第 29 卷 第 9 期
Vol. 29 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 9 月
Sep. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 09-1693-05 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2013.0651

离散随机 Markov 跳跃系统的广义 Lyapunov 方程解的性质

高 明[1], 盛 立[2], 张维海[1]

(1. 山东科技大学 电气与自动化工程学院，山东 青岛 266590;
2. 中国石油大学(华东) 信息与控制工程学院，山东 青岛 266580)

摘 要: 针对离散随机 Markov 跳跃系统, 基于 $\mathcal{H}$ 表示方法研究了其对应的广义 Lyapunov 方程解的性质. 首先, 证明了广义 Lyapunov 方程存在唯一实对称矩阵序列解的充分必要条件是系统的谱不包含零特征值; 然后, 在系统的谱包含零特征值的情况下, 分析了广义 Lyapunov 方程解的结构; 最后, 通过数值仿真表明了所得结论的正确性.

关键词: 离散随机 Markov 跳跃系统；广义 Lyapunov 方程；$\mathcal{H}$ 表示；谱技术
中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Properties of solutions to generalized Lyapunov equations for discrete stochastic Markov jump systems

GAO Ming[1], *SHENG Li*[2], *ZHANG Wei-hai*[1]

(1. College of Electrical Engineering and Automation，Shandong University of Science and Technology，Qingdao 266590，China；2. College of Information and Control Engineering，China University of Petroleum (East China), Qingdao 266580，China. Correspondent：GAO Ming，E-mail：yuming_gao@163.com)

Abstract: For discrete stochastic Markov jump systems, the properties of solutions to generalized Lyapunov equations(GLEs) are investigated based on the $\mathcal{H}$-representation method. Firstly, it is proved that the GLE has a unique solution in the form of a sequence of real symmetric matrices, if and only if the spectrum of the system does not contain zero eigenvalue. Moreover, the structure of solutions to GLEs is also discussed when there exist zero eigenvalue in the spectrum of the system. Finally, a numerical example is given to show the validity of the obtained results.

Key words: discrete stochastic Markov jump systems；generalized Lyapunov equations；$\mathcal{H}$-representation；spectrum technique

0 引 言

随机 Markov 跳跃系统 (SMJSs) 是按照一定的切换规则在若干个随机子系统之间进行切换的混杂系统. 此类系统已用于表示工业与经济领域中大量的动态系统, 如制造业中的随机故障过程、金融领域的证券投资模型及网络控制系统等[1-2]. 稳定性是系统能够正常工作的必要前提, SMJSs 的稳定性分析与镇定控制一直受到人们的广泛关注[3-4].

Lyapunov 方程 $PA+A^{\mathrm{T}}P=-Q$, 其中 P,Q 为实对称矩阵, 与连续线性定常系统 $\dot{x}(t)=Ax(t), x(0)=x_0\in \boldsymbol{R}^n$ 的渐近稳定性密切相关. 当 Q 为正定矩阵时, 系统的渐近稳定等价于 Lyapunov 方程有正定解 P. 此外, Zhou 等[5]指出, 上述 Lyapunov 方程的解 P 存在且唯一的充要条件是 A 的特征值满足 $\lambda_i(A)+\bar{\lambda}_j(A)\neq 0, \forall i,j=1,2,\cdots,n$. 针对线性随机系统, Zhang 等[6]将一个广义 Lyapunov 算子特征值的集合定义为随机系统的谱, 提出了 Itô 随机系统的谱分析技术, 深入讨论了随机系统对应的广义 Lyapunov 方程与系统均方稳定性、精确能检性之间的关系. 文献 [7] 基于谱技术研究了线性随机系统的区间稳定性与镇定控制问题. 最近, 文献 [8] 结合随机系统的谱分析技术提出了 $\mathcal{H}$ 表示方法, 解决了随机系统谱难以求解的问题, 并讨论了随机系统对应的广义 Lyapunov 方程解的若干性质.

收稿日期: 2013-05-18；**修回日期:** 2013-08-26.
基金项目: 国家自然科学基金项目(61174078, 61203053)；中国博士后基金项目(2013M531635)；山东省博士后创新项目专项资金项目(201203096)；教育部高等学校博士学科点专项基金项目(20120133120014)；山东省 “泰山学者” 建设工程专项经费项目.
作者简介: 高明(1981−), 女, 副教授, 博士, 从事混杂系统、随机系统的控制研究；张维海(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事随机控制、鲁棒控制等研究.

虽然人们针对离散SMJSs相关的控制问题开展了深入的研究[9-10], 但此类系统对应的广义Lyapuonv方程(GLEs)的相关研究却鲜有报道. 这是因为长期以来缺乏研究GLEs的有效手段. 另一方面, 虽然最近提出的$\mathcal{H}$表示方法[8]可以用来分析随机系统对应的广义Lyapunov方程, 但由于随机切换信号的存在, 该方法不宜直接应用于SMJSs中, 必须进行适当的调整和改进. 基于上述讨论, 本文提出一种离散SMJSs的$\mathcal{H}$表示方法, 并基于此方法研究离散SMJSs对应的GLEs解的性质.

本文采用下列记号: $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$表示实数(复数)集合; $\boldsymbol{R}^n$表示n维欧氏空间; $\boldsymbol{R}^{m\times n}$表示$m\times n$维实矩阵集合; $\boldsymbol{S}^{n\times n}$表示$n\times n$维实对称矩阵集合; $\sigma(\mathcal{M})$代表算子$\mathcal{M}$或矩阵$\mathcal{M}$的谱; $\mathrm{rank}(X)$和X^{T}分别表示矩阵X的秩与转置; $\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$表示实对称矩阵序列$A=(A_1,\cdots,A_N)$集合, 其中$A_i\in\boldsymbol{S}^{n\times n}, i=1,2,\cdots,N$; I_n表示$n\times n$维单位矩阵; $\mathrm{diag}\{\cdot\}$表示分块对角矩阵.

1 系统描述与准备工作

考虑如下离散随机Markov跳跃系统:

$$x(k+1)=A(r_k)x(k)+C(r_k)x(k)w(k),$$
$$x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n,\ k\in\boldsymbol{Z}. \tag{1}$$

其中: $x(k)\in\boldsymbol{R}^n$表示系统的状态, x_0是初始状态; $\boldsymbol{Z}=\{0,1,\cdots\}$; r_k表示取值于有限状态空间$\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,N\}$的离散Markov过程, 其模态间变化概率为

$$\Pr(r_{k+1}=j|r_k=i)=\pi_{ij},$$

这里$\pi_{ij}\geqslant 0,\forall i,j\in\boldsymbol{T}$, 且$\sum\limits_{j=1}^{N}\pi_{ij}=1$; $w(k)$是满足$E(w(k)=0)$和$E(w(k)w(s))=\delta_{ks}$的实随机变量. 假设随机变量$\{w(k),k\in\boldsymbol{Z}\}$与Markov链$\{r_k,k\in\boldsymbol{Z}\}$相互独立. 对于$\{r_k=i\in\boldsymbol{T}\}$, $A(r_k)$, $C(r_k)$为已知合适维常矩阵. 为方便表示, 当$r_k=i\in\boldsymbol{T}$时, $A(i):=A_i, C(i):=C_i$. 引入广义Lyapunov算子

$$\mathcal{M}:X\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n}\rightarrow(\bar{\mathcal{M}}(X_1),\cdots,\bar{\mathcal{M}}(X_N))\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n},$$

其中$\forall i\in\boldsymbol{T}$, 有

$$\bar{\mathcal{M}}(X_i)=\sum_{j=1}^{N}\pi_{ji}A_jX_jA_j^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ji}C_jX_jC_j^{\mathrm{T}}-X_i. \tag{2}$$

类似于文献[6], 定义如下算子$\mathcal{M}$的谱为系统(1)的谱.

定义 1 若存在复数$\lambda\in\boldsymbol{C}$和非零矩阵$X\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$满足$\mathcal{M}(X)=\lambda X$, 则$\lambda$和$X$分别称为$\mathcal{M}$的特征值和特征向量. 定义$\mathcal{M}$的谱为如下集合:

$$\sigma(\mathcal{M})=\{\lambda\in\boldsymbol{C}:\mathcal{M}(X)=\lambda X,\ X\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n},\ X\neq 0\}.$$

注 1 一个$n\times n$维实对称矩阵由$n(n+1)/2$个元素确定, 不难看出, 在重根按重数计算的情况下, 算子$\mathcal{M}$特征值的个数为$\dfrac{n(n+1)}{2}N$.

对于任意对称矩阵$X\in\boldsymbol{S}^{n\times n}$, 定义其拉直函数$\mathrm{vec}(\cdot)$和对称拉直函数$\mathrm{svec}(\cdot)$如下:

$$\mathrm{vec}(X)=(x_{11},\cdots,x_{1n},\cdots,x_{n1},\cdots,x_{nn})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{n^2},$$
$$\mathrm{svec}(X)=(x_{11},\cdots,x_{1n},x_{22},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{n-1,n-1},x_{n-1,n},x_{nn})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

其中$x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$表示对称矩阵X第i行, 第j列的元素. 对$A\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$定义如下两个映射:

$$\phi:\boldsymbol{S}_N^{n\times n}\rightarrow\boldsymbol{R}^{n^2N},$$
$$\phi(A)=((\mathrm{vec}(A_1))^{\mathrm{T}},\cdots,(\mathrm{vec}(A_N))^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}};$$
$$\varphi:\boldsymbol{S}_N^{n\times n}\rightarrow\boldsymbol{R}^{\frac{n\times(n+1)}{2}N},$$
$$\varphi(A)=((\mathrm{svec}(A_1))^{\mathrm{T}},\cdots,(\mathrm{svec}(A_N))^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

显然, vec、svec、ϕ、φ均是可逆的.

根据上述定义, 对于$A\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, $\phi(A)$是由A中所有元素构成的列向量, 而$\varphi(A)$是由A中所有不同元素构成的列向量, 并且$\phi(A)$与$\varphi(A)$之间存在如下关系:

$$\phi(A)=H_N^n\varphi(A),\ H_N^n\in\boldsymbol{R}^{n^2N\times\frac{n(n+1)}{2}N}. \tag{3}$$

其中: $H_N^n\varphi(A)$为$\phi(A)$的$\mathcal{H}$表示, H_N^n为$\phi(A)$的$\mathcal{H}$表示矩阵. 为了保证其唯一性, 限定H_N^n的每一行只有一个元素为1, 其他元素均为0.

由上述分析易知H_N^n是列线性无关的, 即

$$\mathrm{rank}(H_N^n)=\frac{n(n+1)}{2}N.$$

由矩阵理论知如下结论成立:

$$\mathrm{rank}((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)=\mathrm{rank}(H_N^n)=\frac{n(n+1)}{2}N.$$

因此$(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n$是可逆矩阵. 进而定义矩阵

$$\begin{aligned}\varGamma(H_N^n):=&((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)^{-1}(H_N^n)^{\mathrm{T}}(\varPi^{\mathrm{T}}\otimes I_{n^2})\times\\&\mathrm{diag}\{A_1\otimes A_1+C_1\otimes C_1-I_{n^2},\cdots,\\&A_N\otimes A_N+C_N\otimes C_N-I_{n^2}\}H_N^n.\end{aligned} \tag{4}$$

其中: $\varPi=\{\pi_{ij}\}_{N\times N}$, $\otimes$表示Kronecker积.

引理 1[11] 对于合适维的矩阵A、P、B, 有

$$\mathrm{vec}(APB)=(A\otimes B^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(P).$$

引理 2 对于某个向量$\xi\in\boldsymbol{R}^{n^2N}$, 若$\phi^{-1}(\xi)\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, 则存在向量$\zeta\in\boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}N}$, 使$\xi=H_N^n\zeta$.

证明 令$X=\phi^{-1}(\xi)\in\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, 则$\xi=\phi(X)=H_N^n\varphi(X)$. 再令$\zeta=\varphi(X)$即可得证. □

根据映射ϕ和φ的定义, 以下引理显然成立.

引理 3 对于某个向量$\zeta\in\boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}N$, 有

$$\phi^{-1}(H_N^n\zeta)=\varphi^{-1}(\zeta).$$

算子$\mathcal{M}$的谱与矩阵$\varGamma(H_N^n)$的特征值集合密切

相关, 有如下引理成立.

引理 4 $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\Gamma(H_N^n))$.

证明 首先证明 $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(\Gamma(H_N^n))$. 假设 λ 是算子 $\mathcal{M}$ 的任一给定特征值, 非零矩阵 $X \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$ 是其对应的特征向量, 则有

$$\mathcal{M}(X) = \lambda X. \tag{5}$$

由式 (2) 及引理 1 知, $\forall i \in \boldsymbol{T}$, 有

$$\mathrm{vec}(\bar{\mathcal{M}}(X_i)) = \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}[(A_j \otimes A_j + C_j \otimes C_j)\times \mathrm{vec}(X_j)] - (I_n \otimes I_n)\mathrm{vec}(X_i). \tag{6}$$

根据式 (6), 并在式 (5) 两边取映射 ϕ, 可得

$$(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})M\phi(X) = \lambda\phi(X), \tag{7}$$

其中 $M = \mathrm{diag}\big\{A_1 \otimes A_1 + C_1 \otimes C_1 - I_{n^2}, \cdots, A_N \otimes A_N + C_N \otimes C_N - I_{n^2}\big\}$. 由式 (3) 知, (7) 可转化为

$$(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\varphi(X) = \lambda H_N^n\varphi(X). \tag{8}$$

式 (8) 两边同时左乘 $(H_N^n)^{\mathrm{T}}$, 可得

$$(H_N^n)^{\mathrm{T}}(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\varphi(X) = \lambda(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n\varphi(X). \tag{9}$$

由于矩阵 $(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n$ 可逆, 式 (9) 左右两边同时左乘 $((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)^{-1}$, 可得 $\Gamma(H_N^n)\varphi(X) = \lambda\varphi(X)$, 其中 $\Gamma(H_N^n)$ 如式 (4) 中定义. 因此 λ 为 $\Gamma(H_N^n)$ 的特征值, $\varphi(X)$ 为其对应的特征向量, $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(\Gamma(H_N^n))$. 又因为矩阵 $\Gamma(H_N^n)$ 和算子 $\mathcal{M}$ 都有且仅有 $\dfrac{n(n+1)}{2}N$ 个特征值, 所以 $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\Gamma(H_N^n))$. □

注 2 直接根据定义 1, 系统 (1) 的谱很难求取, 引理 4 将此问题转换为矩阵 $\Gamma(H_N^n)$ 的特征值求解问题, 易于利用已有的仿真软件计算. 此外, 矩阵 $\Gamma(H_N^n)$ 实际上就是文献 [4] 提出的 "诱导矩阵".

2 广义 Lyapunov 方程解的性质

给定 $P \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, $Q \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, 离散随机 Markov 跳跃系统 (1) 对应的广义 Lyapunov 方程为

$$\mathcal{M}(P) = -Q. \tag{10}$$

其中

$$\mathcal{M}(P) = (\bar{\mathcal{M}}(P_1), \cdots, \bar{\mathcal{M}}(P_N)) \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n},$$

$$\bar{\mathcal{M}}(P_i) = \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}A_jP_jA_j^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ji}C_jP_jC_j^{\mathrm{T}} - P_i,$$

$$i \in \boldsymbol{T}.$$

定理 1 给定 $Q \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, 广义 Lyapunov 方程 (10) 存在唯一对称矩阵序列解 $P \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, 当且仅当 $\sigma(\mathcal{M})$ 不包含 0 特征值.

证明 首先证明定理 1 的充分性. 若 $\sigma(\mathcal{M})$ 不包含 0 特征值, 则由引理 4 知, 矩阵 $\Gamma(H_N^n)$ 与算子 $\mathcal{M}$ 的特征值相同, 也不包含 0 特征值, 因此 $\Gamma(H_N^n)$ 可逆. 令

$$\xi = -\Gamma^{-1}(H_N^n)\varphi(Q), \tag{11}$$

由于 φ 是可逆映射, 下面证明 $P := \varphi^{-1}(\xi)$ 是式 (10) 的一个对称矩阵序列解. 令 $-W = \mathcal{M}(P) + Q$, 其中 $W \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, 可得

$$\mathcal{M}(P) = -Q - W. \tag{12}$$

考虑到引理 1, 式 (12) 可转换为

$$(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})M\phi(P) = -\phi(Q + W), \tag{13}$$

其中矩阵 M 的定义与式 (7) 中相同. 由式 (3) 知

$$(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\varphi(P) = -H_N^n(\varphi(Q) + \varphi(W)). \tag{14}$$

类似于引理 4 中的证明, 式 (14) 两边同时左乘 $(H_N^n)^{\mathrm{T}}$, 然后两边再同时左乘 $((H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n)^{-1}$, 并考虑式 (4), 得

$$\Gamma(H_N^n)\varphi(P) = -(\varphi(Q) + \varphi(W)). \tag{15}$$

由于矩阵 $\Gamma(H_N^n)$ 可逆, 有

$$\varphi(P) = -\Gamma^{-1}(H_N^n)(\varphi(Q) + \varphi(W)). \tag{16}$$

又因为上面定义了 $P = \varphi^{-1}(\xi)$, 所以 $\xi = \varphi(P)$. 由式 (11) 和 (16) 可知 $-\Gamma^{-1}(H_N^n)\varphi(W) = 0$, 于是有 $\varphi(W) = 0$. 根据映射 φ 的定义易知 $W = 0$. 考虑到式 (12), 可知 $P = \varphi^{-1}(\xi)$ 是 GLE(10) 的一个解. 解的存在性得证.

再证解的唯一性. 若 $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ 都是式 (10) 的解, 则有

$$\mathcal{M}(P^{(1)}) = -Q, \tag{17}$$

$$\mathcal{M}(P^{(2)}) = -Q. \tag{18}$$

式 (17) 与 (18) 相减可得 $\mathcal{M}(P^{(1)} - P^{(2)}) = 0$. 重复式 (15) 的推导过程, 可知下式成立:

$$\Gamma(H_N^n)(\varphi(P^{(1)}) - \varphi(P^{(2)})) = 0.$$

由于 $\Gamma(H_N^n)$ 是可逆的, 于是有

$$\varphi(P^{(1)}) = \varphi(P^{(2)}) \Rightarrow P^{(1)} = P^{(2)}.$$

解的唯一性得证. 充分性证毕.

下面利用反证法证明必要性. 假设 GLE(11) 存在唯一对称矩阵序列解, 可推导出 $\sigma(\mathcal{M})$ 包含 0 特征值. 由引理 4 可知, $\Gamma(H_N^n)$ 是奇异矩阵, 则方程

$$\Gamma(H_N^n)x = -\varphi(Q) \tag{19}$$

可能无解, 也可能有多个解. 由于 P 是式 (11) 的唯一解, $\varphi(P)$ 满足式 (19), 则 (19) 一定含有多个解. 由 $\Gamma(H_N^n)$ 的定义知, 式 (19) 等价于

$$(H_N^n)^{\mathrm{T}}(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^nx = -(H_N^n)^{\mathrm{T}}(H_N^n)\varphi(Q). \tag{20}$$

设 $\eta \in \boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}N}$ 是式 (19) 不同于 $\varphi(P)$ 的另一个解, 将 η 代入式 (20) 可得

$$(H_N^n)^{\mathrm{T}}(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\eta = -(H_N^n)^{\mathrm{T}}(H_N^n)\varphi(Q). \tag{21}$$

令 $-\varSigma = \mathcal{M}(\varphi^{-1}(\eta)) + Q$, 则 $\varphi^{-1}(\eta)$ 是下列 GLE 的解:

$$\mathcal{M}(\varphi^{-1}(\eta)) = -Q - \varSigma. \tag{22}$$

由引理 1, 式 (22) 可写为

$$(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\eta = -H_N^n(\varphi(Q) + \varphi(\varSigma)). \tag{23}$$

比较式 (20) 与 (23), 可知

$$-(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n(\varphi(Q) + \varphi(\varSigma)) = -(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n\varphi(Q).$$

由于 $(H_N^n)^{\mathrm{T}}H_N^n$ 可逆, 可得

$$\varphi(\varSigma) = 0,\ \varSigma = 0.$$

则 $\varphi^{-1}(\eta)$ 和 P 分别为 GLE(10) 的两个不同解, 与解的唯一性相矛盾, 因此假设不成立. 必要性证毕. □

注 3 文献 [12] 中的引理 2 讨论了连续随机系统对应的广义 Lyapunov 方程解的存在唯一性, 但只给出了充分性条件, 而且证明过程非常繁琐. 本文的定理 1 给出了离散 SMJSs 对应的 GLE 解存在且唯一的充分必要判据, 基于 $\mathcal{H}$ 表示的证明方法也比文献 [12] 简洁高效.

下面考虑 $\sigma(\mathcal{M})$ 包含 0 特征值的情形. 首先考虑如下齐次 GLE:

$$\mathcal{M}(P) = 0, \tag{24}$$

其中 $\mathcal{M}(P)$ 的定义如式 (10) 所示.

定理 2 1) 齐次 GLE(24) 的所有解 $P \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$ 构成了一个线性空间 $\varLambda_N^n$; 2) 如果 $\mathrm{rank}(\varGamma(H_N^n)) = p$, 其中 $0 \leqslant p < (n(n+1)/2)N$, 则

$$\dim(\varLambda_N^n) = \frac{n(n+1)}{2}N - p.$$

证明 由线性空间的定义知 1) 是显然成立的. 下面证明 2). 注意到 $P \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$ 是齐次 GLE (24) 的解, 则由定理 1 的证明可知 $\varphi(P)$ 是下式的解:

$$\varGamma(H_N^n)\varphi(P) = 0. \tag{25}$$

假设 $\xi \in \boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}N}$ 是式 (25) 的解, 则有

$$(H_N^n)^{\mathrm{T}}(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\xi = 0. \tag{26}$$

下面证明 ξ 也是

$$(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\xi = 0 \tag{27}$$

的解. 令

$$(\varPi^{\mathrm{T}} \otimes I_{n^2})MH_N^n\xi = \rho_1, \tag{28}$$

其中 $\rho_1 \in \boldsymbol{R}^{n^2N}$. 由引理 3, 式 (28) 等价于

$$\mathcal{M}(\varphi^{-1}(\xi)) = \phi^{-1}(\rho_1). \tag{29}$$

因为式 (29) 左边是对称的, 所以 $\phi^{-1}(\rho_1) \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$. 由引理 2 知, 存在 $\rho_2 \in \boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}N}$, 使

$$\rho_1 = H_N^n\rho_2. \tag{30}$$

将式 (28) 和 (30) 代入 (26), 可得

$$(H_N^n)^{\mathrm{T}}(H_N^n)\rho_2 = 0.$$

于是有 $\rho_2 = 0$, 进而 $\rho_1 = 0$. 因此 ξ 亦是式 (27) 的解向量, 即 $\varphi^{-1}(\xi)$ 是 (25) 的解.

上述分析已证明: 如果 P 是式 (24) 的解, 则 $\varphi(P)$ 是 (25) 的解; 反之, 如果 $\varphi(P)$ 是式 (25) 的解, 则 P 是 (24) 的解. 由齐次线性方程组的求解理论知, 如果 $\mathrm{rank}(\varGamma(H_N^n)) = p$, 则式 (25) 有 $\dfrac{n(n+1)}{2}N - p$ 个线性无关解 $\eta_1, \cdots, \eta_{\frac{n(n+1)}{2}N-p}$. 因此, $\varphi^{-1}(\eta_1), \cdots$ $\varphi^{-1}(\eta_{\frac{n(n+1)}{2}N-p})$ 构成了线性空间 $\varLambda_N^n$ 的一个基. 线性空间的维数

$$\dim(\varLambda_N^n) = \frac{n(n+1)}{2}N - p. \qquad \square$$

由定理 2, 并结合矩阵理论, 易得到如下定理.

定理 3 给定 $Q \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$, 并且 $0 \in \sigma(\mathcal{M})$. 如果

$$\mathrm{rank}(\varGamma(H_N^n),\ \varphi(Q)) \neq \mathrm{rank}(\varGamma(H_N^n)),$$

则 GLE(10) 不存在解 $P \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$; 如果

$$\mathrm{rank}(\varGamma(H_N^n),\ \varphi(Q)) = \mathrm{rank}(\varGamma(H_N^n)) = p,$$

其中 $0 \leqslant p < \dfrac{n(n+1)}{2}N$, 则 GLE (10) 有无穷多个解; 若 $P_1 \in \boldsymbol{S}_N^{n\times n}$ 是 GLE (10) 的特解, 则 GLE (10) 的任意解可表示为 $P = P_0 + P_1$, 其中 $P_0 \in \varLambda_N^n$.

3 数值仿真

下面结合数值例子对本文所得理论结果的正确性进行考察. 考虑二维二模态离散随机 Markov 跳跃系统 (1), 其参数为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.4 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\varPi = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

令 $P = (P_1, P_2) \in \boldsymbol{S}_2^{2\times 2}$, 则有

$$\phi(P) = (P_1^{(11)}, P_1^{(12)}, P_1^{(12)}, P_1^{(22)}, P_2^{(11)}, P_2^{(12)}, P_2^{(12)}, P_2^{(22)})^{\mathrm{T}},$$

$$\varphi(P) = (P_1^{(11)}, P_1^{(12)}, P_1^{(22)}, P_2^{(11)}, P_2^{(12)}, P_2^{(22)})^{\mathrm{T}}.$$

因此有 $\phi(P) = H_2^2\varphi(P)$, 其中

$$H_2^2 = \mathrm{diag}\{H^2, H^2\},\ H^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

由引理 4 和式 (4), 可得

$$\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\varGamma(H_N^n) =$$

$$\{-0.832\,0,\ -0.781\,3,\ 0.189\,1,\ -0.314\,9,$$

$$-0.142\,5+0.023\,5\mathrm{j},\ -0.142\,5-0.023\,5\mathrm{j}\}, \qquad (31)$$

$$\mathrm{j}^2=-1.$$

由于 $\sigma(\mathcal{M})$ 不包含 0 特征值, 根据定理 1, 给定

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{S}_2^{2\times 2},$$

GLE(10) 在 $\boldsymbol{S}_2^{2\times 2}$ 空间上存在唯一解. 利用 Matlab 仿真软件可以求出

$$P=\begin{bmatrix} 6.036\,6 & 0.313\,6 & -0.701\,0 & 0.626\,4 \\ 0.313\,6 & 3.893\,7 & 0.626\,4 & 3.110\,0 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{S}_2^{2\times 2},$$

从而验证了定理 1 的正确性.

注意到上例中求得 GLE 的解 $P\in \boldsymbol{S}_2^{2\times 2}$. 定理 1 中 $\sigma(\mathcal{M})$ 不包含 0 特征值这个条件只保证了 GLE (10) 在 $\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$ 空间上解的存在性与唯一性, 但不保证 GLE (10) 在其他线性空间上解的唯一性. 事实上, 人们更关心 $\boldsymbol{S}_N^{n\times n}$ 空间上的解, 因为此线性空间上的解与离散 SMJSs 的均方稳定性之间存在密切的关系. 因此, 定理 1 具有重要的理论意义与应用价值.

4 结　论

本文针对离散随机 Markov 跳跃系统, 基于 $\mathcal{H}$ 表示方法和谱技术深入研究了其对应的 GLE 解的性质, 给出了保证 GLE 解存在且唯一的充分必要条件, 并分析了 GLE 解的结构. 在本文研究的基础上, 讨论广义 Lyapunov 方程与离散随机 Markov 跳跃系统稳定性、能观性的关系, 将是下一步的工作重点.

参考文献(References)

[1] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-time Markovian jump linear systems[M]. London: Springer-Verlag, 2005.

[2] Mao X, Yuan C. Stochastic differential equations with Markovian switching[M]. London: Imperial College Press, 2006.

[3] Li Z Y, Zhou B, Wang Y, et al. On eigenvalue sets and convergence rate of Itô stochastic systems with Markovian switching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(5): 1118-1124.

[4] Sheng L, Gao M, Zhang W. Spectral characterisation for stability and stabilisation of linear stochastic systems with Markovian switching and its applications[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(5): 730-737.

[5] Zhou K, Doyle J C, Glover K. Robust and optimal control[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

[6] Zhang W, Zhang H, Chen B S. Generalized Lyapunov equation approach to state-dependent stochastic stabilization/detectability criterion[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(7): 1630-1642.

[7] Zhang W, Xie L. Interval stability and stabilization of linear stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(4): 810-815.

[8] Zhang W, Chen B S. $\mathcal{H}$-representation and applications to generalized Lyapunov equations and linear stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(12): 3009-3022.

[9] Dragan V, Morozan T, Stoica A M. Mathematical methods in robust control of discrete-time linear stochastic systems[M]. New York: Springer, 2010.

[10] Shen L, Sun J, Wu Q. Observability and detectability of discrete-time stochastic systems with Markovian jump[J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(1): 37-42.

[11] Bellman R. Introduction to matrix analysis[M]. Philadelphia: SIAM, 1995.

[12] Hou T, Zhang W, Ma H. Essential instability and essential destabilisation of linear stochastic systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(2): 334-340.

(责任编辑: 李君玲)