

文章编号: 1001-0920(2012)09-1293-08

## 脉冲变时滞车辆纵向跟随系统的群指数稳定性与控制

徐晓惠<sup>1</sup>, 张继业<sup>1</sup>, 张克跃<sup>2</sup>

(1. 西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 成都 610031;

2. 西南交通大学峨眉校区土木工程系, 四川 峨眉山 614202)

**摘要:** 针对具有脉冲扰动和变时滞的顾前车辆纵向跟随系统, 在假设各孤立子系统指数稳定的前提下, 分析了该系统的群指数稳定性与控制. 首先利用向量 Lyapunov 函数法和数学归纳法给出确保该系统群指数稳定的充分条件; 然后基于得到的稳定性条件, 采用滑模变结构控制策略对脉冲变时滞车辆纵向跟随系统进行控制器设计; 最后通过一个数值仿真算例验证了所得结论的正确性以及在实际中如何应用.

**关键词:** 车辆跟随; 变时滞; 脉冲; 指数稳定; 滑模控制

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Exponential stability and control of vehicle longitudinal following system with impulsive effects and time-varying delays

XU Xiao-hui<sup>1</sup>, ZHANG Ji-ye<sup>1</sup>, ZHANG Ke-yue<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. Department of Civil Engineering, Emei Campus of Southwest Jiaotong University, Emeishan 614202, China. Correspondent: XU Xiao-hui, E-mail: xhxu@163.com)

**Abstract:** On the assumption that all the isolated subsystems of the interconnected system are exponentially stable, the exponential stability analysis and control for a class of look-ahead vehicle longitudinal following system with impulsive effects and time-varying delays are studied. Firstly, some sufficient conditions for exponential stability of the system are obtained by applying vector Lyapunov function method and mathematical induction method. Then, the controller for the look-ahead vehicle following system with impulsive effects and time-varying delays is designed by sliding mode control method based on the obtained results. Finally, a simulation example illustrates how to apply the obtained results in practice.

**Key words:** vehicle following; time-varying delay; impulsive; exponential stability; sliding mode control

### 1 引言

在自动高速公路系统中, 自动车辆跟随控制可以为人们的生活带来很大便利, 比如提高道路交通利用率, 降低系统能量消耗等, 因此对自动车辆跟随系统的研究引起了学者们的广泛重视<sup>[1-6]</sup>. 所谓自动车辆跟随控制, 就是在车辆跟随控制系统中, 通过在每个跟随车辆上安装一个控制器, 使跟随车辆利用自身状态信息和接收到的其他车辆的信息不断调整自身的状态, 进而保证车辆间距离达到预期设定的安全距离. 稳定性是对车辆跟随控制的前提条件, 为此国内外学者对车辆跟随系统的稳定性进行了大量研究. Chu<sup>[2]</sup>在研究车辆跟随系统的控制时定义了群稳定性, 并给出了车辆跟随系统群稳定的充分条件. Baibieir<sup>[3]</sup>将文

献[2]中的群稳定定义引入自动高速公路系统, 但由于缺乏有效的研究工具, 文献[3]中的分析方法仅限于线性系统. Swaroop 等<sup>[4-5]</sup>在研究自动高速公路系统的车辆跟随控制时, 采用加权 Lyapunov 稳定理论研究了非线性弱耦合系统群稳定性, 但文中的方法在解决具有强耦合的关联系统时仍然存在很大的局限性. Zhang 等<sup>[6-7]</sup>采用向量 Lyapunov 函数法得到了一类非线性强耦合关联系统以及顾前车辆跟随系统群稳定的充分条件, 为非线性系统的控制器设计提供了新的途径. 然而, 上述研究都没有考虑时滞因素. 考虑到信号的传输以及车辆的动力学行为对控制指令的响应都需要一定的时间, 时间滞后在车辆跟随系统中是无法避免的. 任殿波等<sup>[8]</sup>基于向量 Lyapunov 函数法研究

收稿日期: 2011-04-18; 修回日期: 2011-07-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172247, 50823004, 60974132).

作者简介: 徐晓惠(1982-), 女, 博士生, 从事复杂系统的稳定性与控制等研究; 张继业(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性动力系统的稳定与控制、空气动力学等研究.

了具有时滞的顾前车辆跟随系统的群指数稳定性,该文假设时滞是固定的常数,然而在实际系统中时滞是经常变化的.此外,不确定干扰因素在车辆运行环境以及车辆自身系统中是不可避免的.有些不确定干扰因素可以直接引入车辆动力学方程,如随机扰动<sup>[9-11]</sup>和奇异扰动<sup>[9,12]</sup>等,此时的动力学方程仍然是连续的.然而,有些不确定干扰因素无法用连续型动力学方程直接描述,在此干扰下车辆的动力学行为在某些时间区间表现为连续,而在某些离散时刻会发生瞬间突变,这里将该扰动称为脉冲干扰.脉冲干扰在实际车辆跟随系统中主要源于车辆的运行环境(如路面的不平整等)或者车辆自身(如开关电路的频繁切换等),而脉冲干扰的存在会导致系统的不稳定,因此研究具有脉冲扰动的车辆跟随系统的稳定性和控制是十分必要的.目前,国内外尚未见到研究具有脉冲扰动和变时滞的顾前车辆纵向跟随系统的群指数稳定性与控制的相关报道.

基于以上分析,本文将研究一类具有脉冲扰动和变时滞的顾前车辆纵向跟随系统的群指数稳定性,并对该系统给出相应的控制器设计.

## 2 模型描述及相关定义

在自动车辆纵向跟随系统中,考虑到时间滞后因素,顾前车辆纵向跟随系统可用如下关于车辆跟随误差的连续型微分方程描述<sup>[8]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1(t), 0, 0), \\ \dot{x}_i = f_i(x_i(t), x_{i-1}(t-\tau), \dot{x}_{i-1}(t-\tau)). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $t \geq 0; i = 2, 3, \dots; x_i \in R^n; f_i: R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ , 且  $f_i(0, 0, 0) = 0$ . 对于  $\forall i \leq j, j \in N$ , 令  $x_{i-j} = 0$ .

模型(1)中没有引入脉冲扰动,而且每个车辆的时滞是相同的常数.考虑到现实车辆跟随系统中每个车辆的时滞不可能都是相同的,而且时滞在车辆运行过程中不断变化,可以建立如下具有脉冲扰动和变时滞的车辆纵向跟随系统的数学方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), 0, 0), t \neq t_k; \\ \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), x_{i-1}(t-\tau_{i,i-1}(t)), \\ \quad \dot{x}_{i-1}(t-\tau_{i,i-1}(t))), i = 2, 3, \dots, t \neq t_k; \\ \Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-), i = 1, 2, \dots, t = t_k. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\Delta x_i(t_k)$  为  $t_k$  时刻的脉冲; 离散集  $\{t_k\}$  满足  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ , 并且当  $k \rightarrow \infty$  时,  $t_k \rightarrow \infty; x_i(t_k) = x_i(t_k^+)$  且  $x_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x_i(t), i = 1, 2, \dots, k \in N$ . 令  $\tau_{i,i-1}(t)$  为第  $(i-1)$  辆车的信息传递到第  $i$  辆车所需的时间,并假设系统(2)的初始条件为

$$x_i(s) = \varphi_i(s), s \in (-\tau_i, 0],$$

$$\tau_i = \sup_{1 \leq j \leq i-1, t \in R} \tau_{i,j}(t).$$

其中  $\tau_{i,j}(t)$  为第  $j$  辆车的信息传递到第  $i$  辆车所需的时间,  $i = 2, 3, \dots$ .

假定系统(2)满足平衡点的存在性和唯一性条件.

定义如下符号:

$$\|x_i(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|x_i(t)\|,$$

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_i \|x_i(t)\|_\infty,$$

$$\|x_i(s)\|_\infty = \sup_{s \in (-\tau_i, 0]} \|\varphi_i(s)\|,$$

其中  $\|\cdot\|$  表示 Euclidean 范数.

**定义 1** 对于系统(2),若任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使  $\sup_i \|x_i(s)\|_\infty < \delta \Rightarrow \sup_i \|x_i(t)\|_\infty < \varepsilon$  成立, 其中  $s \in (-\tau_i, 0]$ , 则系统(2)的零解  $x_i = 0 (i \in N)$  是群稳定的.

**定义 2** 如果系统(2)的零解  $x_i = 0 (i \in N)$  是群稳定的, 并且存在常数  $M > 0$  和  $\lambda > 0$ , 使得如下不等式成立:

$$\sup_i \|x_i(t)\|_\infty \leq M \Phi \exp(-\lambda t),$$

其中  $\Phi = \sup_i \|x_i(s)\|_\infty, s \in (-\tau_i, 0]$ , 则系统(2)的零解  $x_i = 0 (i \in N)$  是群指数稳定的.

下面针对系统(2)给出 1 个假设:

**假设 1** 令  $\Delta x_i(t_k) = I_{ik}(x_i(t_k^-))$ , 其中  $I_{ik}(\cdot)$  为脉冲强度函数. 假设函数  $I_{ik}$  是连续函数, 而且满足  $I_{ik}(0) = 0$ , 并假设如下不等式成立:

$$\|I_{ik}(x_i(t_k^-)) + x_i(t_k^-)\| \leq \gamma_{ik} \|x_i(t_k^-)\|,$$

其中  $\gamma_{ik}$  为正常数,  $i, k \in N$ .

## 3 脉冲变时滞车辆纵向跟随系统的群指数稳定性

为了分析系统(2)零解的稳定性, 首先给出如下引理:

**引理 1** 假设  $v_i(t) \geq 0, \forall t \geq 0, i \in N$ , 考虑如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i \leq & g_i(v_i(t), v_{i-1}(t-\tau_{i,i-1}(t)), \dots, v_1(t-\tau_{i,1}(t)), t) \times \\ & \left[ -\beta_{i0} v_i^m(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} v_{i-j}^m(t-\tau_{i,j}(t)) \right]. \end{aligned}$$

其中:  $m > 0$  且  $\beta_{i0} > 0, \beta_{ij} \geq 0; \beta_{ij} = 0 (j \geq i)$ , 对于  $v_i > 0$ , 有  $g_i(\cdot) > 0; \tau_{i,j}(t) \geq 0, i, j = 1, 2, \dots$ .

如果存在  $v = (v_{10}, v_{20}, \dots)$  使得

$$-\beta_{i0} v_{i,0}^m + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} v_{i-j,0}^m < 0, i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

并令  $\inf_i \{v_{i0}\} = \alpha > 0, \sup_i \{v_{i0}\} = \beta > 0$ , 则对于任意

给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得  $\sup_i \|v_i(s)\|_\infty < \delta \Rightarrow \sup_i \|v_i(t)\|_\infty < \varepsilon, s \in (-\infty, 0]$ .

**注 1** 对于引理 1 的证明, 只需对文献 [6] 中引理 1 的证明稍加修改便可得到.

下面给出一个确保系统 (2) 的零解群指数稳定的定理:

**定理 1** 系统 (2) 满足假设 1, 且存在常数  $\eta > 0$  和  $\xi > 0$ , 使得  $2 \ln \eta_k / (t_k - t_{k-1}) \leq \eta < \xi$ , 这里  $\eta_k = \sup_{i \in N} \{1, \gamma_{ik}\}, k \in N$ . 如果系统 (2) 满足如下条件, 则系统 (2) 的零解是群指数稳定的, 且指数收敛率为  $(\xi - \eta)/2$ .

**条件 1**  $\|f_i(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) - f_i(z_1(t), z_2(t), z_3(t))\| \leq l_1 \|y_1(t) - z_1(t)\| + l_2 \|y_2(t) - z_2(t)\| + d \|y_3(t) - z_3(t)\|, 0 < d < 1$ .

**条件 2** 对于孤立子系统  $\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), 0, 0), i = 1, 2, \dots$ , 存在 Lyapunov 函数  $v_i(x_i(t))$  和正常数  $\alpha_i, \alpha_h, \alpha_1, \alpha_2$ , 使得如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \alpha_l \|x_i(t)\|^2 &\leq v_i(x_i(t)) \leq \alpha_h \|x_i(t)\|^2, \\ \frac{\partial v_i(x_i(t))}{\partial x_i(t)} f_i(x_i(t), 0, 0) &\leq -\alpha_1 \|x_i(t)\|^2, \\ \left\| \frac{\partial v_i(x_i(t))}{\partial x_i(t)} \right\| &\leq \alpha_2 \|x_i(t)\|. \end{aligned}$$

**条件 3**  $(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) \left(\frac{1}{\alpha_h}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_2 (l_2 + dl_1) \left(\frac{1}{\alpha_l}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - d)^{-1} < 0$ .

**证明** 对于  $t \neq t_k, k \in N$ , 根据条件 1, 可得到

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_i(t)\| &= \\ \|f_i(x_i(t), x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t)), \\ &x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))) - f_i(0, 0, 0)\| \leq \\ l_1 \|x_i(t)\| &+ (l_2 + dl_1) [\|x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))\| + \\ d \|x_{i-2}(t - \tau_{i,i-2}(t))\| &+ \dots + \\ d^{i-2} \|x_1(t - \tau_{i,1}(t))\|], &i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

令

$$w_i = \exp(\xi t) v_i, i = 2, 3, \dots, \quad (5)$$

当  $t \neq t_k, k \in N$  时, 计算  $D^+ w_i(t)$  沿系统 (2) 的零解的右上导数, 可得到

$$\begin{aligned} D^+ w_i(t) &= \\ [\partial v_i(t) / \partial x_i] f_i(x_i(t), x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t)), \\ &x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))) \exp(\xi t) + \xi \exp(\xi t) v_i(t) = \\ \{[\partial v_i(t) / \partial x_i] [f_i(x_i(t), x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t)), \\ &x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))) - f_i(x_i(t), 0, 0)] + \\ [\partial v_i(t) / \partial x_i] f_i(x_i(t), 0, 0) + \xi v_i(t)\} \exp(\xi t). \end{aligned} \quad (6)$$

根据条件 2, 方程 (6) 整理为

$$\begin{aligned} D^+ w_i(t) &\leq \\ [(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) \|x_i(t)\|^2 + \\ &\alpha_2 \|x_i(t)\| (l_2 \|x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))\| + \\ &d \|\dot{x}_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))\|)] \exp(\xi t) = \\ \|x_i(t)\| [(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) \|x_i(t)\| + \alpha_2 (l_2 \|x_{i-1}(t - \\ &\tau_{i,i-1}(t))\| + d \|\dot{x}_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))\|)] \exp(\xi t). \end{aligned} \quad (7)$$

将式 (4) 代入 (7), 得

$$\begin{aligned} D^+ w_i(t) &\leq \\ \|x_i(t)\| \{(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) \|x_i(t)\| + \\ &\alpha_2 (l_2 + dl_1) [\|x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))\| + d \|x_{i-2}(t - \\ &\tau_{i,i-2}(t))\| + \dots + d^{i-2} \|x_1(t - \tau_{i,1}(t))\|]\} \exp(\xi t). \end{aligned} \quad (8)$$

由条件 2, 可进一步得到

$$\begin{aligned} D^+ w_i(t) &\leq \\ \|x_i(t)\| \{(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) (1/\alpha_h)^{1/2} (v_i(t))^{1/2} + \\ &\alpha_2 (l_2 + dl_1) (1/\alpha_l)^{1/2} [(v_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t)))^{1/2} + \\ &d (v_{i-2}(t - \tau_{i,i-2}(t)))^{1/2} + \dots + \\ &d^{i-2} (v_1(t - \tau_{i,1}(t)))^{1/2}]\} \exp(\xi t) \leq \\ \|x_i(t)\| \{(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) (w_i(t)/\alpha_h)^{1/2} + \\ &\alpha_2 (l_2 + dl_1) (1/\alpha_l)^{1/2} [(w_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t)))^{1/2} + \\ &d (w_{i-2}(t - \tau_{i,i-2}(t)))^{1/2} + \dots + \\ &d^{i-2} (w_1(t - \tau_{i,1}(t)))^{1/2}]\} \exp[\xi(t + (i - 1)\tau_i)/2]. \end{aligned} \quad (9)$$

因为  $0 < d < 1$ , 所以  $(1 - d)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} d^{j-1}$ , 故

$$1 + d + \dots + d^{i-2} < (1 - d)^{-1}, i = 2, 3, \dots$$

取  $w_{i-j,0} = 1, j = 0, 1, \dots, i - 1, i = 2, 3, \dots$ , 并考虑条件 3, 有

$$\begin{aligned} D^+ w_i(t) &\leq \\ \|x_i(t)\| \{(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) \alpha_h^{-1/2} + \alpha_2 (l_2 + dl_1) \times \\ &\alpha_l^{-1/2} (1 + d + \dots + d^{i-2})\} \exp[\xi(t + (i - 1)\tau_i)/2] < \\ \|x_i(t)\| [(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) \alpha_h^{-1/2} + \alpha_2 (l_2 + dl_1) \times \\ &(1 - d)^{-1} \alpha_l^{-1/2}] \exp[\xi(t + (i - 1)\tau_i)/2] < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

由式 (9) 和 (10) 以及引理 1 可知, 对于任意给定的  $\varepsilon_0 > 0$ , 存在  $\delta_0 > 0$ , 使得

$$\sup_i \|w_i(s)\|_\infty < \delta_0 \Rightarrow \sup_i \|w_i(t)\|_\infty < \varepsilon_0,$$

其中  $-\tau_i < s \leq 0$ .

对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 令  $\varepsilon_0 = \alpha_l \varepsilon^2$ , 对于  $\varepsilon_0$ , 取  $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$ .

定义  $\gamma : v_i = \tau \delta_0$ , 显然如下不等式成立:

$$\alpha_1 (\tau \delta_0 / \alpha_h)^{1/2} + \alpha_2 (l_2 + dl_1) (1 - d)^{-1} (\tau \delta_0 / \alpha_l)^{1/2} < 0.$$

定义箱体  $B_a = \{w | 0 \leq w_i \leq \delta_0, i = 1, 2, \dots\}$ , 箱面为

$$f_a^i = \{w \in \partial B_a | w_i = \delta_0, w_j \leq \delta_0, j = 1, 2, \dots, i-1\}.$$

当  $\sup_i \|w_i(s)\|_\infty < \delta_0, -\tau_i < s \leq 0$ , 即初始条件在箱体  $B_a$  之内, 则由引理 1 的证明过程<sup>[6]</sup>可知, 轨线不会跑出箱体  $B_a$  之外, 即  $0 \leq \|w_i(t)\|_\infty \leq \delta_0 < \varepsilon_0$ .

取  $\delta = (\delta_0/\alpha_h)^{1/2}$ , 当  $\sup_i \|x_i(0)\| < \delta$  时, 有  $w_i(0) = v_i(0) \leq \alpha_h \|x_i(0)\|^2 \leq \alpha_h \delta^2 = \delta_0$ , 进而

$$w_i(t) = v_i(t) \exp(\xi t) < \varepsilon_0,$$

即

$$\sup_i \|x_i(t)\| \leq$$

$$[(v_i(t)/\alpha_l) \exp(\xi t)]^{1/2} \exp(-\xi t/2) <$$

$$(\varepsilon_0/\alpha_l)^{1/2} \exp(-\xi t/2) = \varepsilon \exp(-\xi t/2), i = 2, 3, \dots.$$

记  $\sup_i \|x_i(t)\| < \eta_0 \varepsilon \exp(-\xi t/2), 0 \leq t < t_1$ , 这里  $\eta_0 = 1$ .

下面证明当系统中存在脉冲干扰时, 系统 (2) 的零解仍是群指数稳定的.

首先采用数学归纳法证明下式成立:

$$\sup_i \|x_i(t)\|_\infty < \eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \varepsilon \exp(-\xi t/2),$$

即

$$\sup_i \|x_i(t)\|_\infty^2 < (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1})^2 \varepsilon^2 \exp(-\xi t),$$

$$t_{k-1} \leq t < t_k, i = 1, 2, \dots, k \in N.$$

假设下面的不等式对于  $t_{p-1} \leq t < t_p, p = 1, 2, \dots, k$  均成立:

$$\|x_i(t)\|_\infty^2 < (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1})^2 \varepsilon^2 \exp(-\xi t). \quad (11)$$

当  $t = t_k$  时, 利用假设 1, 有

$$\|x_i(t_k^+)\|_\infty^2 = \|x_i(t_k^-) + I_{ik}(x_i(t_k^-))\|_\infty^2 \leq \gamma_{ik}^2 \|x_i(t_k^-)\|_\infty^2 \leq \eta_k^2 \|x_i(t_k^-)\|_\infty^2.$$

由假设  $\eta_k \geq 1$  和式 (11), 可得到

$$\|x_i(t)\|_\infty^2 < (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \eta_k)^2 \varepsilon^2 \exp(-\xi t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k. \quad (12)$$

显然式 (12) 蕴含下式成立:

$$\|x_i(t)\|_\infty^2 < (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \eta_k)^2 \varepsilon^2 \exp(-\xi t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (13)$$

若式 (13) 不成立, 则存在某个  $i$  和  $t^* \in [t_k, t_{k+1})$ , 使得

$$\|x_i(t^*)\|_\infty^2 = (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \eta_k)^2 \varepsilon^2 \exp(-\xi t^*), \quad (14)$$

以及  $D^+ w_i(t^*) \geq 0$  成立, 且

$$\|x_j(t)\|_\infty^2 \leq (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \eta_k)^2 \varepsilon^2 \exp(-\xi t), \quad t \in [t_k - \tau_j, t^*], j = 1, 2, \dots, i-1.$$

考虑到式 (8), 显然有

$$D^+ w_i(t^*) \leq$$

$$[(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) + \alpha_2(l_2 + dl_1)(1-d)^{-1}] \times$$

$$(\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \eta_k)^2 \varepsilon^2, \quad (15)$$

而由条件 3 可知下式成立:

$$(-\alpha_1 + \xi \alpha_h) + \alpha_2(l_2 + dl_1)(1-d)^{-1} < 0,$$

因此  $D^+ w_i(t^*) < 0$ . 这与式 (14) 假设  $D^+ w_i(t^*) \geq 0$  矛盾, 即  $t_{k-1} \leq t < t_k$  时, 下面的不等式成立:

$$\sup_i \|x_i(t)\|_\infty < \eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \varepsilon \exp(-\xi t/2),$$

$$i = 1, 2, \dots, k \in N.$$

因为  $2 \ln \eta_k / (t_k - t_{k-1}) \leq \eta < \xi$ , 所以

$$\eta_k \leq \exp[\eta(t_k - t_{k-1})/2], k \in N.$$

进而有

$$\sup_i \|x_i(t)\|_\infty <$$

$$\eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{k-1} \varepsilon \exp(-\xi t/2) \leq$$

$$\exp[\eta(t_1 - t_0)/2] \exp[\eta(t_2 - t_1)/2] \cdots \times$$

$$\exp[\eta(t_{k-1} - t_{k-2})/2] \varepsilon \exp(-\xi t/2) \leq$$

$$\varepsilon \exp[-(\xi - \eta)t/2],$$

即  $\sup_i \|x_i(t)\|_\infty \leq \varepsilon \exp[-(\xi - \eta)t/2], t_{k-1} \leq t < t_k$ .

综上, 有

$$\sup_i \|x_i(t)\|_\infty < \varepsilon \exp[-(\xi - \eta)t/2], t \geq t_0.$$

根据定义 2, 当系统中存在脉冲扰动时, 系统 (2) 的零解是群指数稳定的, 指数收敛率为  $(\xi - \eta)/2$ .  $\square$

#### 4 车辆纵向跟随的控制器设计

下面基于控制向量 Lyapunov 函数法的思想, 利用滑模变结构控制策略对具有脉冲扰动的变时滞前车辆纵向跟随系统进行控制器设计.

具有脉冲扰动的变时滞前车辆动力学模型可由如下方程描述:

$$\ddot{x}_i(t) = \frac{-c_i \dot{x}_i^2(t - \tau_{i1}(t)) + u_i(t - \tau_{i2}(t)) - F_i}{M_i}, \quad t \neq t_k, i = 1, 2, \dots, k \in N; \quad (16)$$

$$\Delta v_i(t_k) = v_i(t_k^+) - v_i(t_k^-) = I_{ik}(v_i(t_k^-)),$$

$$t = t_k, i = 1, 2, \dots, k \in N. \quad (17)$$

其中:  $x_i$  为第  $i$  个车辆的位置,  $c_i \dot{x}_i^2$  为空气阻力,  $u_i$  为制动力,  $F_i$  为地面阻力,  $M_i$  为第  $i$  个车辆的惯性因素;  $\tau_{i1}(t) > 0$  表示第  $i$  个车辆的状态延时,  $\tau_{i2}(t) > 0$  表示第  $i$  个车辆的控制信号时滞. 令  $\bar{\tau}_{i1} = \sup_{t \geq 0} \tau_{i1}(t), \bar{\tau}_{i2} = \sup_{t \geq 0} \tau_{i2}(t)$ . 假设系统 (16) 的初始条件为  $x_i(s) = \phi_i(s),$

$t \geq 0, -\bar{\tau}_{i1} \leq s \leq 0, u_i(s) = \psi_i(s), -\bar{\tau}_{i2} \leq s \leq 0$ .

考虑到在车队运行过程中车辆速度不可避免地会受到干扰, 从而导致车辆速度瞬时增大或减小. 为

为了避免车辆与其前后车辆发生碰撞, 假设

$$\underline{\gamma}_{ik} v_i(t_k^-) \leq v_i(t_k^+) \leq \bar{\gamma}_{ik} v_i(t_k^-), \quad 0 < \underline{\gamma}_{ik} < 1 < \bar{\gamma}_{ik},$$

其中  $\underline{\gamma}_{ik}$  和  $\bar{\gamma}_{ik}$  均为常数,  $i = 1, 2, \dots, k \in N$ .

图1为一个前车辆纵向跟随系统的参考模型示意图, 图中  $L_i$  表示第  $i-1$  个车辆与第  $i$  个车辆之间设定的期望车间距常数,  $i = 1, 2, \dots$ . 假设车队中所有跟随车辆都可以接收到领头车辆的位置、速度以及加速度信息, 而第  $i$  个车辆根据领头车辆以及第  $i-1$  个车辆的信息不断调整自身的位置和速度, 最终使得第  $i$  个车辆与第  $i-1$  个车辆之间的位置距离保持在期望间距  $L_i$ .

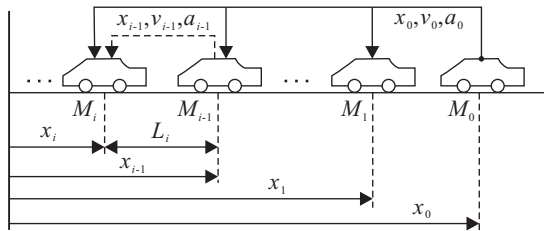


图1 车辆纵向跟随系统的参考模型

设  $e_i(t)$  为第  $i$  个车辆与第  $i-1$  个车辆之间的距离误差, 表达式如下:

$$e_i(t) = x_i(t) - x_{i-1}(t) + L_i. \quad (18)$$

显然有  $\dot{e}_i(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t)$ ,  $\ddot{e}_i(t) = \ddot{x}_i(t) - \ddot{x}_{i-1}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

控制的最终目的是使  $e_i(t)$  和  $\dot{e}_i(t)$  指数收敛到0. 将式(16)整理为

$$\begin{aligned} \ddot{e}_i(t) = & [u_i(t - \tau_{i2}(t)) - c_i(\dot{e}_i(t - \tau_{i1}(t)) + \\ & \dot{x}_{i-1}(t - \tau_{i1}(t)))^2 - F_i]/M_i - \ddot{x}_{i-1}(t), \\ & t \neq t_k, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

当  $t = t_k$  时, 有

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_{ik} v_i(t_k^-) & \leq v_i(t_k^+) = \\ v_i(t_k^-) + I_{ik}(v_i(t_k^-)) & \leq \bar{\gamma}_{ik} v_i(t_k^-), \end{aligned}$$

故存在  $\eta_k \geq \sup_i \{\bar{\gamma}_{ik}\}$ , 使得

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t_k^+) & = v_i(t_k^+) - v_{i-1}(t_k^+) = \\ I_{ik}(v_i(t_k^-)) + v_i(t_k^-) - I_{(i-1)k}(v_{i-1}(t_k^-)) - v_{i-1}(t_k^-) & \leq \\ \bar{\gamma}_{ik}[v_i(t_k^-) - (\underline{\gamma}_{(i-1)k}/\bar{\gamma}_{ik})v_{i-1}(t_k^-)] & \leq \\ \eta_k[v_i(t_k^-) - v_{i-1}(t_k^-)], \end{aligned}$$

即

$$\dot{e}_i(t_k^+) \leq \eta_k \dot{e}_i(t_k^-), \quad i = 1, 2, \dots, k \in N. \quad (20)$$

假设存在常数  $\eta > 0$ , 使得  $2 \ln \eta_k / (t_k - t_{k-1}) \leq \eta$ .

已知实数集  $R$  是可测集合, 且  $t \in [0, \infty) \subset R^+$ . 考虑到  $v_i(t)$  在区间  $(t_{k-1}^+, t_k^-)$  上是连续的, 而在集合

$\{t_k^-, t_k^+\}$  中是简单函数, 从而  $v_i(t)$  在积分区间  $(t_{k-1}^+, t_k^+)$  是可测的, 其中  $k \in N$ .

令  $E_k = (t_{k-1}^+, t_k^+) = E_k^1 \cup E_k^2 \cup E_k^3$ , 其中

$$E_k^1 = (t_{k-1}^+, t_k^-), \quad E_k^2 = \{t_k^-\}, \quad E_k^3 = \{t_k^+\}.$$

显然  $E_k^1 \cap E_k^2 \cap E_k^3 = \emptyset$ . 令  $(L) \int_{E_k} v_i(t) dt$  为  $v_i(t)$  在集合  $E_k$  的积分, 且  $\text{mes}(\cdot)$  表示测度, 则有

$$\begin{aligned} x_i(t_k^+) & = x_i(t_{k-1}^-) + (L) \int_{E_k} v_i(t) dt = \\ x_i(t_{k-1}^-) + (L) \int_{E_k^1} v_i(t) dt + & \\ (L) \int_{E_k^2} v_i(t) dt + (L) \int_{E_k^3} v_i(t) dt, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} x_i(t_k^-) & = \\ x_i(t_{k-1}^-) + (L) \int_{E_k^1} v_i(t) dt + (L) \int_{E_k^2} v_i(t) dt. \end{aligned}$$

因为  $\text{Mes}(E_k^2) = \text{Mes}(E_k^3) = 0$ ,  $\text{Mes}(\cdot)$  表示集合的测度, 所以  $x_i(t_k^+) = x_i(t_k^-)$ , 进而有

$$\begin{aligned} e_i(t_k^+) & = x_i(t_k^+) - x_{i-1}(t_k^+) + L_i = \\ x_i(t_k^-) - x_{i-1}(t_k^-) + L_i & < \\ \eta_k e_i(t_k^-), \quad i = 1, 2, \dots, k \in N. \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4.1 控制规律设计

对于第  $i$  辆车,  $i = 1, 2, \dots$ , 为其位置跟随误差  $e_i$  趋近于0, 需根据第  $i-1$  辆车以及领头车辆的位置、速度和加速度信息设计控制输入  $u_i$ , 进而不断调整该车辆的加速度, 最终控制该车辆的速度和位置. 采用滑模控制策略, 定义如下切换函数:

$$\begin{aligned} S_i(t) = & q_1[\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))] + \\ & q_2[x_i(t) - x_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t)) + L_i] + \\ & q_3[\dot{x}_i(t) - v_0(t - \tau_{i,0}(t))] + \\ & q_4 \left[ x_i(t) - x_0(t - \tau_{i,0}(t)) + \sum_{j=1}^i L_j \right], \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\tau_{i,i-1}(t) \geq 0$  为第  $i-1$  辆车的信息传递到第  $i$  辆车的通信延时. 当  $t \neq t_k, k \in N$  时, 计算  $S_i$  沿式(16)的导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) = & q_1(\ddot{x}_i(t) - \ddot{x}_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))) + \\ & q_2(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))) + q_3(\ddot{x}_i(t) - \\ & a_0(t - \tau_{i,0}(t))) + q_4(\dot{x}_i(t) - v_0(t - \tau_{i,0}(t))) = \\ & (q_1 + q_3)[(-c_i \dot{x}_i^2(t - \tau_{i1}(t)) + u_i(t - \tau_{i2}(t)) - \\ & F_i)/M_i] - q_1 \ddot{x}_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t)) + q_2(\dot{x}_i(t) - \\ & \dot{x}_{i-1}(t - \tau_{i,i-1}(t))) - q_3 a_0(t - \tau_{i,0}(t)) + \\ & q_4(\dot{x}_i(t) - v_0(t - \tau_{i,0}(t))). \end{aligned} \quad (23)$$



如果  $q_1q_3 > 0, q_2q_3 > 0, q_1(q_2 + q_4) > 0$ , 则

$$\begin{aligned} l_1 &= (q_2 + q_4)/(q_1 + q_3) > 0, \\ l_2 &= q_2/(q_1 + q_3) > 0, \\ 0 < d &= q_1/(q_1 + q_3) < 1. \end{aligned}$$

故对于  $i = 1, 2, \dots$ , 有

$$\begin{aligned} & \|f_i(z_i(t), z_{i-1}(t), \dot{z}_{i-1}(t))\| = \\ & \| -l_1z_i(t) + l_2z_{i-1}(t - \tau) + d\dot{z}_{i-1}(t - \tau) \| \leq \\ & l_1\|z_i(t)\| + l_2\|z_{i-1}(t - \tau)\| + d\|\dot{z}_{i-1}(t - \tau)\|. \end{aligned}$$

取  $V_i(t) = e_i^2(t), i = 1, 2, \dots$ , 则  $\alpha_l = \alpha_h = 1, \alpha_1 = 2l_1, \alpha_2 = 2$ . 令  $q_3q_4 > 2q_1 + q_4$ , 取  $\xi = (q_3q_4 - 2q_1 - q_4)/[q_3(q_1 + q_3)]$ , 则有

$$\begin{aligned} & (-\alpha_1 + \xi\alpha_h)(1/\alpha_h)^{1/2} + \\ & \alpha_2(l_2 + dl_1)(1/\alpha_l)^{1/2}(1 - d)^{-1} = \\ & (2q_1 + q_4 - q_3q_4)/[q_3(1 + q_3)] < 0. \end{aligned}$$

综上, 由定理1可知, 如果参数  $q_1, q_2, q_3$  和  $q_4$  满足如下条件, 则系统(33)的零解是群指数稳定的:

$$\begin{cases} q_1q_3 > 0, q_2q_3 > 0, \\ q_1(q_2 + q_4) > 0, q_3q_4 > 2q_1 + q_4. \end{cases} \quad (34)$$

进而, 令  $M = \sup_i \|z_i(s)\|_\infty, -\tau \leq s \leq 0$ , 则由定理1可得  $z_i(t) < M \exp[-(\xi - \eta)t/2]$ . 由式  $z_i(t) = \dot{e}_i(t) + \lambda e_i(t)$  可知, 对于  $i = 1, 2, \dots$ , 有

$$e_i(t) = e_i(0) \exp(-\lambda t) + \int_0^t z_i(\mu) \exp[-\lambda(t - \mu)] d\mu.$$

通过计算, 如果  $\lambda = 0.5\xi - \eta$ , 则

$$|e_i(t)| \geq |e_i(0)| \exp(-\lambda t) + Mt \exp(-\lambda t); \quad (35)$$

如果  $\lambda \neq 0.5\xi - \eta$ , 则

$$\begin{aligned} |e_i(t)| & \leq |e_i(0)| \exp(-\lambda t) + [M/|0.5\xi - \lambda - \eta|] \times \\ & |\exp(-\lambda t) - \exp[(\eta - 0.5\xi)t]|. \end{aligned} \quad (36)$$

由式(35)和(36)可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e_i(t) \rightarrow 0$ . 由  $z_i(t) = \dot{e}_i(t) + \lambda e_i(t)$  可知,  $t \rightarrow \infty$  时,  $\dot{e}_i(t) \rightarrow 0$ .

### 5 数值仿真算例

下面对一个由4辆车组成的车队进行编队控制, 其中1辆作为领头车辆, 其余3辆为跟随车辆, 编队示意图见图1. 假设每个跟随车辆所采用的控制规律均为式(26), 为了使控制参数满足滑模运动条件(34), 控制参数分别取  $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 4, \lambda = 0.8$ . 设期望的车间距离为  $L_i = 8 \text{ m}, i = 1, 2, 3$ ; 车辆的初始位置为  $x_0(0) = 50 \text{ m}, x_1(0) = 42.5 \text{ m}, x_2(0) = 34.9 \text{ m}, x_3(0) = 27.2 \text{ m}$ ; 车辆的初始速度为  $v_0(0) = 25 \text{ m/s}, v_1(0) = 25.5 \text{ m/s}, v_2(0) = 26 \text{ m/s}, v_3(0) = 26.5 \text{ m/s}$ ; 车辆的初始加速度为  $a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = 0 \text{ m/s}^2$ . 根据误差定义(18), 可得到各个车辆初始跟随误差分别为  $e_1(0) = 0.5 \text{ m}, e_2(0) = 0.4 \text{ m}, e_3(0) = 0.3 \text{ m}$ .

假设领头车辆的加速度历时如下: 当  $0 \text{ s} \leq t < 4 \text{ s}$  时,  $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$ ; 当  $4 \text{ s} \leq t < 7 \text{ s}$  时,  $a_0 = -0.25(t-2) \text{ m/s}^2$ ; 当  $7 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}$  时,  $a_0 = -0.75 \text{ m/s}^2$ ; 当  $10 \text{ s} \leq t < 16 \text{ s}$  时,  $a_0 = 0.25(t-10) - 0.75 \text{ m/s}^2$ ; 当  $16 \text{ s} \leq t < 19 \text{ s}$  时,  $a_0 = 0.75 \text{ m/s}^2$ ; 当  $19 \text{ s} \leq t < 22 \text{ s}$  时,  $a_0 = 0.25(19 - t) + 0.75 \text{ m/s}^2$ ; 当  $22 \text{ s} \leq t \leq 30 \text{ s}$  时,  $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$ .

令车辆间通信为可变时滞

$$\tau_{ij}(t) = 0.08 + 0.02 \sin t.$$

其中:  $0 \leq j < i, i = 1, 2, 3, t \geq 0$ . 假设  $t_k = 7 \text{ s}$  时, 领头车辆的速度受到瞬时干扰, 扰动为  $v_0(t_k^+) = 1.15v_0(t_k^-)$ ; 当  $t_k = 13 \text{ s}$  时, 第2个跟随车辆的速度受到瞬时干扰, 扰动为  $v_2(t_k^+) = 0.7v_2(t_k^-)$ .

此车辆编队的数值仿真结果如图2~图5所示. 图2显示了3个跟随车辆的位移跟随误差曲线; 图3和图4分别显示了车队中4辆车的速度和加速度曲线. 为便于观察, 将图3中的领头车辆受到脉冲干扰时的速度曲线放大, 如图5所示.

由图2和图3可以看出, 当车辆跟随系统中存在脉冲扰动时, 跟随车辆的速度仍然可以较快地收敛到领头车辆的速度, 而且所有跟随车辆的位置误差仍可

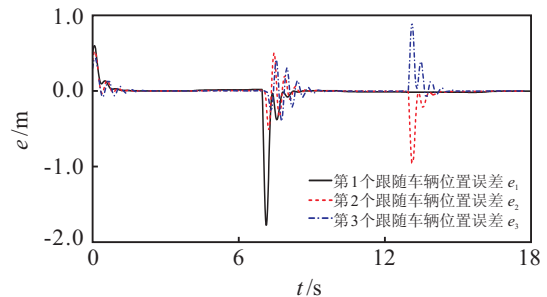


图2 脉冲变时滞车辆跟随系统的位置误差曲线

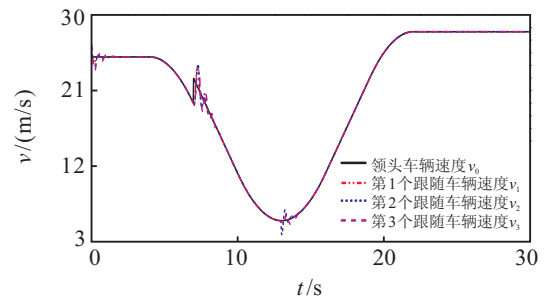


图3 脉冲变时滞车辆跟随系统的速度曲线

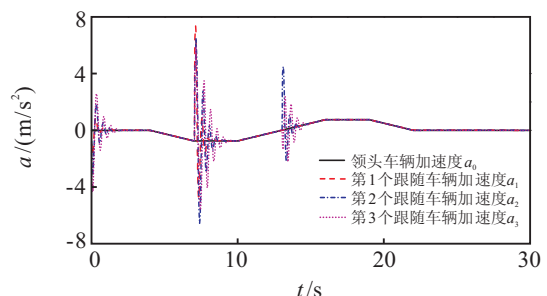


图4 脉冲变时滞车辆跟随系统的加速度曲线

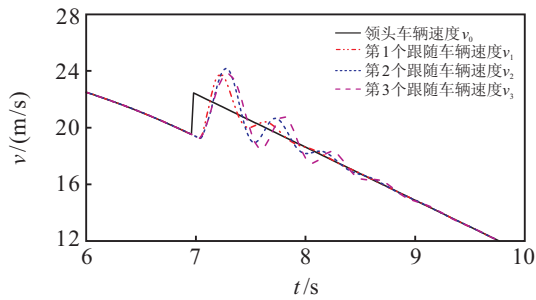


图5 领头车辆速度瞬间突变时各跟随车辆速度曲线

以收敛到0. 由图5可以看出, 当领头车辆的速度发生脉冲扰动时, 后面所有跟随车辆的状态都会随之变化. 显然, 上述仿真结果验证了本文所得结论的正确性.

## 6 结论

本文利用向量Lyapunov函数法和数学归纳法, 得到了确保具有脉冲扰动和可变时滞的顾前车辆纵向跟随系统的群指数稳定的充分条件. 该条件为显示的, 便于检验. 基于所得到的稳定性条件, 采用滑模变结构控制策略给出了具有脉冲扰动和可变时滞的顾前车辆跟随系统的控制器设计, 并给出了各个控制参数之间的关系式, 便于实际设计. 最后给出了数值仿真, 仿真结果验证了本文结论的正确性.

## 参考文献(References)

- [1] 曾智洪. 高速公路中的行车检测和车辆跟踪[J]. 自动化学报, 2003, 29(3): 450-456.  
(Zeng Z H. Lane detection and car tracking on the highway[J]. Acta Automatic Sinica, 2003, 29(3): 450-456.)
- [2] Chu K C. Decentralized control of high speed vehicle strings[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 1974, 8(3): 361-383.
- [3] Barbieri E. Stability analysis of a class of interconnected systems[J]. J of Dynamic System Measurements Control, 1993, 115(3): 546-551.
- [4] Swaroop D, Hedrick J K. String stability of interconnected systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(3): 349-357.
- [5] Swaroop D, Hedrick J. Constant spacing strategies for platooning in automated highway systems[J]. ASME J of Dynamic System, Measurement and Control, 1999, 121(3): 462-470.
- [6] Zhang J Y, Suda Y, Iwasa T. Vector Liapunov function approach to longitudinal control of vehicles in a platoon[J]. JSME Int J: Series C, 2004, 47(2): 653-658.
- [7] 张继业, 杨翊仁, 曾京. 无限维关联系统的弦稳定性[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(7): 715-719.  
(Zhang J Y, Yang Y R, Zeng J. String stability of infinite interconnected system[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(7): 715-719.)
- [8] 任殿波, 张继业. 基于Lyapunov函数方法的时滞车辆纵向跟随控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(8): 918-921.  
(Ren D B, Zhang J Y. Lyapunov function approach to longitudinal following control of vehicles in platoon with delays[J]. Control and Decision, 2007, 22(8): 918-920.)
- [9] Socha L. Exponential stability of singularly perturbed stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 576-580.
- [10] Socha L. Stochastic stability of interconnected string systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(4): 949-955.
- [11] 施继忠, 张继业, 徐晓惠. 时滞随机关联系统的群稳定性[J]. 自动化学报, 2010, 36(12): 1744-1751.  
(Shi J Z, Zhang J Y, Xu X H. String stability of stochastic interconnected systems with time delays[J]. Acta Automatic Sinica, 2010, 36(12): 1744-1751.)
- [12] Pant A, Seiler P, Hedrick K. Mesh stability of look-ahead interconnected systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 403-407.
- [13] Fossen Thor I. Marine control systems[M]. Trondheim: Marine Cybernetics, 2002: 17-113.
- [14] Panteley E, Loría A. On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-Varing systems in cascade[J]. System and Control Letters, 1998, 33(2): 131-138.
- [15] Loría A, Panteley E. Cascaded nonlinear time-varying systems: Analysis and design[Z]. Lecture Notes in Control and Information Science, Volume 311. London: Springer Verlag, 2005: 23-64.
- [16] Presterio T. Verification of a six-degree of freedom simulation model for the REMUS autonomous underwater vehicle[D]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology and Woods Hole Oceanographic Institution, 2001.

(上接第1287页)