * & C_2N+N^{\rm T}C_2^{\rm T} & -N^{\rm T}C_1^{\rm T}S & N^{\rm T}C_1^{\rm T}Q_-^{1/2} & N^{\rm T}E^{\rm T}\\ * & * & -H_o & (D_{11}^{\rm T}-\mu S^{\rm T}H_2H_2^{\rm T})Q_-^{1/2} & E_2^{\rm T}\\ * & * & * & -I+\mu Q_-^{1/2}H_2H_2^{\rm T}Q_-^{\frac{1}{2}} & 0\\ * & * & * & * & -\mu I\end{bmatrix}\times$$
$$[B_2^{\rm T}\ \ 0\ \ -D_{12}^{\rm T}S\ \ D_{12}^{\rm T}Q_-^{1/2}\ \ E_3^{\rm T}]^{\perp}<0,$$

$$\begin{bmatrix}C_2^{\rm T\perp}(A^{\rm T}X+XA)C_2^{\rm T\perp T} & H_{o1} & C_2^{\rm T\perp}(C_1^{\rm T}+\mu XH_1H_2^{\rm T})Q_-^{\frac{1}{2}} & C_2^{\rm T\perp}E_1^{\rm T} & C_2^{\rm T\perp}XH_1\\ * & H_o & (D_{11}^{\rm T}-\mu S^{\rm T}H_2H_2^{\rm T})Q_-^{\frac{1}{2}} & E_2^{\rm T} & 0\\ * & * & -I+\mu Q_-^{\frac{1}{2}}H_2H_2^{\rm T}Q_-^{\frac{1}{2}} & 0 & 0\\ * & * & * & -\mu I & 0\\ * & * & * & * & -\mu I\end{bmatrix}<0,$$

$$\begin{bmatrix}X & I\\ I & Y\end{bmatrix}\geqslant 0.\tag{32}$$

其中

$$H_o=-(R+D_{11}^{\rm T}S+S^{\rm T}D_{11}+\mu S^{\rm T}H_2H_2^{\rm T}S),$$
$$H_{o1}=C_2^{\rm T\perp}(XB_1-C_1^{\rm T}S-\mu XH_1H_2^{\rm T}S).$$

进而可得 PI 控制器增益的显式表达式

$$G=-\rho\widetilde{B}^{\rm T}\widetilde{\widetilde{\varPhi}}\widetilde{C}^{\rm T}(\widetilde{C}\widetilde{\varPhi}\widetilde{C}^{\rm T})^{-1}+\rho\varXi^{-1/2}L(\widetilde{C}\widetilde{\varPhi}\widetilde{C}^{\rm T})^{-1/2}.\tag{33}$$

其中

$$\rho\geqslant\lambda_{\max}[\widetilde{B}^{+}(\varPhi-\varOmega\widetilde{B}^{+\rm T}(\widetilde{B}^{\perp}\varOmega\widetilde{B}^{\perp\rm T})^{-1}\widetilde{B}^{\perp}\varOmega)\widetilde{B}^{+\rm T}],$$
$$\widetilde{\varPhi}=(\rho\widetilde{B}\widetilde{B}^{\rm T}-\varOmega)^{-1},$$
$$\varXi=\rho I-\widetilde{B}^{\rm T}[\widetilde{\varPhi}-\widetilde{\varPhi}\widetilde{C}^{\rm T}(\widetilde{C}\widetilde{\varPhi}\widetilde{C}^{\rm T})^{-1}\widetilde{C}\widetilde{\varPhi}]\widetilde{B},$$
$$\widetilde{C}=[\bar{C}_2P^{-1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$
$$\widetilde{B}=[\bar{B}_2^{\rm T}\ \ -D_{12}^{\rm T}S\ \ D_{12}^{\rm T}Q_-^{1/2}\ \ E_3^{\rm T}]^{\rm T},$$

$$\varOmega=\begin{bmatrix}P^{-1}\bar{A}^{\rm T}+\bar{A}P^{-1}+\mu\bar{H}_1H_1^{\rm T} & S_o & P^{-1}(\bar{C}_1^{\rm T}+\mu\bar{H}_1H_2^{\rm T})Q_-^{1/2} & P^{-1}\bar{H}_1^{\rm T}\\ * & H_o & (D_{11}^{\rm T}-\mu S^{\rm T}H_2H_2^{\rm T})Q_-^{1/2} & E_2^{\rm T}\\ * & * & -I+\mu Q_-^{1/2}H_2H_2^{\rm T}Q_-^{1/2} & 0\\ * & * & * & -\mu I\end{bmatrix},$$

$$S_o=\bar{B}_1-P^{-1}\bar{C}_1^{\rm T}S-\mu\bar{H}_1H_2^{\rm T}S.$$

证明　运用定理 2 和引理 4 即可得证. □

注 2　对于定理 2∼定理 4, 当 $\theta\to 1$ 时, 得到 H_∞ 控制器的显式设计律; 当 $\theta\to 0$ 时, 得到正实约束控制器的显式控制律. 具体的表达式此处不再赘述.

5　数值算例

对于系统 (1), 选取参数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0.3 & -6.5\\ 0 & 0.01\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}3.5\\ 3.5\end{bmatrix},$$

$C_1 = [0.1\ \ 0],\ D_{11} = 0.05,\ D_{12} = 0,\ C_2 = [0.1\ \ 0].$
利用Matlab中LMI工具箱, 根据定理1和定理2, 当$\theta \to 1$时, 存在类状态反馈和类输出反馈的PI控制器, 使得闭环系统稳定且H_∞范数小于1; 当$\theta \to 0$时, 存在PI类状态反馈和类输出反馈的控制器使得闭环系统严格正实. 具体结论如表1所示.

表 1　PI控制增益(确定性系统)

问题	PI控制器	
	状态反馈	输出反馈
H_∞控制 ($\gamma = 1$)	$K_\mathrm{p} = [4.425\,8\ \ -8.365\,4]$ $K_\mathrm{i} = [0.206\,5\ \ 0.009\,5]$	$K_\mathrm{p} = 5.262\,7$ $K_\mathrm{i} = 0.100\,3$
严格正实控制	$K_\mathrm{p} = [14.222\,5\ \ -21.822\,6]$ $K_\mathrm{i} = [0.005\,2\ \ 0.000\,2]$	$K_\mathrm{p} = -9.497\,2$ $K_\mathrm{i} = -0.104\,6$

考虑参数不确定性系统(23), 选取不确定性参数为$H_1 = [-0.000\,1\ \ 0]^\mathrm{T},\ E_1 = [0\ \ -0.01],\ E_2 = E_3 = H_2 = 0$. 具体结论如表2所示.

表 2　PI控制增益(带有不确定性系统)

问题	PI控制器	
	状态反馈	输出反馈
H_∞控制 ($\gamma = 1$)	$K_\mathrm{p} = [11.272\,7\ \ -68.997\,8]$ $K_\mathrm{i} = [0.000\,4\ \ 0.000\,0]$	$K_\mathrm{p} = -6.549\,7$ $K_\mathrm{i} = 0.236\,2$
严格正实控制	$K_\mathrm{p} = [11.089\,0\ \ -63.565\,5]$ $K_\mathrm{i} = [0.000\,4\ \ 0.000\,0]$	$K_\mathrm{p} = -0.451\,5$ $K_\mathrm{i} = -0.002\,1$

上述算例表明了本文所设计的PI控制器的有效性.

6 结　论

本文讨论了基于PI控制器的确定及不确定线性系统严格耗散控制问题. 利用线性矩阵不等式, 分别给出类状态反馈和静态输出反馈的严格耗散及鲁棒严格耗散PI控制器存在的充要条件, 并基于线性矩阵不等式的解给出了相应控制器增益的显式表达式. 此外, 所得结果统一了H_∞和正实控制结论. 考虑实际PI控制器的使用, 保性能严格耗散和鲁棒严格耗散的PI控制器、非脆弱严格耗散和鲁棒严格耗散的PI控制器的设计问题将是进一步的研究方向.

参考文献(References)

[1] Wedell S R. Take control of PID tuning[J]. Plant Engineering, 2005, 59(9): 57-60.

[2] 马建伟, 李银伢. 满意PID控制设计理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
(Ma J W, Li Y Y. Satisfied with the design theory and method of PID controller[M]. Beijing: Science Press, 2007.)

[3] 柴天佑, 张贵军. 基于给定的相角裕度和幅值裕度的PID参数自整定新方法[J]. 自动化学报, 1997, 23(2): 167-172.
(Chai T Y, Zhang G J. A new self-tuning of PID regulations based on phase and amplitude magin specifications[J]. Acta Automatica Sinica, 1997, 23(2): 167-172.)

[4] Willems J C. Dissipative dynamical systems: General theory[J]. Archive for Rational Mechanics Analysis, 1972, 45(5): 321-351.

[5] Willems J C. Dissipative dynamical systems: Linear systems with quadratic supply rate[J]. Archive for Rational Mechanics Analysis, 1972, 45(5): 352-393.

[6] 董心壮, 张庆灵. 线性广义系统的鲁棒严格耗散控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(2): 195-198.
(Dong X Z, Zhang Q L. Robust strictly dissipative control for linear singular systems[J]. Control and Decision, 2005, 20(2): 195-198.)

[7] David J H, Peter J M. Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties[J]. J of the Franklin Institute, 1980, 309(5): 327-357.

[8] Xie S L, Xie L H, Souza C E. Robust dissipative control for linear systems with dissipative uncertainty[J]. Int J of Control, 1998, 70(2): 169-191.

[9] Shao H Y, Feng C B. Robust dissipative control for linear multi-variable systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(3): 335-371.

[10] Brogliato B, Lozano R, Maschke B, et al. Dissipative systems analysis and control: Theory and applications[M]. London: Springer-Verlag, 2007: 193-200.

[11] 俞力. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 49-54.
(Yu L. Robust control－Linear matrix inequalities method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 49-54.)

[12] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307-1317.

[13] 张秀华, 张庆灵. 非线性微分代数系统的控制理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 86-94.
(Zhang X H, Zhang Q L. Nonlinear differential algebraic systems control theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2007: 86-94.)

[14] Stephen B, Laurent El G, Eric F, et al. Linear matrix inequalities in systems and control theory[C]. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, 1994.

[15] Zhou K M, Doyle J C, Glover K. Robust and optimal control[M]. Engelwood Cliffs: Prentice Hall, 1996.