

文章编号: 1000-4750(2014)09-0057-06

柔性约束边界对板抗爆动力响应的影响分析

宋春明^{1,2}, 王明洋^{1,2}, 李 杰^{1,2}

(1. 解放军理工大学爆炸冲击防灾减灾国家重点实验室, 南京 210007; 2. 南京理工大学机械工程学院, 南京 210094)

摘 要: 约束边界的形式和刚度的差异会直接影响结构在爆炸荷载作用下的动力响应及其承载能力, 现有防护结构的计算理论未能考虑柔性边界的影响, 已不再适用, 因此有必要建立考虑边界效应的结构抗爆计算方法。该文建立了具有周边分布柔性约束板的计算模型, 推导出结构的振型函数, 并计算分析了竖向弹性与阻尼约束、抗弯约束和荷载作用时间对结构位移和内力的影响。计算表明: 竖向弹性与阻尼约束使板的整体位移增加, 由此引起的附加惯性力会消耗部分能量, 从而降低了结构的挠曲变形(相对位移)和弯矩值; 周边的抗弯约束能限制结构的转动, 也有效降低板的最大位移值, 因此可通过调节周边柔性约束的形式和刚度提高结构的抗爆潜力。荷载作用时间主要通过参数 ωt_d 影响结构的响应, ωt_d 较小时, 随着 ωt_d 的增加, 弯矩值显著增大。

关键词: 板; 柔性约束; 弹性支承; 动力响应; 爆炸荷载

中图分类号: O327 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.03.0252

EFFECTS OF FLEXIBLE BOUNDARY RESTRAINTS ON DYNAMIC RESPONSE OF A SLAB UNDER EXPLOSION LOADINGS

SONG Chun-ming^{1,2}, WANG Ming-yang^{1,2}, LI Jie^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Disaster Prevention & Mitigation of Explosion & Impact, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China;

2. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The differences of the form and stiffness of boundary restraints do directly affect the dynamic responses and bearing capacity of structures under explosion loadings, and the existing theories are not suitable for its failure to take account of effects of flexible boundary conditions. Therefore, it is necessary to establish a new method. The model for a plate under explosion loadings with flexible edge restraints is established, and the mode functions are conducted to analyze the effects of a vertically elastic support and a damping support, the rotational constraint and the duration time of loads on displacement and internal force. The results show that the vertically elastic support and damping support can make the total displacement increase, and that the inertia force induced by the increase consumes energy, making the flexural deformations and bending moments decreased. The rotational restraints confine the rotation of the plate and decrease the maximum deformation. Therefore, the anti-explosion potential can be relatively improved by adjusting the form or stiffness of flexible edge constraints. Loading time gives its influence on the dynamic response mainly by the parameter ωt_d . With the increase of ωt_d , the bending moment will significantly increase when the parameter is smaller.

Key words: plate; flexible restraint; elastic support; dynamic response; explosion loads

研究结构在动载荷作用下的非线性动力响应, 评价结构对冲击、爆炸的动力响应和承载能力是防

护工程领域中的重要研究课题。除了材料性能、结构尺寸和形式等影响因素外, 结构周边约束的差异

收稿日期: 2013-03-27; 修改日期: 2014-01-17

基金项目: 国家创新研究群体科学基金项目(51321064); 国家自然科学基金青年基金项目(51008305)

通讯作者: 宋春明(1979—), 男, 山东人, 讲师, 博士, 主要从事结构抗爆和防护工程研究(E-mail: ming1979@126.com).

作者简介: 王明洋(1966—), 男, 湖北人, 教授, 博士, 博导, 主要从事防灾减灾和防护工程研究(E-mail: wmyrf@163.com);

李 杰(1981—), 男, 山东人, 讲师, 博士, 主要从事防护工程和岩石力学研究(E-mail: lijierf@163.com).

同样直接影响到结构的抗爆动力响应及承载能力。

求解复杂约束边界条下板的动力响应,首先要选用正确的振型函数,该振型通常是基于相同约束条件下梁的振型得到的。Zhou D^[1]和 Ding Z^[2]等基于 Rayleigh-Ritz 方法和复杂边界条件下 Timoshenko 梁的静力位移函数研究了各向同性薄板的振动特性,该位移函数是由正弦级数和多项式级数组成,收敛很快。Li W L^[3-5]则采用傅里叶基数的方法将两端任意约束边界梁的位移表示为余弦级数和一个辅助的多项式函数,而多项式中的待定系数通过 Euler-Bernoulli 梁的边界求得, Henry Khov 等^[6]将这种方法扩展应用到正交各向异性板的振动研究。

在动力荷载作用下,边界约束对结构动力响应影响的研究主要集中在梁结构和拱结构上,并且已有了较好的理论方法^[7]、数值差分方法^[8-9]和部分试验成果^[10],边界效应的影响也得到较详细地分析。对于板结构,目前仍缺少直接用于求解柔性约束边界条件下结构抗爆动力响应的计算方法以及柔性约束对抗力影响的分析。

文中建立了周边柔性约束板的计算模型,该模型综合考虑了板周边具有分布的竖向弹性和阻尼支承、抗弯约束情况,利用复杂约束条件下板的振型函数,推导给出了求解复杂柔性约束板的动力响应计算方法,并通过与简支板在相同荷载作用下的位移和弯矩结果的对比,分析说明不同柔性约束的形式和刚度、荷载特性对结构响应的影响。

1 计算模型

如图 1 所示,一具有周边柔性约束方板,平面尺寸为 $a \times b$, 竖向弹性支承的分布刚度为 k , 竖向分布阻尼衰减系数为 e , 沿周边分布的抗弯刚度系数为 g , 该模型可有效模拟板与周边约束或邻近结构的相互作用,共同承受爆炸荷载,并分析柔性约束边界对结构受力和变形的影响。

板上表面承受爆炸荷载 $p(x,t)$ 作用,其表达式为:

$$p(x,y,t) = p(t)f(x)f(y) \quad (1)$$

式中, $f(x)$ 、 $f(y)$ 分别为沿 x 、 y 方向荷载的分布。

板任意点的位移可表示为:

$$w(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij}(x,y)T_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} X_i(x)Y_j(y)T_{ij}(t) \quad (2)$$

式中: $T_{ij}(t)$ 是动力函数; $W_{ij}(x,y)$ 为板的振型函数,可由梁的振型函数求得, $W_{ij}(x,y) = X_i(x)Y_j(y)$, 其中 $X_i(x)$ 、 $Y_j(y)$ 分别为具有与板在 x 和 y 方向相同边界约束条件梁的振型函数。

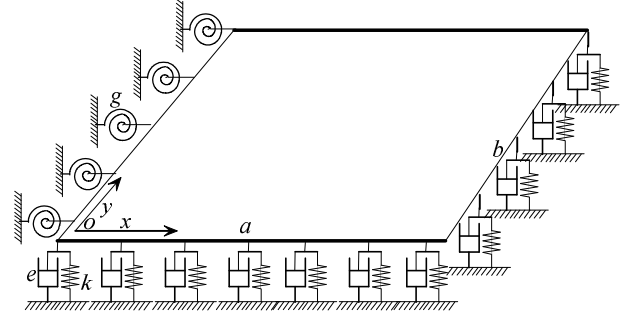


图 1 四边柔性约束的方板模型

Fig.1 The model of a square plate with flexible restraints

不同边界条件的梁结构具有不同的振型函数,对于图 1 所示的复杂约束边界,其振型函数可用傅里叶级数展开的方法得到^[3]。对于截面沿跨度保持不变的 Euler-Bernoulli 梁,其在静载作用下的型函数可用正弦函数和一个多项式组成,表示为:

$$X(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(\lambda_m x) + q(x), \quad q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3. \quad (3)$$

其中, $\lambda_m = m\pi/a$, a 为梁的计算跨度, $A_m (m=1,2,3,\dots)$ 和 $c_i (i=0,1,2,3)$ 是待定系数,可由具体的边界条件求得。

式(3)可表示为:

$$X(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m [\sin(\lambda_m x) + c_{m0} + c_{m1}x + c_{m2}x^2 + c_{m3}x^3] \quad (4)$$

其中:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m c_{mn} = c_n, \quad n=0,1,2,3 \quad (5)$$

对于周边柔性约束的板结构,其边界条件满足:

$$k_1 \cdot w = -Dw''', g_1 \cdot w' = -Dw'' \quad x=0 \quad (6a)$$

$$k_2 \cdot w = Dw''', g_2 \cdot w' = -Dw'' \quad x=L \quad (6b)$$

式中: D 为结构的抗弯刚度; k_1 、 k_2 分别为梁两端的竖向支撑刚度; g_1 、 g_2 分别为抗弯约束刚度。

式(5)中的系数 A_m 、 $c_{mi} (i=0,1,2,3)$ 可由边界条件式(6a)、式(6b)求得它们之间的关系,从而得到梁的振型。振型中的系数 $c_{mi} (i=0,1,2,3)$ 可表示为:

$$C = H^{-1} Q_a A_m \quad (7)$$

式中:

$$\mathbf{C} = \{c_{m0}, c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}\}^T \quad (8a)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & \hat{g}_1 & 2 & 0 \\ \hat{k}_2 & \hat{k}_2 a & \hat{k}_2 a^2 & \hat{k}_2 a^3 - 6 \\ 0 & \hat{g}_2 & 2\hat{g}_2 a + 2 & 3\hat{g}_2 a^2 + 6a \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$\mathbf{Q}_a = \{\lambda_m^3, \hat{g}_1 \cdot \lambda_m, -(-1)^m \lambda_m^3, (-1)^m \hat{g}_2 \lambda_m\}^T \quad (8c)$$

$$\hat{k}_1 = \frac{k_1}{D}, \hat{k}_2 = \frac{k_2}{D}, \hat{g}_1 = \frac{g_1}{D}, \hat{g}_2 = \frac{g_2}{D} \quad (8d)$$

根据求得相同边界条件梁的振型 $X_m(x)$ ，则板的振型部分可表示为：

$$W_{mn}(x, y) = X_m(x)Y_n(y) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sin(\lambda_m x) + q(x) \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n y) + q(y) \right] \quad (9)$$

采用拉格朗日法建立结构的动力方程，则体系动能的表达式为：

$$K = \frac{m}{2} \int_0^a \int_0^b \dot{w}(x, y, t)^2 dx dy \quad (10)$$

式中， m 为单位面积上板的质量， $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ 。

体系的位能由弹性支承变形能和梁变形位能两部分能量组成，假定约束刚度系数 $k_1 = k_2 = k$ ， $g_1 = g_2 = g$ ，则位能可表示为：

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \left[kw^2 + g \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=0} dx +$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_{mn} M_{11mn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_{mn} C_{11mn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} (D_{11mn} + K_{11mn} + G_{11mn}) = p(t) \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_{mn} M_{ijmn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_{mn} C_{ijmn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} (D_{ijmn} + K_{ijmn} + G_{ijmn}) = p(t) \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_{mn} M_{mnmn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_{mn} C_{mnmn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} (D_{mnmn} + K_{mnmn} + G_{mnmn}) = p(t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$M_{ijmn} = m \int_0^a \int_0^b W_{ij} W_{mn} dx dy \quad (15a)$$

$$C_{ijmn} = 2e \int_0^a W_{ij}(x, 0) W_{mn}(x, 0) dx + 2e \int_0^b W_{ij}(0, y) W_{mn}(0, y) dy \quad (15b)$$

$$D_{ijmn} = D_0 \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_0^a \left[kw^2 + g \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=b} dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_0^b \left[kw^2 + g \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=0} dy + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_0^b \left[kw^2 + g \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=a} dy + \right.$$

$$\left. \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \cdot \right.$$

$$\left. \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (11)$$

式中： D 为板的抗弯刚度； μ 是泊松比。

外荷载所作功表示为：

$$W = \int_0^a \int_0^b [p(x, y, t) - e \cdot \dot{w} \delta(y-0) - e \cdot \dot{w} \delta(y-b) - e \cdot \dot{w} \delta(x-0) - e \cdot \dot{w} \delta(x-a)] w(x, y, t) dx dy \quad (12)$$

式中， $\delta(x)$ 为 Dirac 函数。

将动能 K ，位能 V ，外力功 W ，代入到拉格朗日方程中，其中广义参数为 $T_{ij}(t)$ ，可求解边界影响下的结构动力响应。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} & 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x \partial y} \right] \left. \right\} dx dy \quad (15c)$$

$$K_{ijmn} = 2k \int_0^a W_{ij}(x, 0) W_{mn}(x, 0) dx + 2k \int_0^b W_{ij}(0, y) W_{mn}(0, y) dy \quad (15d)$$

$$G_{ijmn} = 2g \int_0^a \frac{\partial W_{ij}(x,0)}{\partial y} \frac{\partial W_{mn}(x,0)}{\partial y} dx + 2g \int_0^b \frac{\partial W_{ij}(0,y)}{\partial x} \frac{\partial W_{mn}(0,y)}{\partial x} dy \quad (15e)$$

其中, 式(15)中 K_{ijmn} 、 C_{ijmn} 、 G_{ijmn} 为柔性边界对结构响应的的影响系数。通过式(14)得到 $T_{ij}(t)$ ($i, j=1, 2, 3, \dots$) 的微分方程组, 再代入到式(2)中, 就能得到结构任意一点的位移, 而该点处的弯矩可表示为:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D [X''(x)Y(y) + \mu X(x)Y''(y)] T_{ij}(t) \quad (16)$$

2 柔性约束边界的影响

假定一方板承受三角形爆炸荷载作用, 上表面为承载面, 且荷载均匀分布, 其表达式为 $p = p_0(1-t/t_d)$, 其中 t_d 为作用时间。方板尺寸为 $a \times b = 3\text{m} \times 3\text{m}$, 厚度 0.08m 。弹性模量 $E = 210 \times 10^9 \text{Pa}$, 密度 7800kg/m^3 , 泊松比 $\mu = 0.3$ 。荷载峰值 $p_0 = 80 \text{kN}$, 作用时间 $t_d = 0.05 \text{s}$ 。

利用前面板结构振型的求解方法, 计算得到周边柔性约束条件下方板的振型, 图2为 $k = 10^7 \text{N/m}^2$ 、 $g = 0$ 时板的部分振型。可以看出, 与简支板对应振型有明显区别, 主要是在边界上的位移分布及其产生的影响, 对应的正是振型表达式中的多项式项。

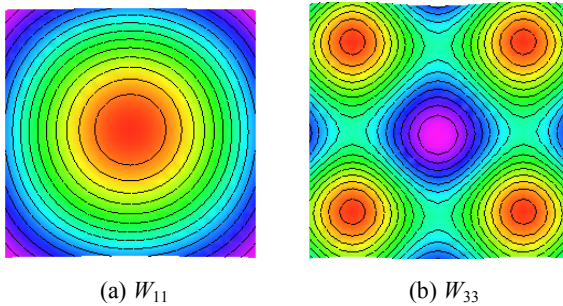


图2 方板的部分振型

Fig.2 The mode shapes for a square plate with elastic restraints

由总位移扣除掉边界变化引起的位移值, 可得到板结构自身变形所引起的位移值, 表示为:

$$V = w(x, y, t) - w_d(x, y, t) \quad (17)$$

式中: V 为相对位移值, 是板的挠曲变形; $w_d(x, y, t)$ 为边界变化引起的位移值, 由对应的四个边界点 $w(x, 0, t)$ 、 $w(x, b, t)$ 、 $w(0, y, t)$ 、 $w(a, y, t)$ 插值得。

图3是爆炸动载作用下不同竖向弹性约束刚度 $k = 10^{10} \text{N/m}^2$ 、 10^8N/m^2 、 10^7N/m^2 、 $5 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 时板中心点处的位移时程曲线, 该位移由两部分组成, 一部分是自身的挠曲变形, 另一部分是周边柔性约束引起的刚性位移。图3可以看出, 随着竖向支承刚度的降低, 板中点的总位移最大值是增大的, 原因是结构与周边约束组成串联系统的整体刚度是减小的。

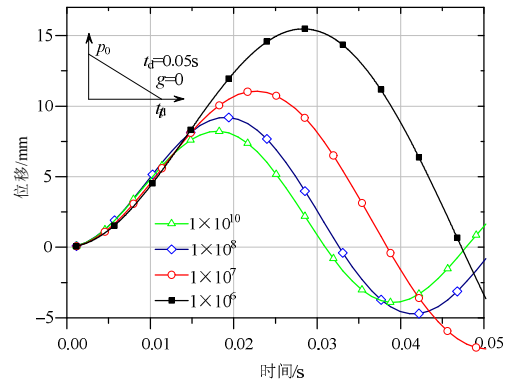


图3 竖向弹性约束对位移的影响

Fig.3 The effect of vertical stiffness on displacement

图4是不同竖向弹性约束刚度下板中心处的相对位移时程曲线, 该位移仅是由结构弯曲变形引起的挠度。当竖向弹性支撑刚度 $k = 10^{10} \text{N/m}^2$ 时, 相当于板四周简支情况, 中点相对位移峰值是 9.2mm , 当支撑刚度分别减小到 $k = 10^8 \text{N/m}^2$ 、 10^7N/m^2 、 $5 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 时, 相对位移峰值相应减小到 7.4mm 、 5.4mm 、 4.9mm , 最大减小约 47% , 说明随着竖向弹性刚度减小, 结构的相对位移最大值会相应减小, 结构的变形性降低, 主要原因有: 一是结构周边柔性约束引起的竖向位移产生附加惯性力, 消耗一部分能量; 二是竖向弹性约束本身变形存储部分能量。分析表明竖向弹性约束可调节结构, 减小动载下结构的位移动力系数。

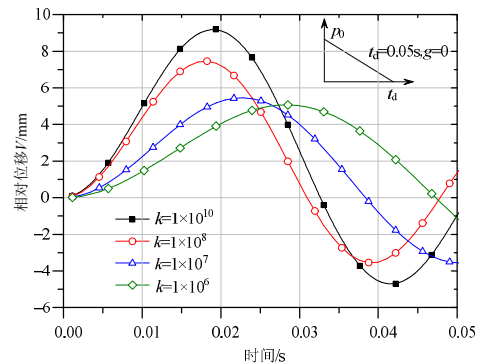


图4 相对位移时程曲线

Fig.4 Histories of relative displacement

图 5 是不同竖向弹性约束刚度下板中心处的弯矩时程曲线。当竖向弹性支撑刚度 $k=10^{10}\text{N/m}^2$ 时,即板四周简支情况,中心处的弯矩峰值最大,为 $129\text{kN}\cdot\text{m}$,竖向支承刚度 $k=5\times 10^6\text{N/m}^2$ 时,弯矩峰值最小,为 $69\text{kN}\cdot\text{m}$,减小约 47%。通过对比图 4、图 5 可明显看出,相同竖向支撑刚度下,板中心处的弯矩曲线和相对位移曲线变化规律完全一致,两类时程曲线是相似的。分析其原因,弯矩是由板自身挠曲变形引起的内力,而竖向柔性约束引起的刚性位移并不会产生内力,因此弯矩时程与相对位移时程曲线是相似的,竖向柔性约束不但减小了强动载下结构的变形性,也减小结构的内力。另外,由于竖向柔性支承减小了组合结构的刚度,使振动周期增大,位移(弯矩)的峰值时间延迟。

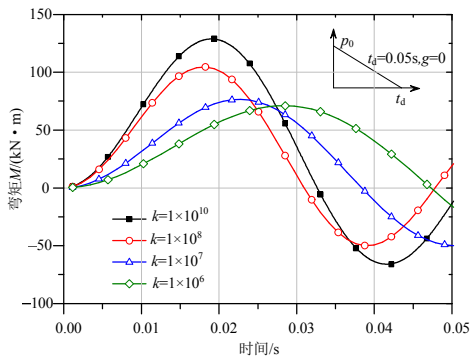


图 5 弯矩时程曲线图

Fig.5 Histories of bending moment

图 6、图 7 分别为简支板与具有周边抗弯约束条件下板中心处的位移时程曲线和弯矩时程曲线。对比图 6 和图 7,可以看出在相同约束条件下,两类曲线变化规律完全是相同的,因此可只分析位移曲线。

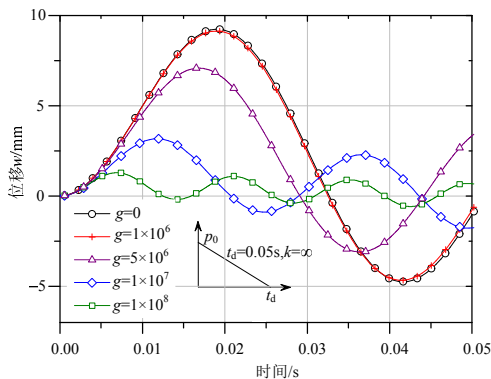


图 6 抗弯约束对位移的影响

Fig.6 The effect of rotational stiffness on displacement

当分布刚度 $g=0$ 和 $g=10^6\text{N}$ 时,中点处的位移峰值几乎相等,约为 9.2mm ,说明抗弯约束的影

响可忽略。当抗弯刚度增加到 $5\times 10^6\text{N}$ 、 10^7N 、 10^8N 时,中点处的位分别减小至 5.7mm 、 3.1mm 、 1.3mm ,与简支板相比,最大减小了 86%,且抗弯刚度越小,位移最大值就越小。说明沿板周边的抗弯约束可限制板的转动,降低其变形性,同时也降低了最大弯矩值,因此可通过调整结构周边的抗弯约束刚度来提高抗爆承载能力。

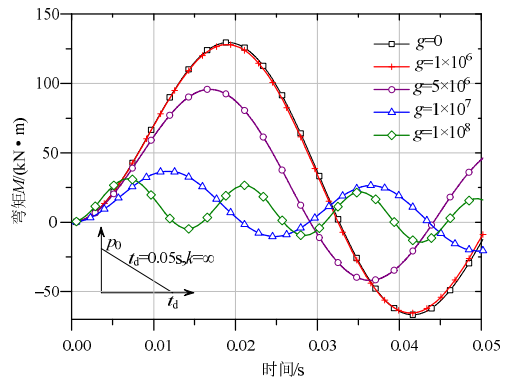


图 7 抗弯约束对弯矩的影响

Fig.7 The effect of rotational stiffness on bending moments

3 荷载作用时间的影响

除了结构和约束外,荷载的特性也对结构的动力响应产生显著影响,主要分析荷载作用时间的影响。图 8 为结构中心处的弯矩值随参数 ωt_d 的变化曲线,其中 ω 为简支方板的基频。从图 8 可以看出,曲线大体可分为三段, A 段 $\omega t_d < 50$ 时,参数 ωt_d 对跨中弯矩的影响显著,随着参数 ωt_d 的增加,弯矩值快速增加; C 段 $\omega t_d > 150$ 时,随着参数 ωt_d 的增加,弯矩值基本保持不变,参数 ωt_d 的影响可以忽略;中间部分 B 段,是过渡阶段。因此,当满足 $\omega t_d > 150$ 时,可忽略荷载作用时间对结构动力响应的影响。分析表明:荷载作用时间主要通过参数 ωt_d 影响结构的动力响应。

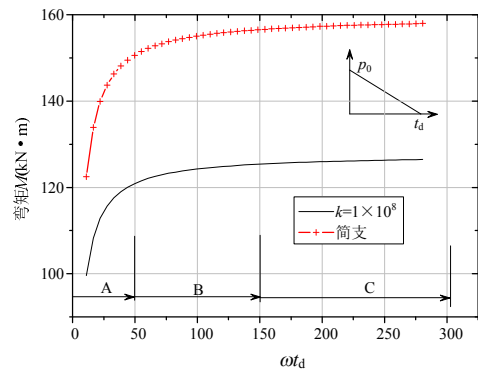


图 8 荷载作用时间对弯矩的影响

Fig.8 The effect of actuation duration on bending moments

对比图 8 中不同约束条件的两条弯矩时程曲线, 竖向支撑刚度 $k = 10^8 \text{N/m}^2$ 时板的弯矩值明显小于简支板的弯矩值, 进一步说明了竖向柔性约束对动力响应的影响作用。

4 结论

(1) 边界约束的差异直接影响结构的动力响应及相对承载能力, 文中建立柔边约束边界条件下板的抗爆计算模型, 分析了竖向弹性与阻尼约束、抗弯约束和荷载作用时间对位移和内力的影响。

(2) 具有柔性约束板的振型, 可由沿跨度方向相同端部约束梁的振型函数得到的, 而梁振型可利用傅里叶级数展开并结合边界条件求得。

(3) 竖向弹性与阻尼约束使板的整体位移增加, 增加位移部分引起的附加惯性力, 会消耗部分能量, 从而降低结构的挠曲变形(相对位移)和弯矩值; 抗弯约束能限制结构的转动, 降低动力系数, 因此可通过调整结构周边的竖向约束和抗弯约束刚度来降低结构变形和内力, 相对提高抗爆承载能力。

(4) 参数 ωt_d 对结构的动力响应产生显著影响, 当 ωt_d 较小时, 随着参数 ωt_d 的增加, 弯矩值显著增加。

参考文献:

[1] Zhou D. Vibrations of Mindlin rectangular plates with elastically restrained edges using static Timoshenko beam functions with the Rayleigh-Ritz method [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(32): 5565-5580.

[2] Ding Z. Natural frequencies of rectangular plates using a set of static beam functions in Rayleigh-Ritz method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 189(1): 81-87.

[3] Li W L. Dynamic analysis of beams with arbitrary elastic supports at both ends [J]. *Journal of Sound and*

Vibration, 2001, 246(4): 751-756.

[4] Li W L. Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273(3): 619-635.

[5] Li W L, Daniels M. A Fourier series method for the vibrations of elastically restrained plates arbitrarily loaded with springs and masses [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 252(4): 768-781.

[6] Henry Khov, Wen L Li, Ronald F Gibson. An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions [J]. *Composite Structure*, 2009, 90(4): 474-481.

[7] 宋春明, 王明洋, 刘斌. 减震装置提高防护门抗力的理论分析[J]. *防灾减灾工程学报*, 2011, 31(6): 700-703.

Song Chunming, Wang Mingyang, Liu Bin. Theoretical analysis of shock-mitigating device to increase the resistibility of protective door [J]. *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering*, 2011, 31(6): 700-703. (in Chinese)

[8] 宋春明, 王明洋, 王德荣. 柔性动边界梁的弹塑性动力响应分析[J]. *工程力学*, 2008, 25(12): 42-47.

Song Chunming, Wang Mingyang, Wang Derong. Analysis of elastic-plastic dynamic responses of beams with flexible supports [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(12): 42-47. (in Chinese)

[9] 宋春明, 王明洋. 动支座对拱结构抗爆承载力的影响[J]. *爆炸与冲击*, 2009, 29(3): 312-317.

Song Chunming, Wang Mingyang. Effects of flexible supports on explosion resisting capacity of Arches [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2009, 29(3): 312-317. (in Chinese)

[10] 陈力, 方秦, 郭志昆, 等. 静载作用下钢筋混凝土梁板结构的面力效应(II)-试验研究及主要影响参数讨论[J]. *土木工程学报*, 2011, 44(1): 36-41.

Chen Li, Fang Qin, Guo Zhikun, et al. Membrane action on reinforced concrete beam-slab structures under static load (II) -test and discussion on main affecting parameters [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2011, 44(1): 36-41. (in Chinese)