第 27 卷 第 7 期
Vol. 27 No. 7

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 7 月
Jul. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 07-1101-04

基于谱技术的随机系统的区间输出反馈镇定控制

高 明[1], 盛 立[2], 张维海[1]

(1. 山东科技大学 信息与电气工程学院，山东 青岛 266590；
2. 中国石油大学(华东) 信息与控制工程学院，山东 青岛 266555)

摘 要: 基于谱技术研究了线性随机系统的区间稳定性与镇定控制问题. 首先给出了保证随机系统区间稳定的充分性判据, 该判据可确保随机系统的谱全部位于左半复平面的某一带状区域内; 然后, 利用矩阵的奇异值分解给出了静态输出反馈镇定控制器的设计方法, 并将其归结为一组线性矩阵不等式 (LMIs) 的求解问题; 最后, 数值仿真验证了所得结论的正确性.

关键词: 随机系统；谱技术；区间稳定性与镇定；静态输出反馈控制；线性矩阵不等式
中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Interval output feedback stabilization control for stochastic systems based on spectrum technique

GAO Ming[1], *SHENG Li*[2], *ZHANG Wei-hai*[1]

(1. College of Information and Electrical Engineering，Shandong University of Science and Technology，Qingdao 266590，China；2. College of Information and Control Engineering，China University of Petroleum(East China), Qingdao 266555，China. Correspondent：GAO Ming，E-mail：yuming_gao@163.com)

Abstract: The interval stability and stabilization problems for linear stochastic systems are investigated based on spectrum technique. Firstly, the sufficient condition for stochastic systems to be interval stable is derived, which means all spectra of stochastic systems cluster in vertical strips of the left-half plane. Then, the design of the static output feedback controller is presented by using singular value decomposition of matrices, and the design problem can be reduced to a set of linear matrix inequalities feasibility problem. Finally, a numerical example is given to show the correctness validity of the obtained results.

Key words: stochastic systems；spectrum technique；interval stability and stabilization；static output feedback control；linear matrix inequality

1 引 言

线性系统的极点分布对其瞬态和稳态特性具有重要的影响, 只要系统的极点位于左半复平面上某一适当区域内, 即可保证其具有一定的瞬态或稳态特性. Gutman 等[1]研究了将线性系统的闭环极点配置于代数不等式区域的充要条件, 但其给出的控制器综合难以跟踪. Chilali 等[2]基于状态反馈与输出反馈给出了将系统闭环极点配置到线性矩阵不等式区域的方法.

由于随机系统的极点难以定义, 上述文献的结论不能直接应用于随机系统中. 为了解决这一问题, Zhang 等[3]提出了谱概念及其相关理论, 建立了随机系统的谱与系统均方渐近稳定性之间的联系, 为研究随机系统的瞬态或稳态特性提供了一个非常有价值的工具, 引起了许多学者的注意. Feng 等[4]研究了连续时间随机系统的指数镇定问题, 并讨论了系统指数衰减率与随机系统的谱实部之间的关系. Ni 等[5]基于谱技术分析了Itô 型 Markov 跳跃线性随机系统的精确能观测性与精确能检测性. 文献 [6-7] 分别研究了随机系统的 α- 稳定性与区间稳定性, 并给出了相应镇定控制器的设计方法.

以上针对随机系统控制的研究文献大多基于状态反馈, 但实际工程中系统的状态常常不能全部测量

收稿日期: 2010-12-07；**修回日期:** 2011-04-15.
基金项目: 国家自然科学基金项目(61174078)；山东省自然科学基金项目(ZR2010FQ013, ZR2011FL025)；教育部高等学校博士学科点专项基金项目(20103718110006, 20103718120006)；中央高校基本科研业务费专项基金项目(11CX04042A).
作者简介: 高明(1981−), 女, 讲师, 博士, 从事混杂系统、随机系统的研究；张维海(1965−), 男, 教授, 博士, 从事随机鲁棒控制、非线性最优控制等研究.

到, 因此有必要研究系统的输出反馈控制. 静态输出反馈是工程控制中一种重要的控制形式, 其本质上是求取双线性矩阵不等式可行解问题, 具有物理实现容易但求解困难的特点, 一直是控制理论界的研究热点[8-9].

本文针对一类线性随机系统, 基于谱技术研究其区间稳定性与镇定控制. 首先得到保证相应系统区间稳定的充分性条件; 然后讨论系统的区间镇定控制问题, 给出静态输出反馈控制器的设计方法; 最后, 通过数值仿真表明了所得结论的有效性和可行性.

2 系统描述与准备工作

考虑如下Itô型线性随机定常系统:

$$\mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+Bu(t)]\mathrm{d}t+[Cx(t)+Du(t)]\mathrm{d}\omega(t),\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n; \tag{1}$$

$$y(t)=Ex(t). \tag{2}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为系统状态, x_0 为初始状态, $u(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 为控制输入, $y(t)\in\boldsymbol{R}^p$ 为输出. 设 (Ω,F,P) 为具有自然滤波 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 的完备概率空间, $\omega(t)$ 为定义在此概率空间上的一维标准布朗运动.

当 $u(t)=0$ 时, 系统 (1) 被称为非强迫系统, 即

$$\mathrm{d}x(t)=Ax(t)\mathrm{d}t+Cx(t)\mathrm{d}\omega(t),\ x(0)=x_0\in\boldsymbol{R}^n. \tag{3}$$

针对系统 (3), 给出如下定义:

定义 1[3] 令 $\mathcal{L}_{A,C}$ 为如下定义的 $\mathcal{S}_n\to\mathcal{S}_n$ 线性算子:

$$\mathcal{L}_{A,C}:\quad Z\in\mathcal{S}_n\to AZ+ZA^{\mathrm{T}}+CZC^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

其中 $\mathcal{S}_n$ 表示 $n\times n$ 对称矩阵的集合. 定义 $\mathcal{L}_{A,C}$ 的谱为如下集合:

$$\sigma(\mathcal{L}_{A,C})=\{\lambda\in\boldsymbol{C}:\ \mathcal{L}_{A,C}(Z)=\lambda Z,\ Z\in\mathcal{S}_n, Z\neq 0\}.$$

类似于确定线性系统中闭环极点对其稳定性的深刻影响, 算子 $\mathcal{L}_{A,C}$ 的谱与随机系统 (3) 的均方渐近稳定性之间具有密切的联系.

引理 1[3] 随机系统 (3) 是均方渐近稳定的, 当且仅当算子 $\mathcal{L}_{A,C}$ 的谱均位于左半复平面, 即 $\sigma(\mathcal{L}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^-$.

定义 2[7] 称随机系统 (3) 为 $(-\beta,-\alpha)$ 区间稳定的, 其中 $0\leqslant\alpha<\beta$, 如果算子 $\mathcal{L}_{A,C}$ 的谱均位于 $(-\beta,-\alpha)$ 区间内, 即 $\sigma(\mathcal{L}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^{-\alpha}_{-\beta}$.

对于系统 (1), 考虑如下静态输出反馈控制器:

$$u(t)=Fy(t), \tag{5}$$

其中 $F\in\boldsymbol{R}^{m\times q}$ 为要确定的输出控制增益矩阵, 相应的闭环系统为

$$\mathrm{d}x(t)=(A+BFE)x(t)\mathrm{d}t+(C+DFE)x(t)\mathrm{d}\omega(t). \tag{6}$$

假设矩阵 E 行满秩 (即 $\mathrm{rank}(E)=p$), 将 E 进行奇异值分解, 即

$$E=U[S\quad \mathbf{0}]V^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

其中: $S\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$ 为对角矩阵, 其对角元素为降序排列的正数; $\mathbf{0}\in\boldsymbol{R}^{p\times(n-p)}$ 为零矩阵, $U\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$ 和 $V\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为酉矩阵.

引理 2[8] 给定矩阵 $E\in\boldsymbol{R}^{p\times n}$ 满足 $\mathrm{rank}(E)=p$, 可进行如式 (7) 所示的奇异值分解. 设 $X\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵, 则存在矩阵 $W\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$ 使 $EX=WE$ 成立, 当且仅当

$$X=V\begin{bmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}.$$

其中: $X_{11}\in\boldsymbol{R}^{p\times p}$, $X_{22}\in\boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$. 此外, 可计算矩阵 $W=USX_{11}S^{-1}U^{\mathrm{T}}$.

3 主要结果

以下定理给出了保证系统 (3) $(-\beta,-\alpha)$ 区间稳定的充分条件.

定理 1 给定常数 $0\leqslant\alpha<\beta$, 随机系统 (3) 是 $(-\beta,-\alpha)$ 区间稳定的, 当存在对称正定矩阵 P_1, P_2, P_4 与矩阵 P_3, 使如下LMIs成立:

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A+\alpha P_1+C^{\mathrm{T}}P_1C<0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_1 & \Sigma_2^{\mathrm{T}}\\ \Sigma_2 & \Sigma_3\end{bmatrix}<0, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix}P_2 & P_3^{\mathrm{T}}\\ P_3 & P_4\end{bmatrix}>0. \tag{10}$$

其中

$$\Sigma_1=-A^{\mathrm{T}}P_2-P_2A-\beta P_2+C^{\mathrm{T}}P_4C,$$

$$\Sigma_2=-A^{\mathrm{T}}P_3-P_3A-\beta P_3-C^{\mathrm{T}}P_3C,$$

$$\Sigma_3=-A^{\mathrm{T}}P_4-P_4A-\beta P_4+C^{\mathrm{T}}P_2C.$$

证明 根据定义 2, 若 $\sigma(\mathcal{L}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^{-\alpha}_{-\infty}\bigcap\boldsymbol{C}^{\infty}_{-\beta}$, 则称系统 (3) $(-\beta,-\alpha)$ 区间稳定. 首先, 注意到 $\sigma(\mathcal{L}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^{-\alpha}_{-\infty}$ 当且仅当 $\sigma(\mathcal{L}^{\alpha}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^-$, 其中 $\mathcal{L}^{\alpha}_{A,C}:=\mathcal{L}_{A,C}+\alpha I$, 即如下系统均方渐近稳定:

$$\mathrm{d}x(t)=\Big(A+\frac{\alpha}{2}I\Big)x(t)\mathrm{d}t+Cx(t)\mathrm{d}\omega(t). \tag{11}$$

基于文献 [3] 中定理 6, 若系统 (11) 均方渐近稳定, 则存在某对称正定矩阵 $P_1>0$ 满足如下不等式:

$$\Big(A+\frac{\alpha}{2}I\Big)^{\mathrm{T}}P_1+P_1\Big(A+\frac{\alpha}{2}I\Big)+C^{\mathrm{T}}P_1C<0. \tag{12}$$

容易看出式 (12)与条件 (8) 等价.

其次可看出 $\sigma(\mathcal{L}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^{\infty}_{-\beta}$, 当且仅当 $\sigma(-\mathcal{L}^{\beta}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^-$. 按照文献 [7] 的方法, 可以证明 $\sigma(-\mathcal{L}^{\beta}_{A,C})\subset\boldsymbol{C}^-$ 的一个充分条件是 $\sigma(\mathcal{L}_{\tilde{A},\tilde{C}})\subset\boldsymbol{C}^-$, 其中

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}-A-\dfrac{\beta}{2}I & 0\\ 0 & -A-\dfrac{\beta}{2}I\end{bmatrix},\ \tilde{C}=\begin{bmatrix}0 & -C\\ C & 0\end{bmatrix}.$$

下面用反证法予以说明. 若 $\sigma(\mathcal{L}_{\tilde{A},\tilde{C}}) \subset \boldsymbol{C}^-$, 但 $\sigma(-\mathcal{L}^{\beta}_{A,C}) \not\subseteq \boldsymbol{C}^-$, 则存在 $\lambda \in \boldsymbol{C}$ 且 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$, $Q \neq 0 \in \mathcal{S}_n$, 使得

$$\left(-A-\frac{\beta}{2}I\right)Q+Q\left(-A-\frac{\beta}{2}I\right)^{\mathrm{T}}-CQC^{\mathrm{T}}=\lambda Q.$$

容易看出 $\tilde{Q}=\begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & -Q \end{bmatrix}$ 满足 $\tilde{A}\tilde{Q}+\tilde{Q}\tilde{A}^{\mathrm{T}}+\tilde{C}\tilde{Q}\tilde{C}^{\mathrm{T}}=\lambda\tilde{Q}$. 这意味着存在 $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\tilde{A},\tilde{C}})$ 且 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$, 与 $\sigma(\mathcal{L}_{\tilde{A},\tilde{C}}) \subset \boldsymbol{C}^-$ 矛盾.

同样根据文献 [3] 中的定理 6, 若 $\sigma(\mathcal{L}_{\tilde{A},\tilde{C}}) \subset \boldsymbol{C}^-$, 当且仅当如下系统均方渐近稳定:

$$\mathrm{d}\tilde{x}(t)=\tilde{A}\tilde{x}(t)\mathrm{d}t+\tilde{C}\tilde{x}(t)\mathrm{d}\omega(t),$$

等价于存在对称正定矩阵 $\tilde{P}=\begin{bmatrix} P_2 & P_3^{\mathrm{T}} \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}>0$, 使得

$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{P}+\tilde{P}\tilde{A}+\tilde{C}^{\mathrm{T}}\tilde{P}\tilde{C}<0. \tag{13}$$

经整理可得, 式 (13) 等价于条件 (9). □

下面在定理 1 的基础上, 设计静态输出反馈控制器 (5), 给出保证闭环系统 (6)$(-\beta,-\alpha)$ 区间稳定的充分条件.

定理 2　给定常数 $0 \leqslant \alpha < \beta$, 随机系统 (6) 是 $(-\beta,-\alpha)$ 区间稳定的, 当存在对称正定矩阵 $X_{11} \in \boldsymbol{R}^{p\times p}$, $X_{22} \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, 矩阵 $Z \in \boldsymbol{R}^{m\times p}$, 使如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \varOmega_1 & \varOmega_2^{\mathrm{T}} \\ \varOmega_2 & -X \end{bmatrix}<0, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \varOmega_3 & 0 & 0 & \varOmega_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & \varOmega_3 & -\varOmega_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & -\varOmega_2 & -X & 0 \\ \varOmega_2 & 0 & 0 & -X \end{bmatrix}<0. \tag{15}$$

其中

$$\varOmega_1=XA^{\mathrm{T}}+AX+E^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BZE+\alpha X,$$
$$\varOmega_2=CX+DZE,$$
$$\varOmega_3=-XA^{\mathrm{T}}-AX-E^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}-BZE-\beta X,$$
$$X=V\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}.$$

V 如式 (7) 定义. 若 LMIs(14) 与 (15) 有解, 则静态输出反馈控制增益矩阵为 $F=ZUSX_{11}^{-1}S^{-1}U^{\mathrm{T}}$, 其中 U 和 S 如式 (7) 定义.

证明　为了求取输出反馈控制器, 以下证明过程中令定理 1 中 $P_1=P_2=P_4=P$ 且 $P_3=0$. 针对闭环系统 (6), 利用 $A+BFE$ 和 $C+DFE$ 分别替换 LMI(8) 中的 A 和 C, 得

$$(A+BFE)^{\mathrm{T}}P+P(A+BFE)+\alpha P+$$
$$(C+DFE)^{\mathrm{T}}P(C+DFE)<0. \tag{16}$$

令 $X=P^{-1}$, 在式 (16) 两边同乘以 X, 得

$$XA+AX+XE^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BFEX+\alpha X+$$
$$(CX+DFEX)^{\mathrm{T}}X^{-1}(CX+DFEX)<0. \tag{17}$$

假设 $X=V\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}$, 根据引理 2, 存在 $W \in \boldsymbol{R}^{p\times p}$ 满足 $EX=WE$, 故式 (17) 可写为

$$XA+AX+E^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BFWE+\alpha X+$$
$$(CX+DFWE)^{\mathrm{T}}X^{-1}(CX+DFWE)<0. \tag{18}$$

定义 $Z=FW$, 且根据 Schur 补引理可知, 式 (18) 等价于条件 (14).

令 $\tilde{X}=\mathrm{diag}\{X\ X\}=\tilde{P}^{-1}$, 在式 (13) 两边同乘以 $\tilde{X}$, 得

$$\tilde{X}\tilde{A}^{\mathrm{T}}+\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{X}\tilde{C}^{\mathrm{T}}\tilde{X}^{-1}\tilde{C}\tilde{X}<0. \tag{19}$$

由 Schur 补引理知式 (19) 与下式等价:

$$\begin{bmatrix} \varTheta & 0 & 0 & (CX)^{\mathrm{T}} \\ 0 & \varTheta & -(CX)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & -CX & -X & 0 \\ CX & 0 & 0 & -X \end{bmatrix}<0, \tag{20}$$

其中 $\varTheta=-XA^{\mathrm{T}}-AX-\beta X$. 将式 (20) 中的 A 和 C 分别用 A+BFE 和 C+DFE 替换, 并采取与上文类似的讨论方法可知, 替换后的式 (20) 与 (15) 等价. 由定理 1 可知, 闭环系统 (6)$(-\beta,-\alpha)$ 区间稳定. 进一步, 根据引理 2, 静态输出反馈控制增益矩阵为 $F=ZW^{-1}=ZUSX_{11}^{-1}S^{-1}U^{\mathrm{T}}$. □

注 1　文献 [7] 利用谱技术研究了基于状态反馈的随机系统区间镇定控制问题, 但实际系统的状态常常不能全部测量到, 其结论具有一定的局限性. 本文基于静态输出反馈研究了随机系统的区间镇定控制问题, 不要求系统的状态全部可测, 与文献 [7] 中的结论相比具有较低的保守性.

若 β 趋于无穷大, 则随机系统的区间稳定性将转化为文献 [6] 讨论过的 α- 稳定性, 即随机系统的谱全部位于 $(-\infty,-\alpha)$ 区间内. 如下推论基于静态输出反馈, 给出了随机系统 α-镇定控制方法.

推论 1　给定常数 $\alpha \geqslant 0$, 随机系统 (6) 是 α-稳定的, 当存在对称正定矩阵 $X_{11} \in \boldsymbol{R}^{p\times p}$, $X_{22} \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, 矩阵 $Z \in \boldsymbol{R}^{m\times p}$, 使如下 LMIs 成立:

$$\begin{bmatrix} \varOmega & (CX+DZE)^{\mathrm{T}} \\ (CX+DZE) & -X \end{bmatrix}<0. \tag{21}$$

其中

$$\varOmega=XA^{\mathrm{T}}+AX+E^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BZE+\alpha X,$$
$$X=V\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}.$$

V 如式 (7) 定义. 若 LMI(21) 有解, 则静态输出反馈控

制增益矩阵为 $F = ZUSX_{11}^{-1}S^{-1}U^{\mathrm{T}}$, 其中 U 和 S 如式 (7)定义.

4 数值仿真

考虑二维随机系统 (1) 和 (2), 系统参数如下:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -0.5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ E=[\ 0\ \ 1\ ].$$

根据定义 1 中式 (4) 可算得非强迫系统 (3) 的谱为 $\sigma(\mathcal{L}_{A,C}) = \{-6.274\,9,\ -2.5,\ 1.274\,9\}$. 由引理 1 知, 系统 (3) 非均方渐近稳定. 设系统 (3) 的初始条件为 $x(0) = [1.2\ -2]^{\mathrm{T}}$, 利用文献 [11] 中的 Euler-Maruyama 方法, 可得如图 1 所示的系统状态轨迹.

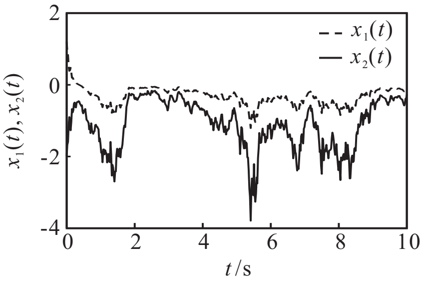

图 1　非强迫系统 (3) 的状态轨迹

根据式 (7) 对 E 进行奇异值分解, 得

$$U = 1,\ S = 1,\ V = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

令 $\alpha = 3$, 通过求解推论 1 中的 LMI(21), 可得如下一组可行解: $X_{11} = 1.613\,6,\ X_{22} = 0.509\,6,\ Z = -2.271\,8$. 因此, 静态反馈控制增益矩阵为

$$F = ZUSX_{11}^{-1}S^{-1}U^{\mathrm{T}} = -1.407\,9.$$

对于闭环系统 (6), 基于定义 1 可算得其谱为 $\sigma(\mathcal{L}_{A,C,F}) = \{-4.896\,1 + 1.629\,1i,\ -4.896\,1 - 1.629\,1i,\ -4.173\,1\}$. 闭环系统 (6) 的状态轨迹如图 2 所示, 可以看出在静态输出反馈控制器 (5) 的作用下, 系统能够达到均方渐近稳定, 且随机系统的谱全部位于 $-\alpha = -3$ 的左边.

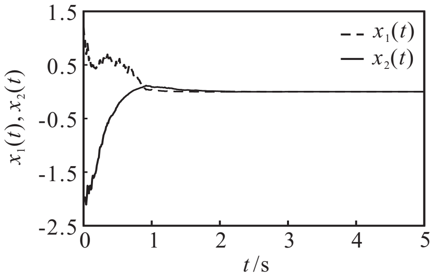

图 2　闭环系统 (6) 的状态轨迹

5 结　论

本文针对线性随机系统, 基于谱技术研究了其区间稳定性和镇定控制问题. 给出了保证其区间稳定的充分性条件, 并提供了静态输出反馈控制器的设计方法. 考虑系统中存在测量噪声的情形, 以及系统在满足区间稳定性前提下的 H_∞ 控制, 将是下一步研究的重点.

参考文献(References)

[1] Gutman S, Jury F J. A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plan[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1981, 26(4): 853-863.

[2] Chilali M, Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(3): 358-367.

[3] Zhang W, Chen B S. On stabilizability and exact observability of stochastic systems with their applications[J]. Automatica, 2004, 40(1): 87-94.

[4] Feng J, Lam J, Xu S, et al. Stabilisation of stochastic systems with optimal decay rate[J]. IET Control Theory & Applications, 2008, 2(1): 1-6.

[5] Ni Y, Zhang W, Fang H. On the observability and detectability of linear stochastic systems with Markov jumps and multiplicative noise[J]. J of Systems Science & Complexity, 2010, 23(1): 100-113.

[6] Zhang W, Feng J, Chen B S, et al. On spectral assignment and detectability of linear stochastic systems[C]. American Control Conf. Portland, 2005: 386-387.

[7] Zhang W, Xie L. Interval stability and stabilization of linear stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(4): 810-815.

[8] 王远钢. 基于BMI方法的扇形极点配置输出反馈控制[J]. 自动化学报, 2008, 34(9): 1192-1195.

[9] Yan X, Spurgeon S, Edwards C. On discontinuous static output feedback control for linear systems with nonlinear disturbances[J]. Systems & Control Letters, 2009, 58(5): 314-318.

[10] Ho D W C, Lu G. Robust stabilization for a class of discrete-time nonlinear system via output feedback: The unified LMI approach[J]. Int J of Control, 2003, 76(2): 105-115.

[11] Higham D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. SIAM Review, 2001, 43(3): 525-546.