

文章编号: 1000-4750(2014)10-0047-09

# 考虑相关性的 Rackwitz-Fiessler 随机空间变换方法

周生通, 李鸿光

(上海交通大学机械与动力工程学院, 机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

**摘 要:** 从新的角度对传统 Rackwitz-Fiessler 随机空间变换方法(R-F 法)进行了多方面的阐释。首先, 给出传统 R-F 法的描述并从几何角度分析 R-F 法与等概率变换的关系; 然后, 证明 R-F 法的正变换过程符合等概率变换而逆变换过程却不符合, 但却可看作等概率变换的一次近似; 其次, 提出一种等价的 R-F 条件, 为清晰的阐释 R-F 法中变量相关性的变化情况提供新思路; 之后, 指出 R-F 法的变量相关性变化情况同 Nataf-Pearson 方法(N-P 法)一致; 最后, 比较考虑相关性变化的 R-F 法和 N-P 法的计算量, 指出两者在单个迭代步中计算量基本一致且可通过算法优化实现; 另外对 R-F 法与线性 N-P 法的也作了比较。算例表明: 正确考虑相关性变化的 R-F 法可以得到同 N-P 法一致的结果。

**关键词:** 随机空间变换; Rackwitz-Fiessler 方法; Nataf-Pearson 方法; 等概率变换; 线性相关系数

**中图分类号:** TU318; TB114.3 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.04.0353

## THE RACKWITZ-FIESSLER RANDOM SPACE TRANSFORMATION METHOD WITH VARIABLE DEPENDENCE

ZHOU Sheng-tong, LI Hong-guang

(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** New insights into the classic Rackwitz-Fiessler random space transformation method (R-F method) are presented in this study. Following a general description of the R-F method, the geometrical relationships between the R-F method and the isoprobabilistic transformation are discussed. The forward transformation of the R-F method is then proved to follow the isoprobabilistic transformation principle, whereas its backward transformation can only be taken as a linear approximation of the isoprobabilistic transformation. Subsequently, an equivalent R-F condition is proposed, which helps to investigate the dependency variation of random variables in the R-F method. The dependence variation of the R-F method is later shown to be the same as that of the Nataf-Pearson method (N-P method). Finally, the calculation cost is compared between the dependence changed R-F method and the N-P method, finding the costs to be almost the same for each single-step iteration when optimized algorithms are used. Additionally, the differences between the dependence changed R-F method and the linearized N-P method are also discussed. Numerical examples show that the reliability index calculated using the dependence changed R-F method agrees well with that of the N-P method.

**Key words:** random space transformation; Rackwitz-Fiessler method; Nataf-Pearson method; isoprobabilistic transformation; linear correlation coefficient

目前, 计算机结构可靠度的方法很多, 但大多数方法都有诸多限制<sup>[1-2]</sup>, 像一些设计点搜索算法对涉及的随机变量有不相关和正态分布的要求。

然而, 实际可靠性问题往往具有诸多的复杂性, 涉及到的随机因素不能保证具有正态性, 各因素间也常存在相互依赖性的情况等等。还有其他的一些随

收稿日期: 2013-04-18; 修改日期: 2013-08-16

基金项目: 国家 863 项目(2012AA040106)

通讯作者: 李鸿光(1972—), 男, 辽宁辽阳人, 教授, 博士, 博导, 主要从事动力学分析与控制、可靠性和寿命评估技术研究(E-mail: hgli@sjtu.edu.cn).

作者简介: 周生通(1984—), 男, 山东东明人, 博士生, 主要从事机械系统动力学性能分析与可靠性和寿命评估研究(E-mail: zhoushengtong@live.cn).

机可靠性分析方法, 它们对随机变量、随机过程的类型也都有不同程度的限制<sup>[3-5]</sup>。

为了将随机可靠性分析方法应用于存在复杂随机因素的可靠性问题中, 处理随机变量类型相互转换的随机空间变换方法便很自然的被引入或提出。在可靠性领域中, 随机空间通常是指由可靠性问题涉及的随机变量所张成的空间。一般情况下, 都将实际问题所在的随机空间称为物理空间或原空间。若所有随机变量都是正态分布, 则该空间会被称为正态空间。像由 Hasofer 和 Lind 提出的一次可靠度方法—Hasofer-Lind 方法(简称 H-L 法)<sup>[2]</sup>, 由于其要求随机变量必须是独立的标准正态分布, 所以这种方法就必须在独立标准正态空间下才能使用。换句话说, 在使用 H-L 法计算结构可靠度时, 就必须先完成将原空间变换到独立标准正态空间的转换。

目前, 常用的随机空间变换方法有 Rackwitz-Fiessler 方法, Nataf 变换方法和 Ronsenblatt 方法等等。其中的 Nataf 变换方法是 Der Kiureghian 和 Liu<sup>[6-7]</sup>基于 Nataf 分布提出来的。由于 Nataf 分布的相关性是由 Pearson 相关系数唯一决定的, 因而, 这里也将其称为 Nataf-Pearson 方法(简称 N-P 法)。N-P 方法是目前处理由原空间到标准正态空间变换方法中使用最为广泛的一种。一方面是因为它只需提供随机向量的边缘分布函数和相关系数矩阵就能很好的实现随机空间的变换, 这一特点较符合现实情况而且通常能够满足工程需要; 另一方面是它对变换后相关系数的变化给出了合理的推导和计算公式。Rosenblatt 方法由于要用到随机向量的联合概率密度函数, 而这一要求在实际中是很难被满足的, 因而其应用被极大地限制了。Rackwitz-Fiessler 方法(简称 R-F 法)是 Rackwitz 和 Fiessler<sup>[8]</sup>首先提出来的, 也是最早出现的用于非正态随机变量正态化的方法之一。这个方法因与 H-L 方法联合使用且被国际安全度联合委员会(JCSS)推荐又称为 JC 法。R-F 方法的基本思想是通过在设计点(或候选设计点, 即迭代点)处使原非正态变量的累积分布函数(CDF)和概率密度函数(PDF)分别与等效正态变量的 CDF 和 PDF 相等来实现当量正态化。这一基本思想也被称为“当量正态化原理”。这里, 我们称之为“Rackwitz-Fiessler 条件(简称 R-F 条件)”。R-F 方法通过 R-F 条件实现了由原空间到等效正态空间的变换, 之后又通过一个标准化变换实现了到

标准正态空间的变换。

相比 N-P 方法, R-F 方法在工程应用中被人们熟知的程度甚至更广泛。一方面可能是因为当今许多国际和国内规范都推荐或规定使用 R-F 方法解决涉及非正态随机变量可靠性问题的分析和设计, 另一方面可能与对两种方法的思维定位上有关。通常, R-F 方法被归类为线性化的变换方法<sup>[9]</sup>, 因概念清晰、程序实现简单, 而成为许多可靠度计算初学者的首选方法。在理论和计算精度上, 也常认为没有 N-P 方法这类非线性变换的理论完善和结果精确, 尤其是 R-F 方法在对变换相关性的变化上不像 N-P 方法有严格的分析。例如在现有的应用 R-F 法和 N-P 法的文献中, 许多论文和书籍<sup>[10-13]</sup>在遇到非正态变量的变换时首先提到和推荐的都是用 R-F 方法, 而一旦遇到存在相关的非正态变量的变换时就转而讨论 N-P 法和 Ronsenblatt 方法。

纵看 R-F 方法从提出到现在的应用情况, 其使用大概可分为三个层次: 一是保留变量独立性要求, 仅将其应用到独立的非正态随机变量的可靠性问题中<sup>[14-17]</sup>; 二是启用相关性不变假设<sup>[18-23]</sup>或忽略相关性变化<sup>[24]</sup>, 将其推广应用到相关的非正态变量的变换问题中; 三是借用 Der Kiureghian 和 Liu 在 N-P 方法中相关系数的计算公式或半经验公式<sup>[2, 24-25]</sup>, 从 N-P 方法的角度考虑由原空间到标准正态空间的相关性变化。然而, 从众多文献记录来看, 迄今鲜有关于 R-F 方法变换前后相关系数变化情况的详细讨论, 取而代之的多是建议以 N-P 方法处理相关非正态变量问题。

本文就是着眼于 R-F 方法中相关系数的变化, 力图在理论上从另一角度重新审视和解释 R-F 方法, 并探讨 R-F 方法中相关系数的计算问题。为了便于描述, 文中也以符号  $X$ 、 $Z$ 、 $Y$  和  $U$  分别表示用到的原空间、正态空间、标准正态空间和独立标准正态空间等概念。

## 1 传统的 Rackwitz-Fiessler 方法原理

### 1.1 Rackwitz-Fiessler 条件

设  $X_i$  为  $X$  空间的随机变量, 其等效的正态随机变量为  $Z_i$ , 属于  $Z$  空间, 且在设计点  $x_i^*$  处有等式:

$$F_{X_i}(x_i) \Big|_{x_i=x_i^*} = F_{Z_i}(z_i) \Big|_{z_i=x_i^*} = \Phi \left( \frac{z_i - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} \right) \Big|_{z_i=x_i^*} \quad (1)$$

$$f_{X_i}(x_i) \Big|_{x_i=x_i^*} = f_{Z_i}(z_i) \Big|_{z_i=z_i^*} = \frac{1}{\sigma_{Z_i}} \phi \left( \frac{z_i - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} \right) \Big|_{z_i=x_i^*} \quad (2)$$

式(1)和式(2)合称为 Rackwitz-Fiessler 条件。其中,  $F_{X_i}(x_i)$  和  $F_{Z_i}(z_i)$ ,  $f_{X_i}(x_i)$  和  $f_{Z_i}(z_i)$  分别是  $X_i$  和  $Z_i$  的 CDF 和 PDF; 参数  $\mu_{Z_i}$  和  $\sigma_{Z_i}$  分别是等效正态变量的均值和标准差;  $\Phi(\cdot)$  和  $\phi(\cdot)$  为标准正态分布的 CDF 和 PDF。

按照上述 R-F 条件可以求得等效正态变量  $Z_i$  的分布参数表达式为:

$$\mu_{Z_i} = (z_i - \sigma_{Z_i} \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]) \Big|_{x_i=x_i^*, z_i=z_i^*} \quad (3)$$

$$\sigma_{Z_i} = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]\}}{f_{X_i}(x_i)} \Big|_{x_i=x_i^*} \quad (4)$$

通常, 在  $X_i$  得到对应的等效变量  $Z_i$  之后, 与  $X_i$  有关的后续运算都将由  $Z_i$  来替代。但实际应用中, 每次替换的时效仅局限在一个迭代步中。因为由于每步的迭代点  $x_i^{(k)}$  (亦称候选设计点) 不同, 由式(3)和式(4)得到的  $Z_i$  的分布参数也不同, 即分布参数是迭代点的函数, 表示为  $\mu_{Z_i}(x_i^{(k)})$  和  $\sigma_{Z_i}(x_i^{(k)})$ 。

## 1.2 标准化变换

进一步, 通过标准化变换:

$$y_i = \frac{z_i - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} \quad (5)$$

将变量  $Z_i$  变换到  $Y$  空间中。在变量独立的情况下,  $Y$  空间就是独立的标准正态  $U$  空间, 可靠度就可以直接采用 H-L 方法得到。若不独立, 还需正交变换实现由  $Y$  空间到  $U$  空间的变换。这一过程文中不再给出。

## 1.3 R-F 方法的正逆变换

为了后续的分析, 这里列写出 R-F 方法实现  $X$  空间与  $Y$  空间之间转换的正变换和逆变换公式。

R-F 条件正变换、逆变换:

$$z_i^{(k)} = x_i^{(k)} \quad (6)$$

$$x_i^{(k+1)} = z_i^{(k+1)} \quad (7)$$

标准化变换的正变换、逆变换:

$$y_i^{(k)} = (z_i^{(k)} - \mu_{Z_i}^{(k)}) / \sigma_{Z_i}^{(k)} \quad (8)$$

$$z_i^{(k+1)} = \sigma_{Z_i}^{(k)} y_i^{(k+1)} + \mu_{Z_i}^{(k)} \quad (9)$$

综合 R-F 条件和标准化变换, 有正变换和逆

变换:

$$y_i^{(k)} = (x_i^{(k)} - \mu_{Z_i}^{(k)}) / \sigma_{Z_i}^{(k)} \quad (10)$$

$$x_i^{(k+1)} = \sigma_{Z_i}^{(k)} y_i^{(k+1)} + \mu_{Z_i}^{(k)} \quad (11)$$

注意到, 式(6)~式(11)中上标( $k$ )表示由第  $k+1$  次迭代的正变换得到的量, ( $k+1$ )表示在第  $k+1$  次迭代中逆变换用到的量。设  $N$  为总的迭代次数, 则  $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。另外, 在每个迭代步中, 参数  $\mu_{Z_i}$  和  $\sigma_{Z_i}$  均为常数, 但随迭代点  $x_i^{(k)}$  的不同而不同。

## 1.4 R-F 方法的几何表示

按照等概率变换原则同样可以将  $X$  空间变换到  $Y$  空间, 其定义为:

$$F_{X_i}(x_i) = \Phi(y_i) \quad (12)$$

其中,  $x_i \in \text{range}(X_i)$ ,  $y_i \in (-\infty, +\infty)$ 。式(12)给出了  $x_i$  和  $y_i$  的一一映射关系, 具有正变换和逆变换:

$$y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad (13)$$

$$x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(y_i)) \quad (14)$$

如果对式(13)在设计点  $x_i^*$  处 Taylor 展开, 忽略二阶以上高阶项, 并利用逆函数导数性质, 有:

$$y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)] + \frac{f_{X_i}(x_i^*)}{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\}}(x_i - x_i^*) \quad (15)$$

整理式(15), 得到:

$$y_i = \frac{x_i - (x_i^* - \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)])\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\} / f_{X_i}(x_i^*)}{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\} / f_{X_i}(x_i^*)} \quad (16)$$

注意到式(3)和式(4), 式(16)可重写为:

$$y_i = \frac{x_i - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} \quad (17)$$

同理, 对式(14)在  $Y$  空间对应的设计点展开  $y_i^*$ , 可得到式(17)的逆函数  $x_i = \sigma_{Z_i} y_i + \mu_{Z_i}$ 。

式(17)和其逆函数都是等概率变换原则在设计点处的一次近似式。将 R-F 法的正逆变换式(10)和式(11)与式(17)及其逆函数作对比, 显然, 正逆变换对  $(x_i^{(k)}, y_i^{(k)})$  和  $(x_i^{(k+1)}, y_i^{(k+1)})$  都在式(17)表示的直线上, 因而 R-F 法变换与等概率变换的几何关系可用图 1 表示。

如果以式(17)这种一次近似式来替代等概率变换式(13)和式(14)进行空间变换的话, 那么显然根据“线性函数所组成的新变量的相关系数的绝对值保持不变, 仅符号可能改变”<sup>[26]</sup>的结论有  $\rho_{Y,Y} =$

$\rho_{X_i, X_j}$ 。同样, 如果将变换式(10)和式(11)也假设为等概率变换的一次近似, R-F 法的相关性也应该保持变换前后的不变性质。但 R-F 法能否看作一次近似及其相关性是如何变化的, 在下节我们给出了一种新的观点。

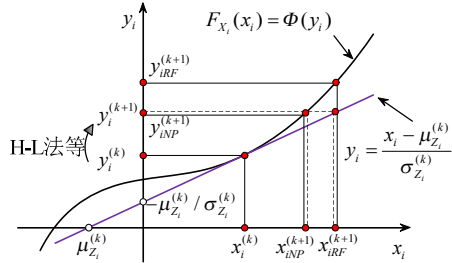


图1 R-F 法变换与等概率变换的几何关系示意

Fig.1 The geometrical relationships between R-F method and isoprobabilistic transformation

## 2 更新的 Rackwitz-Fiessler 方法观点

### 2.1 证明 R-F 方法的正变换符合等概率变换

将标准化变换式(5)代入 R-F 条件式(1)和式(2), 并注意到:

$$y_i^{(k)} = \frac{z_i^{(k)} - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} \quad (18)$$

于是, 有:

$$F_{X_i}(x_i) \Big|_{x_i=x_i^{(k)}} = \Phi(y_i) \Big|_{y_i=y_i^{(k)}} \quad (19)$$

$$f_{X_i}(x_i) \Big|_{x_i=x_i^{(k)}} = \frac{1}{\sigma_{Z_i}} \phi(y_i) \Big|_{y_i=y_i^{(k)}} \quad (20)$$

进一步, 由于等概率变换式(12)中的  $F_{X_i}(x_i)$  和  $\Phi(y_i)$  都是连续可微的单调递增函数, 于是对其两边微分并整理得:

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{dy_i}{dx_i} \phi(y_i) \quad (21)$$

将式(19)和式(20)与式(12)和式(21)分别比较, 可以看到两组式子的差别在于: 前者仅在迭代点处成立而后者在定义域内都成立, 并且两者还有一项不相同。但如果可以证明不同的项相等, 即:

$$\frac{1}{\sigma_{Z_i}} = \frac{dy_i}{dx_i} \Big|_{y_i=y_i^{(k)}} \quad (22)$$

那么就可以认为 R-F 法的正变换过程符合等概率变换。这是因为: 如果将式(22)代入式(20)就可得到:

$$f_{X_i}(x_i) \Big|_{x_i=x_i^{(k)}} = \frac{dy_i}{dx_i} \phi(y_i) \Big|_{y_i=y_i^{(k)}} \quad (23)$$

这样, 再次对式(19)和式(23)与式(12)和式(21)进行

对比, 可知: 虽然前者仍然要求仅在迭代点处满足, 但也说明对 R-F 法正变换中的任一迭代点  $x_i^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) 前者也同样是成立的。而另一方面, 问题的迭代点常由初始点  $x_i^{(0)}$  决定, 而初始点的选取范围可以是问题的整个定义域, 因而对于 R-F 法的正变换过程来说, 式(19)和式(23)在整个问题的定义域内都应满足, 也就是说 R-F 的正变换完全符合等概率变换的原则。

事实上, 从式(21)可以得到:

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{f_{X_i}(x_i)}{\phi(y_i)} \quad (24)$$

而由等概率变换的正变换式(13), 有:

$$y_i = y_i^{(k)} = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k)})] \quad (25)$$

进一步代入式(24)有:

$$\frac{dy_i}{dx_i} \Big|_{x_i=x_i^{(k)}} = \frac{dy_i}{dx_i} \Big|_{y_i=y_i^{(k)}} = \frac{f_{X_i}(x_i^{(k)})}{\phi(\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k)})])} \quad (26)$$

对比式(26)和等效正态变量  $Z_i$  的参数  $\sigma_{Z_i}$  式(4), 可知, 式(22)成立。进而也证明了 R-F 法的正变换遵循等概率变换原则的结论。

### 2.2 证明 R-F 方法的逆变换不符合等概率变换

在逆变换时, 参数  $\mu_{Z_i}$  和  $\sigma_{Z_i}$  仍保持正变换时的取值, 即  $\mu_{Z_i}(x_i^{(k)})$  和  $\sigma_{Z_i}(x_i^{(k)})$ , 而由正变换从  $x_i^{(k)}$  得到的迭代点  $y_i^{(k)}$  也经过设计点搜索算法(如 H-L 方法)得到了新的迭代点  $y_i^{(k+1)}$ 。设经 R-F 逆变换得到了在  $X$  空间的新迭代点  $x_i^{(k+1)}$ , 这里且不论逆变换对  $(y_i^{(k+1)}, x_i^{(k+1)})$  是否符合式(19), 而是先将其分别代入式(20)的两端, 即:

$$f_{X_i}(x_i) \Big|_{x_i=x_i^{(k+1)}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sigma_{Z_i}} \phi(y_i) \Big|_{y_i=y_i^{(k+1)}} \quad (27)$$

分别对比式(27)和式(21)的两端, 可知逆变换符合等概率变换的必要条件是:

$$\frac{1}{\sigma_{Z_i}} = \frac{dy_i}{dx_i} \Big|_{y_i=y_i^{(k+1)}} \quad (28)$$

显然, 式(28)是不能成立的, 因为:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx_i} \Big|_{y_i=y_i^{(k+1)}} &= \frac{f_{X_i}(x_i^{(k+1)})}{\phi(y_i^{(k+1)})} = \frac{f_{X_i}(x_i^{(k+1)})}{\phi(\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k+1)})])} \neq \\ &= \frac{1}{\sigma_{Z_i}} = \frac{f_{X_i}(x_i^{(k)})}{\phi(\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k)})])} \end{aligned} \quad (29)$$

进而式(27)也不成立, 也就是说 R-F 法的逆变换不再符合等概率变换。从 R-F 的逆变换式(11),



并对式(17), 由于新迭代点  $y_i^{(k+1)}$  的任意性(由问题的初始点  $x_i^{(0)}$  和迭代点  $x_i^{(k)}$  (或  $y_i^{(k)}$ ) 等决定), 可以推断式(11)具备了作为等概率变换的一次近似的条件。也就是说 R-F 的逆变换可以看作是等概率变换的一次近似。

### 2.3 一种等价的 Rackwitz-Fiessler 条件

由前可知, 传统的 R-F 条件实现了由  $X$  空间到  $Z$  空间的变换。事实上, 如果进行如下两次变换则同样可以得到相同的变换效果:

a) 先用等概率变换由  $X$  空间变换到  $Y$  空间:

$$y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad (30)$$

b) 然后由  $Y$  空间通过线性变换进入  $Z$  空间:

$$z_i = \sigma_{Z_i} y_i + \mu_{Z_i} \quad (31)$$

其中,  $\mu_{Z_i}$  和  $\sigma_{Z_i}$  仍然是由 R-F 条件在具体的迭代点得到的等效正态变量的均值和标准差。

上述 a) 和 b) 两个过程是等价 R-F 条件的正变换, 合写为:

$$z_i = \sigma_{Z_i} \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) + \mu_{Z_i} \quad (32)$$

其中,  $x_i \in \text{range}(X_i)$ ,  $z_i \in (-\infty, +\infty)$ 。而等价 R-F 条件的逆变换为:

$$x_i = z_i \quad (33)$$

为了与 R-F 条件的正变换式(6)作对比, 将均值  $\mu_{Z_i}$  的表达式(3)代入到式(32)中, 有:

$$z_i = \sigma_{Z_i} \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) + (x_i^{(k)} - \sigma_{Z_i} \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k)})]) \quad (34)$$

可见, 当迭代点为  $x_i^{(k)}$  时, 式(34)与式(6)变为一致。说明提出的等价条件是正确的。但这个等价的条件 R-F 条件的意义不仅局限于这一点, 其真正有价值的价值体现在它对传统 R-F 条件的正变换进行了分解, 从而可以更清晰的分析 R-F 法变换前后的变量相关性变化情况。

### 2.4 讨论 R-F 法变换后变量相关系数的变化情况

由前面的论述可知, R-F 法由  $X$  空间到  $Y$  空间的正变换符合等概率变换准则。在另一方面, 提出的等价的 R-F 条件也显示: 传统的 R-F 条件的正变换相当于首先作了一次等概率变换, 然后再作一次线性变换。这样, 用等价的 R-F 条件替换传统的 R-F 条件, 并进一步实施标准化变换式(5), 即将式(32)代入式(5), 显然可以得到与等概率变换原则的正变换式(13)一致的表达式。综合地说, 无论是基于传统 R-F 法正变换的重新描述还是在等价 R-F 条件基础上的 R-F 法都表明 R-F 法的正变换符合等

概率变换。这样, 当原  $X$  空间的随机变量经 R-F 法正变换进入标准正态  $Y$  空间后,  $Y$  空间内各变量间的相关性关系应该同样也遵循等概率变换原则的变量相关性变化规律。幸运的是这一变化规律已经由 Der Kiureghian 和 Liu<sup>[6-7]</sup> 发现并给出如下关系式:

$$\rho_{X_i X_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{F^{-1}(\Phi(y_i)) - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \frac{F^{-1}(\Phi(y_j)) - \mu_{x_j}}{\sigma_{x_j}} \right] \varphi_2(y_i, y_j, \rho_{Y_i Y_j}) dy_i dy_j \quad (35)$$

由于式(35)求解复杂, Der Kiureghian 和 Liu<sup>[6-7]</sup> 给出了如下的半经验计算公式:

$$\rho_{Y_i Y_j} = R \rho_{X_i X_j} \quad (36)$$

其中,  $R$  为经验系数, 与随机变量  $X_i$ 、 $X_j$  的分布类型和分布参数有关。

对于 R-F 法的逆变换过程, 即由  $Y$  空间变换到  $X$  空间的过程, 不再符合等概率变换原则而是线性变换, 因而由  $Y$  空间变换到  $X$  空间的变量间的相关系数是不变化的。但是在基于迭代过程的可靠度计算方法中, R-F 法的新迭代点  $y_i^{(k+1)}$  的产生都在逆变换之前, 且在下一迭代步中又是以本步的逆变换结果  $x_i^{(k+1)}$  作为迭代点的, 也就是说逆变换过程只是用来得到下一迭代步的起始迭代点, 因而逆变换的相关性问题并不影响下一步正变换中相关性的情况。

综上, 在用 R-F 法处理相关非正态的可靠性问题时,  $Z$  空间和  $Y$  空间的相关系数都可根据式(35)或式(36)得到。

### 2.5 与 N-P 方法在计算量上的对比

与 R-F 法不同的是, N-P 方法是完全基于等概率变换式(12)实现  $X$  空间与  $Y$  空间的相互变换, 其正变换和逆变换分别为式(13)和式(14), 但相关系数变化同样遵从式(35)和式(36)。

图 2 是 R-F 法和 N-P 法在应用时的流程。从流程中可知, 除了可靠度方法的迭代公式运算外, 每次迭代都需要首先得到  $U$  空间下的迭代点  $\mathbf{u}^{(k)}$ 、安全裕度函数  $G_U(\cdot)$  和梯度  $\nabla G_U(\cdot)$ , 而在本迭代步结束时还要得到新迭代点  $\mathbf{u}^{(k+1)}$  在  $X$  空间下对应的  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 。其中涉及到随机空间变换的地方主要是在求解  $T(\mathbf{x}^{(k)})$ 、 $\mathbf{J}_{X,U}$  和  $T^{-1}(\mathbf{u}^{(k+1)})$  三项中。第一项和第三项分别对应着空间变换的正变换和逆变换, 中间一项是 Jacobian 矩阵。对于 R-F 法, 有:

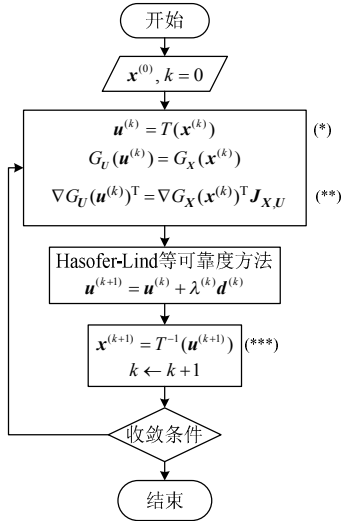


图2 R-F法和N-P法通用的应用流程图

Fig.2 The general application flow chart of R-F method and N-P method

$$\mathbf{J}_{X,U} = \text{diag}(\sigma_{Z_i}) \mathbf{J}_{Y,U} = \text{diag} \left( \frac{\phi \{ \Phi^{-1} [F_{X_i}(x_i^{(k)})] \}}{f_{X_i}(x_i^{(k)})} \right) \mathbf{J}_{Y,U} \quad (37)$$

对于N-P法,有:

$$\mathbf{J}_{X,U} = \text{diag} \left( \frac{dx_i}{dy_j} \Big|_{x_i^{(k)}} \right) \mathbf{J}_{Y,U} = \text{diag} \left( \frac{\phi \{ \Phi^{-1} [F_{X_i}(x_i^{(k)})] \}}{f_{X_i}(x_i^{(k)})} \right) \mathbf{J}_{Y,U} \quad (38)$$

分别对比R-F法和N-P法的正变换和逆变换式(10)、式(11)、式(13)和式(14)以及Jacobian公式(37)和式(38),若忽略其中其他代数运算的计算量,可以得到:如果按照图2所示流程,在每步迭代中R-F法计算量主要由 $\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k)})]$ 、 $\phi(y_i^{(k)})$ 、 $f_{X_i}(x_i^{(k)})$ 三项产生;N-P法主要由 $\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k)})]$ 、 $F_{X_i}^{-1}(\Phi(y_i^{(k+1)}))$ 、 $\phi(y_i^{(k)})$ 、 $f(x_i^{(k)})$ 四项产生。

但是,在另一方面,由于N-P法的正变换和逆变换公式在整个迭代过程中都是不变的,这样本迭代步新产生的迭代点 $y_i^{(k+1)}$ 在下一迭代步中将会被作为初始迭代点(可参考图1),即:

$$y_{iNP}^{(k+1)} = y_i^{(k+1)} \quad (39)$$

故对于N-P法,除了第一次迭代需要计算 $\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(k)})]$ 外,随后的迭代步就不必计算了,而是直接利用上次迭代的结果。如果再忽略累积分布函数CDF与其逆函数invCDF间计算量的差别,那么从理论上可以说R-F法和N-P法每个迭代步的计

算量是基本一致的,且可通过算法优化达到。

## 2.6 与线性化N-P方法的不同之处

文献[23]给出了一种线性化的N-P方法。它是基于R-F变换是等概率变换的一次近似,用R-F变换公式替代等概率变换实现线性化的N-P方法。虽然线性化N-P方法在公式形式上与本文中讨论的考虑相关性的R-F方法类似,但是从其算法实现步骤上可以清晰的发现两者的差别:

$$x_i^{(k+1)} = \sigma_{Z_i}(x_i^{(k)})y_i^{(k)} + \mu_{Z_i}(x_i^{(k)}) \quad (40)$$

$$y_i^{(k+1)} = \text{iHLRF}(y_i^{(k)}) \quad (41)$$

其中,式(40)与文献[23]中的式(30)和算法步骤2的第(1)步对应;式(41)与文献[23]中的步骤3、4、5对应。为了清晰起见,式(40)和式(41)采用了与本文一致的符号进行了改写并用 $y_i$ 替代了 $U$ 空间到 $Y$ 空间转换公式,但意义一致。

文献[23]在得到初始的 $x_i^{(0)}$ 、 $y_i^{(0)}$ 后,先用式(40)得到 $x_i^{(k+1)}$ ,然后再用式(41)(其用了iHLRF法)得到 $y_i^{(k+1)}$ ,在不满足收敛条件时重复式(40)和式(41)。其前三次迭代可用图3示意。可见,在抛开所用的可靠度计算方法类型的不同外,文献[23]的线性N-P法与本文R-F算法的差别在于:在 $Y$ 空间(或 $U$ 空间)内,本步得到的新迭代点 $y_i^{(k+1)}$ 仍然是下一迭代步的初始迭代点。

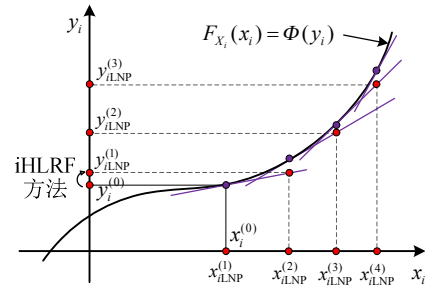


图3 线性N-P法迭代示意图

Fig.3 The iteration schematic of linear N-P method

## 3 算例

### 3.1 问题描述

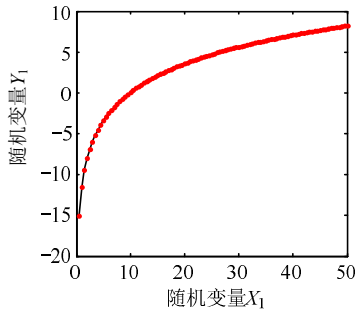
以工程中最普遍的强度-应力干涉模型为例。设强度 $R$ 服从对数正态分布,用变量 $X_1$ 表示,且 $\mu_{X_1}=10$ 、 $\sigma_{X_1}=2$ ;应力 $S$ 服从Type I的极大值分布,用变量 $X_2$ 表示,且 $\mu_{X_2}=20$ 、 $\sigma_{X_2}=5$ 。并设 $X_1$ 与 $X_2$ 相关系数为 $\rho_{X_1X_2}=0.5$ 。于是,安全裕度函数为:

$$G(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

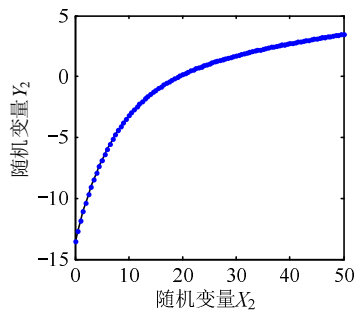
图4(a)和图4(b)分别为按照等概率变换公式得

到的变量  $X_1$  和  $X_2$  在  $X$  空间和  $Y$  空间的一一映射曲线。另外，无论是 R-F 法还是 N-P 法由  $X$  空间到  $Y$  空间的相关系数变化都基于式(35)或式(36)得到。于是，按照 Der Kiureghian 和 Liu 提出的经验公式，本例中两个变量类型的经验系数为：

$$R = 1.029 + 0.001\rho_{X_1X_2} + 0.004\rho_{X_1X_2}^2 + 0.014\delta_{X_1} + 0.233\delta_{X_1}^2 - 0.197\rho_{X_1X_2}\delta_{X_1}$$



(a) 对数正态变量  $X_1$



(b) Type I 的极大值分布  $X_2$

图 4 与标准正态变量间的等概率变换曲线

Fig.4 The isoprobabilistic transformation curves

可知，在  $\rho_{X_1X_2}$  一定的情况下，经验系数  $R$  主要是由对数正态变量  $X_1$  的变异系数  $\delta_{X_1} = \sigma_{X_1} / \mu_{X_1}$  决定，图 5 为经验系数  $R$  随相关系数  $\rho_{X_1X_2}$  和变异系数  $\delta_{X_1}$  的变化曲线。于是代入数据，得到变换到  $Y$  空间后的变量  $Y_1$  和  $Y_2$  的相关系数为：

$$\rho_{Y_1Y_2} = R\rho_{X_1X_2} = 0.51146$$

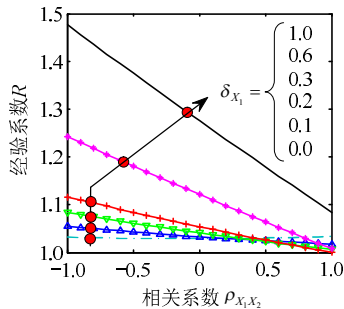
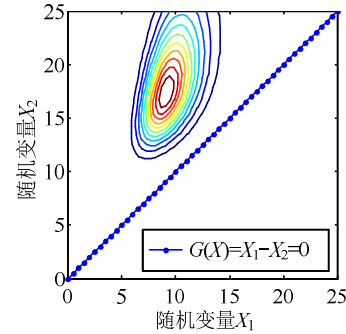


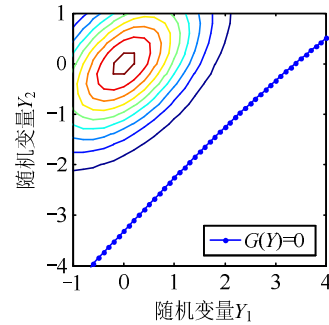
图 5 对数正态分布与 Type I 的极大值分布的经验系数曲线

Fig.5 The empirical coefficient curves between Lognormal and Type I extreme largest value distribution

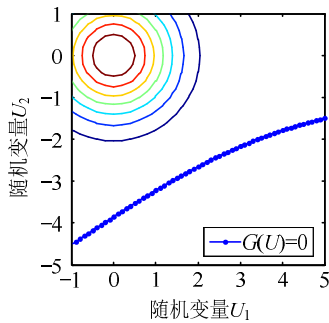
然后，由  $Y$  空间到独立标准正态  $U$  空间的变换通过一次正交变换实现。其中，图 6(a)、图 6(b)和图 6(c)分别为安全裕度函数  $G(x_1, x_2)$  在  $X$  空间、 $Y$  空间和  $U$  空间下的曲线图和随机向量的联合概率密度函数。



(a)  $X$  空间



(b)  $Y$  空间



(c)  $U$  空间

图 6 安全裕度函数和联合概率密度函数

Fig.6 The plots of safety marginal function and joint probability density function

### 3.2 三种方法的迭代结果与比较

表 1~表 3 为分别采用：a) 不考虑相关性变化的 R-F 法；b) 考虑相关性变化的 R-F 法；c) N-P 法求解的迭代信息。其中，迭代初始点取为变量均值 (10, 20)，收敛准则为  $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \varepsilon$ ，这里取  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ 。

分析三种方法的结果可知：本文给出的考虑相关性变化的 R-F 法(表 2)经过 7 次迭代收敛，可靠度指标  $\beta$  为 -3.2869，设计点为 (13.4842, 13.4842)。

采用 N-P 法(表 3)用了 8 次迭代达到收敛, 得到的可靠度指标  $\beta$  也为-3.2869, 设计点为(13.4840, 13.4840)。两者可靠性结果表现一致。而由不考虑相关性变化的 R-F 法(表 1)经过 6 次迭代得到的可靠度指标  $\beta$  为-3.2490, 设计点为(13.4849, 13.4849), 可靠度结果与前两种方法存在差距。这说明: 能够正确考虑相关系数变换的 R-F 法同样能像 N-P 法一样得到可信的一次可靠性指标和设计点。

表 1 不考虑相关系数变化的 R-F 法的迭代信息

Table 1 The iteration information of dependence unchanged R-F method

迭代	$X_1$ $X_2$	$X'_1$ $X'_2$	$Y_1$ $Y_2$	$Y'_1$ $Y'_2$	$\beta$	$\varepsilon$
1	10	9.3654	0.0990	-0.2214	-2.2469	2.4050
	20	9.3654	0.1773	-2.0471		
2	9.3654	13.0593	-0.2320	1.7596	-3.1871	2.3886
	9.3654	13.0593	-3.5594	-1.4216		
3	13.0593	13.5474	1.4468	1.6355	-3.2479	0.2184
	13.0593	13.5474	-1.8020	-1.6124		
4	13.5474	13.4742	1.6321	1.6048	-3.2489	0.0314
	13.5474	13.4742	-1.6170	-1.6441		
5	13.4742	13.4872	1.6047	1.6096	-3.2490	0.0056
	13.4742	13.4872	-1.6442	-1.6393		
6	13.4872	13.4849	1.6096	1.6087	-3.2490	0.00097
	13.4872	13.4849	-1.6393	-1.6402		

注:  $X_1$  表示迭代中正变换过程中的值;  $X'_1$  表示迭代中逆变换过程中的值。其他符号中的“'”也是表示逆变换的值, 下同。

表 2 考虑相关系数变化的 R-F 法的迭代信息

Table 2 The iteration information of dependence changed R-F method

迭代	$X_1$ $X_2$	$X'_1$ $X'_2$	$Y_1$ $Y_2$	$Y'_1$ $Y'_2$	$\beta$	$\varepsilon$
1	10	9.3005	0.0990	-0.2542	-2.2611	2.4201
	20	9.3005	0.1773	-2.0607		
2	9.3005	13.0437	-0.2671	1.7651	-3.2233	2.4288
	9.3005	13.0437	-3.5971	-1.4148		
3	13.0437	13.5502	1.4408	1.6369	-3.2857	0.2262
	13.0437	13.5502	-1.8081	-1.6110		
4	13.5502	13.4720	1.6331	1.6040	-3.2868	0.0334
	13.5502	13.4720	-1.6160	-1.6449		
5	13.4720	13.4863	1.6039	1.6093	-3.2869	0.0062
	13.4720	13.4863	-1.6450	-1.6397		
6	13.4863	13.4838	1.6093	1.6083	-3.2869	0.0011
	13.4863	13.4838	-1.6397	-1.6406		
7	13.4838	13.4842	1.6083	1.6085	-3.2869	0.0002
	13.4838	13.4842	-1.6406	-1.6404		

表 3 N-P 法的迭代信息

Table 3 The iteration information of N-P method

迭代	$X_1$ $X_2$	$X'_1$ $X'_2$	$Y_1$ $Y_2$	$Y'_1$ $Y'_2$	$\beta$	$\varepsilon$
1	10	9.3244	0.0990	-0.2542	-2.2611	2.4201
	20	12.4152	0.1773	-2.0607		

(续表)

迭代	$X_1$ $X_2$	$X'_1$ $X'_2$	$Y_1$ $Y_2$	$Y'_1$ $Y'_2$	$\beta$	$\varepsilon$
2	9.3244	11.9547	-0.2542	1.0005	-3.5130	1.6824
	12.4152	11.6713	-2.0607	-2.3820		
3	11.9547	13.8842	1.0005	1.7561	-3.2495	0.9859
	11.6713	14.0059	-2.3820	-1.4513		
4	13.8842	13.3258	1.7561	1.5488	-3.2833	0.2624
	14.0059	13.3371	-1.4513	-1.6956		
5	13.3258	13.5046	1.5488	1.6161	-3.2868	0.0750
	13.3371	13.5048	-1.6956	-1.6328		
6	13.5046	13.4803	1.6161	1.6070	-3.2868	0.0106
	13.5048	13.4803	-1.6328	-1.6419		
7	13.4803	13.4848	1.6070	1.6087	-3.2869	0.0019
	13.4803	13.4848	-1.6419	-1.6402		
8	13.4848	13.4840	1.6087	1.6084	-3.2869	0.00034
	13.4848	13.4840	-1.6402	-1.6405		

另外, 从求解的迭代过程中也可以发现: R-F 法在一次迭代步中得到的新迭代点, 在下一迭代步中变化了, 而 N-P 法却没变化。例如, 采用 R-F 法的表 2 中第 1 迭代步中得到的迭代点( $Y'_1, Y'_2$ )为(-0.2542, -2.0607), 而在第 2 迭代步中使用的迭代点( $Y_1, Y_2$ )已变为(-0.2671, -3.5971), 表 3 中因 N-P 法前后两次的迭代点没有改变。实际上, 这一变化主要是由于 R-F 法的正逆变换规则导致。从这里, 我们可以认为 R-F 法这一特性“破坏”了由可靠度算法迭代公式计算的迭代点, 但其破坏作用可能使迭代过程变坏也可能变好, 这应该取决于具体问题的具体条件。如前面算例选取了变量均值为迭代初始点, 结果: 考虑相关性的 R-F 法和 N-P 法分别用了 7 次和 8 次完成迭代。但如果我们选取初始点为(14, 15), (这个迭代点的特点一方面是离真实设计点比较接近, 另一方面其处的位置由随机变量变换引入的非线性也较大)经过计算: 考虑相关性的 R-F 法和 N-P 法分别用了 6 次和 4 次达到收敛。

## 4 结论

本文针对传统 R-F 法在使用中存在的问题, 从一些新的角度对 R-F 方法进行了观点重塑。可以发现:

(1) R-F 法的正变换过程是符合等概率变换规律的, 而其逆变换过程则不符合, 但可以看作是对等概率变换的一次近似。

(2) 支撑传统 R-F 法的 R-F 条件可以等价为一等概率变换和一次线性变换的合成。从这一等价的 R-F 条件描述可以对传统 R-F 条件导致的相关性变化作更为清晰的阐释。



(3) 从 R-F 法正变换的等概率变换观点以及等价的 R-F 条件方面, R-F 法同 N-P 法一样, 其相关性的变化同样可以采用 Der Kiureghian 和 Liu 提出的计算公式或半经验公式得到。

(4) 在忽略一些基本代数运算的计算量以及累积分布函数和其逆函数的计算量差别后, 从理论角度可以认为 R-F 法与 N-P 法在单个迭代步的计算量上是基本一致的, 且可通过优化算法实现。

(5) 算例显示: 正确考虑相关变化的 R-F 法可以得到同 N-P 法一致的可靠度指标。在另一方面, 由于 R-F 法对迭代点的“破坏”, 使得 R-F 法在计算效率和收敛性方面可能优于也可能劣于 N-P 法, 结果取决于具体的可靠性问题和初始条件。

总之, 本文试图从理论完整性方面对传统的 R-F 法进行完整剖析, 尤其给出了 R-F 法在处理相关非正态问题时正确处理相关性变化的理论依据和方法。

#### 参考文献:

- [1] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003: 1—450.  
Gong Jinxin. Computational methods for reliability of engineering structures [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003: 1—450. (in Chinese)
- [2] Haldar A, Mahadevan S. Reliability assessment using stochastic finite element analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 2000: 55—104.
- [3] Li D, Chen Y, Lu W, et al. Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables [J]. Computers and Geotechnics, 2011, 38(1): 58—68.
- [4] Eldred M S, Webster C G, Constantine P G. Evaluation of non-intrusive approaches for Wiener-Askey generalized polynomial chaos [C]// 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Schaumburg, IL(ILLINOIS), 2008: 1—22.
- [5] Floris C. Equivalent Gaussian process in stochastic dynamics with application to along-wind response of structures [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1996, 31(5): 779—794.
- [6] Liu P, Der Kiureghian A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1986, 1(2): 105—112.
- [7] Der Kiureghian A, Liu P. Structural reliability under incomplete probability information [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, 112(1): 85—104.
- [8] Rackwitz R, Fiessler B. Structural reliability under combined random load sequences [J]. Computers & Structures, 1978, 9(5): 489—494.
- [9] Bichon B J, Eldred M S, Swiler L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions [J]. AIAA Journal, 2008, 46(10): 2459—2468.
- [10] Karadeniz H. Stochastic analysis of offshore steel structures--An analytical appraisal [M]. London: Springer, 2013: 315—364.
- [11] Tung Y K. Risk/Reliability-based hydraulic engineering design [M]. Hydraulic Design Handbook. New-York: McGraw-Hill, 1999: 1—56.
- [12] Duprat F, Sellier A, Nguyen X S, et al. The projection gradient algorithm with error control for structural reliability [J]. Engineering Structures, 2010, 32(11): 3725—3733.
- [13] Noh Y, Choi K K, Du L. Reliability-based design optimization of problems with correlated input variables using a Gaussian Copula [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009, 38(1): 1—16.
- [14] Xiang Y, Liu Y. Application of inverse first-order reliability method for probabilistic fatigue life prediction [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2011, 26(2): 148—156.
- [15] 倪俊, 虞跨海, 岳珠峰. 基于可靠性的涡轮叶片双循环多学科设计优化[J]. 航空动力学报, 2009, 24(9): 2051—2056.  
Ni Jun, Yu Kuahai, Yue Zhufeng. Reliability-based multidisciplinary design optimization for turbine blade using double loop approach [J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(9): 2051—2056. (in Chinese)
- [16] He Z, Qiu F. Probabilistic assessment on flexural capacity of GFRP-reinforced concrete beams designed by guideline ACI 440.1R-06 [J]. Construction and Building Materials, 2011, 25(4): 1663—1670.
- [17] Abdelal G F, Cooper J E, Robotham A J. Reliability assessment of 3D space frame structures applying stochastic finite element analysis [J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2013, 9(1): 1—9.
- [18] Low B K, Tang W H. Reliability analysis using object-oriented constrained optimization [J]. Structural Safety, 2004, 26(1): 69—89.
- [19] Deng J. Structural reliability analysis for implicit performance function using radial basis function network [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(11/12): 3255—3291.
- [20] Chen N, Guedes Soares C. Reliability assessment of post-buckling compressive strength of laminated composite plates and stiffened panels under axial compression [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(22/23): 7167—7182.

(参考文献[21]—[26]转第 61 页)

构, 研究结果也只适应于普通钢筋混凝土桥墩的抗震性能评估研究。高耸桥墩的近场地震动强度参数研究是下一步研究的目标。

#### 参考文献:

- [1] Cornell C A, Krawinkler H. Progress and challenges in seismic performance assessment [J]. PEER Center News, 2000, 3(2): 1—4.
- [2] Moehle J P, Deierlein G G. A framework methodology for performance-based earthquake engineering [C]// Proceedings of the 13th World Conference on Earthquake Engineering, Canada, Vancouver B C, 2004: 1—6.
- [3] 王建民. 基于概率的桥梁结构抗震性能研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2006.  
Wang Jianmin. Study on seismic performance of bridge structures based on probabilistic [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2006. (in Chinese)
- [4] Tothong P, Cornell C A. Probabilistic seismic demand analysis using advanced ground motion intensity measures, attenuation relationships, and near-fault effects [R]. Pacific Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, 2007.
- [5] Malhotra P K. Response of buildings to near-field pulse-like ground motions [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1999, 28(11): 1309—1326.
- [6] Wang G Q, Zhou X Y, Zhang P Z, Igel H. Characteristics of amplitude and duration for near fault strong ground motion from the 1999 Chi-Chi, Taiwan earthquake [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002, 22(1): 73—96.
- [7] 申彦利, 杨庆山. 近场脉冲型地震作用下结构响应预测研究[J]. 工程力学, 2011, 28(7): 117—123.  
Shen Yanli, Yang Qingshan. Seismic response estimation of structure under pulse-type near-field ground motion [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(7): 117—123. (in Chinese)
- [8] Vamvatsikos D, Cornell C A. Incremental dynamic analysis [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2002, 31(3): 491—514.
- [9] Pacific Earthquake Engineering Research Center. Next generation attenuation of ground motions (NGA) project [DB]. <http://peer.berkeley.edu/nga/>, 2012.
- [10] SeismoStruct. SeismoStruct-A computer program for static and dynamic nonlinear analysis of framed structures [CP]. <http://www.seissoft.com>, 2012.
- (上接第 55 页)
- [21] 吴帅兵, 张坤, 李典庆. 相关非正态变量变换时相关性变化对可靠度的影响[J]. 武汉大学学报(工学版), 2011, 44(2): 151—155.  
Wu Shuaibing, Zhang Kun, Li Dianqing. Effect of correlation change from transformation of correlated abnormal variables on structural reliability [J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2011, 44(2): 151—155. (in Chinese)
- [22] 吴帅兵, 李典庆, 周创兵. 结构可靠度分析中变量相关时三种变换方法的比较[J]. 工程力学, 2011, 28(5): 41—48.  
Wu Shuaibing, Li Dianqing, Zhou Chuangbing. Comparison among three transformation methods for structural reliability analysis with correlated variables [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(5): 41—48. (in Chinese)
- [23] 吕大刚. 基于线性化 Nataf 变换的一次可靠度方法[J]. 工程力学, 2007, 24(5): 79—86.
- Lü Dagang. First order reliability method based on linearized Nataf transformation [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(5): 79—86. (in Chinese)
- [24] Low B K, Tang W H. Efficient spreadsheet algorithm for first-order reliability method [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(12): 1378—1387.
- [25] Agrawal G, Bhattacharya B. Partial safety factor design of rectangular partially prestressed concrete beams in ultimate flexural limit state [J]. Journal of Structural Engineering, 2010, 3(4): 257—267.
- [26] 李国强, 李继华. 二阶矩阵法关于相关随机向量的结构可靠度计算[J]. 重庆建筑工程学院学报, 1987, 27(1): 55—67.  
Li Guoqiang, Li Jihua. Method of second moment matrix on the reliability calculation of dependent stochastic vector [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 1987, 27(1): 55—67. (in Chinese)