

空间连接系统分布式递推状态估计

梁化勇¹, 邓刚²

(1. 清华大学自动化系, 北京 100084; 2. 北京特种车辆研究所, 北京 100072)

摘要: 针对空间连接系统, 提出一种分布式递推状态估计算法, 并给出算法收敛的充分必要条件. 该分布式估计器由一系列子估计器组成, 每个子估计器只利用本地子系统和相邻子系统的输出测量值估计本地子系统的状态. 与集总式 Kalman 滤波相比, 在牺牲少量估计精度的情况下, 所提出算法大幅降低了计算复杂度和数据传输压力.

关键词: 空间连接系统; Kalman 滤波; 分布式状态估计; 递推估计

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Distributed recursive state estimation for spatially interconnected systems

LIANG Hua-yong¹, DENG Gang²

(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Institute of Special Vehicles, Beijing 100072, China. Correspondent: LIANG Hua-yong, E-mail: yhliang07@163.com)

Abstract: A distributed recursive state estimation algorithm is proposed for spatially interconnected systems. Necessary and sufficient conditions for the convergence of the algorithm are obtained. This suggested distributed estimator is comprised of a series of sub-estimators so that states of the local subsystem can be estimated only by utilizing outputs of the local subsystem and its adjacent ones. Compared with the lumped Kalman filter, the derived distributed algorithm reduces sharply computational complexity and communicating burden, in the case of sacrificing a small amount of estimation accuracy.

Key words: spatially interconnected system; Kalman filter; distributed state estimation; recursive estimation

0 引言

空间连接系统由一系列子系统连接而成, 其中每个子系统具有独立的输入输出和动态. 由于在工业生产和生活中的广泛应用^[1-3], 空间连接系统的相关研究已成为控制领域一个重要的研究热点^[4-5]. 文献[6]给出了空间连接系统的状态空间模型, 传统的二维线性系统模型, 如 2-D Rosser, 2-D FM 等模型都可以看作是它的一个特例^[7]. 针对空间连接系统, 精度最高的状态估计方法是集总式 Kalman 滤波. 它要求所有子系统的测量值传递到中央处理器进行集总式处理, 当子系统个数较多, 子系统之间距离较大时, 集总式 Kalman 滤波算法的计算复杂度非常高, 数据传输压力非常大, 因此集总式算法不适用于工程应用. 为了解决此问题, 出现了一些分布式状态估计算法. 文献[8]针对连接关系较为简单的空间连接系统, 利用采样间隙计算子系统之间的互增益阵, 可以取得较好的估计精度. 但是当子系统连接关系较为复杂时, 算法的计算复杂度非常高. 文献[1]针对空间连接系

统提出了一种分布式状态估计算法, 但与最优的集总式 Kalman 滤波相比, 该算法的估计精度损失较大. 文献[9-10]利用 LMI 技术设计分布式估计器, 但是估计器的递推实现较为困难.

本文针对文献[6]提出的空间连接系统, 设计了一种与原系统具有相似空间分布结构的分布式状态估计器. 该估计器只利用局部测量信息对本地子系统的状态进行估计, 降低了数据远距离传输带来的通讯压力. 另外, 所提出算法的分布式结构大幅度降低了计算复杂度, 并且具有递推计算的优点.

1 问题描述

符号说明如下: $\text{col}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 表示矩阵 X_1, X_2, \dots, X_n 由上到下排列成一个矩阵; $\text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为对角块矩阵, 对角线上第 i 个矩阵块为 X_i ; $XW(\star)^T$ 为 XWX^T 的简写.

考虑图 1 所示的一维空间连接系统, 假设其子系统个数有限, 为 s_m 个. 单个子系统 $\Sigma(s)$ 的状态空间

收稿日期: 2012-11-05; 修回日期: 2013-03-26.

作者简介: 梁化勇(1983-), 男, 工程师, 博士, 从事鲁棒滤波、分布式状态估计的研究; 邓刚(1976-), 男, 工程师, 硕士, 从事导航测试的研究.

方程为

$$\begin{aligned} x(t+1, s) = & A_{TT}(t, s)x(t, s) + B_{TP}(t, s)v_p(t, s) + \\ & B_{TM}(t, s)v_m(t, s) + B_T(t, s)u(t, s), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v_p(t, s-1) = & C_{PT}(t, s)x(t, s) + W_{PP}(t, s)v_p(t, s) + \\ & L_P(t, s)u(t, s), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v_m(t, s+1) = & C_{MT}(t, s)x(t, s) + W_{MM}(t, s)v_m(t, s) + \\ & L_M(t, s)u(t, s), \end{aligned} \quad (3)$$

$$y(t, s) = C_T(t, s)x(t, s) + d(t, s). \quad (4)$$

其中: $x(t, s) \in \mathbf{R}^{n_s}$ 为第 s 个子系统的状态向量, 其初始值 $x(0, s)$ 服从均值为 0、方差为 $\Pi(s)$ 的高斯分布; $y(t, s) \in \mathbf{R}^{m_s}$ 为第 s 个子系统的输出测量值; $v_p(t, s)$ 和 $v_m(t, s)$ 为子系统之间的连接变量, $v_m(t, 1) = 0$, $v_p(t, s_m) = 0$; $u(t, s)$ 和 $d(t, s)$ 为白噪声序列, 其协方差阵分别为 $Q(t, s)$ 和 $R(t, s)$. 为了叙述方便, 假设 $u(t, s)$, $d(t, s)$ 和 $x(0, s)$ 彼此之间不相关.

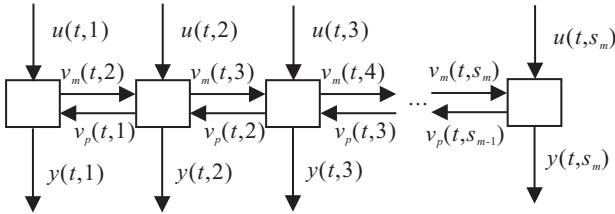


图 1 空间连接系统

上述模型在空间连接系统的研究中广泛应用^[1,4-6]. 基于此模型, 本文将设计一个与滤波对象具有相似空间连接结构的分布式状态估计器, 并对估计器的性能进行分析.

2 分布式状态估计器设计

当 $s > 1$ 时, 由式 (2) 可知

$$\begin{aligned} v_m(t, s) = & C_{MT}(t, s-1)x(t, s-1) + \\ & W_{MM}(t, s-1)v_m(t, s-1) + \\ & L_M(t, s-1)u(t, s-1). \end{aligned} \quad (5)$$

当 $s < s_m$ 时, 由式 (3) 可知

$$\begin{aligned} v_p(t, s) = & C_{PT}(t, s+1)x(t, s+1) + \\ & W_{PP}(t, s+1)v_p(t, s+1) + \\ & L_P(t, s+1)u(t, s+1). \end{aligned} \quad (6)$$

那么当 $1 < s < s_m$ 时, 将式 (5) 代入 (3) 可得

$$\begin{aligned} v_m(t, s+1) = & C_{MT}(t, s)x(t, s) + \\ & W_{MM}(t, s)C_{MT}(t, s-1)x(t, s-1) + \\ & W_{MM}(t, s)W_{MM}(t, s-1)v_m(t, s-1) + \\ & W_{MM}(t, s)L_M(t, s-1)u(t, s-1) + \\ & L_M(t, s)u(t, s). \end{aligned} \quad (7)$$

同理, 将式 (6) 代入 (2) 可得

$$\begin{aligned} v_p(t, s-1) = & C_{PT}(t, s)x(t, s) + \\ & W_{PP}(t, s)C_{PT}(t, s+1)x(t, s+1) + \\ & W_{PP}(t, s)W_{PP}(t, s+1)v_p(t, s+1) + \\ & W_{PP}(t, s)L_P(t, s+1)u(t, s+1) + \\ & L_P(t, s)u(t, s). \end{aligned} \quad (8)$$

所以, 当 $s > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} x(t+1, s-1) = & A_{TT}(t, s-1)x(t, s-1) + \\ & B_{TP}(t, s-1)C_{PT}(t, s)x(t, s) + \\ & B_{TP}(t, s-1)W_{PP}(t, s)C_{PT}(t, s+1)x(t, s+1) + \\ & B_{TP}(t, s-1)W_{PP}(t, s)W_{PP}(t, s+1)v_p(t, s+1) + \\ & B_{TM}(t, s-1)v_m(t, s-1) + \\ & B_T(t, s-1)u(t, s-1) + \\ & B_{TP}(t, s-1)L_P(t, s)u(t, s) + \\ & B_{TP}(t, s-1)W_{PP}(t, s)L_P(t, s+1)u(t, s+1). \end{aligned} \quad (9)$$

当 $s < s_m$ 时, 有

$$\begin{aligned} x(t+1, s+1) = & B_{MT}(t, s+1)W_{MM}(t, s) \times \\ & C_{MT}(t, s-1)x(t, s-1) + \\ & B_{TM}(t, s+1)C_{MT}(t, s)x(t, s) + \\ & A_{TT}(t, s+1)x(t, s+1) + \\ & B_{TP}(t, s+1)v_p(t, s+1) + \\ & B_{TM}(t, s+1)W_{MM}(t, s) \times \\ & W_{MM}(t, s-1)v_m(t, s-1) + \\ & B_{TM}(t, s+1)W_{MM}(t, s) \times \\ & L_M(t, s-1)u(t, s-1) + \\ & B_{TM}(t, s+1)L_M(t, s)u(t, s) + \\ & B_T(t, s+1)u(t, s+1). \end{aligned} \quad (10)$$

当 $1 < s < s_m$ 时, 定义

$$\begin{aligned} x_o(t, s) = & \text{col}(x(t, s-1), x(t, s), x(t, s+1)), \end{aligned} \quad (11)$$

$$y_o(t, s) = \text{col}(y(t, s-1), y(t, s), y(t, s+1)), \quad (12)$$

$$u_o(t, s) = \text{col}(u(t, s-1), u(t, s), u(t, s+1)), \quad (13)$$

$$v_o(t, s) = \text{col}(v_p(t, s+1), v_m(t, s-1)), \quad (14)$$

$$d_o(t, s) = \text{col}(d(t, s-1), d(t, s), d(t, s+1)). \quad (15)$$

系统 (1)~(4) 转化为

$$x_o(t+1, s) = A_o(t, s)x_o(t, s) + E_o(t, s)v_o(t, s) + B_o(t, s)u_o(t, s), \quad (16)$$

$$y_o(t, s) = C_o(t, s)x_o(t, s) + d_o(t, s), \quad (17)$$

其中矩阵 $A_o(t, s)$, $B_o(t, s)$, $E_o(t, s)$, $C_o(t, s)$, $Q_o(t, s)$ 和 $R_o(t, s)$ 的定义根据上述推导过程得到。

变换后的子系统 $\hat{\Sigma}(s)$ 描述的是子系统 $\Sigma(s)$ 与前后两个子系统联合的输入输出关系。因为原系统的状态 $x(t, s)$ 包含在状态 $x_o(t, s)$ 中, 所以针对模型 (16) 和 (17) 所设计的状态估计器便可以估计原系统状态。本文所设计的分布式状态估计器的递推形式为

$$\dots \rightarrow \hat{x}^w(t|t, s) \rightarrow \hat{v}(t|t, s) \rightarrow \hat{x}^w(t+1|t+1, s) \rightarrow \hat{v}(t+1|t+1, s) \rightarrow \dots$$

其中: $\hat{x}^w(t|t, s)$ 为子系统状态的估计值, $\hat{v}(t|t, s)$ 为子系统连接变量的估计值。

Step 1: 由 $\hat{x}^w(t|t, s)$ 得到 $\hat{v}(t|t, s)$ 。假设 t 时刻, 在测量数据 $\{y_i|_{i=0}^t\}$ 已知的情况下, 系统状态 $x(t, s)$ 的最优估计值为 $\hat{x}^w(t|t, s)$, 外部输入的最优估计值为 $\hat{u}(t|t, s) = 0$, 那么根据式 (2) 和 (3) 可以求出子系统之间连接变量的估计值

$$\begin{aligned} \hat{v}_p(t|t, s-1) &= C_{PT}(t|t, s)\hat{x}^w(t|t, s) + W_{PP}(t, s)\hat{v}_p(t|t, s), \hat{v}_p(t|t, s_m) = 0, \quad (18) \\ \hat{v}_m(t|t, s+1) &= C_{MT}(t|t, s)\hat{x}^w(t|t, s) + W_{MM}(t, s)\hat{v}_m(t|t, s), \hat{v}_m(t|t, 1) = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

由此, 根据 $v_o(t, s)$ 的定义式 (14) 可以得到其估计值 $\hat{v}_o(t|t, s)$ 。子系统连接变量是在空间上传递的量, 所以其估计涉及到空间上的递推。

Step 2: 由 $\hat{x}^w(t|t, s)$ 和 $\hat{v}(t|t, s)$ 得到 $\hat{x}^w(t+1|t+1, s)$ 。当式 (16) 中的子系统连接变量 $v_o(t, s)$ 由其估计值代替时, 系统 (16) 和 (17) 便可以看作是含有确定性输入 $E_o(t, s)\hat{v}_o(t|t, s)$ 的状态空间方程。利用 Kalman 滤

波可以求出 $t+1$ 时刻的估计值 $\hat{x}_o(t+1|t+1, s)$, 具体如下所示:

1) 初始化。 $\hat{x}_o(0|0, s) (s = 2, 3, \dots, s_m - 1)$ 的求取如下所示:

$$\begin{aligned} P_o(0, s) &= \text{diag}[\Pi(s-1), \Pi(s), \Pi(s+1)], \\ P_o(0|0, s) &= [P_o^{-1}(0, s) + C_o^T(0, s)R_o^{-1}(0, s)C_o(0, s)]^{-1}, \\ \hat{x}_o(0|0, s) &= P_o(0|0, s)C_o^T(0, s)R_o^{-1}(0, s)y_o(0, s). \end{aligned}$$

2) 状态更新。状态 $\hat{x}_o(t+1|t+1, s) (s = 2, 3, \dots, s_m - 1)$ 的求取如下所示:

$$\begin{aligned} \hat{x}_o(t+1|t+1, s) &= A_o(t, s)\hat{x}_o^w(t|t, s) + E_o(t, s)\hat{v}_o(t|t, s) + P_o(t+1|t+1, s)C_o^T(t+1, s)R_o^{-1}(t+1, s) \times [y_o(t+1, s) - C_o(t+1, s)A_o(t, s)\hat{x}_o^w(t|t, s) - C_o(t+1, s)E(t, s)\hat{v}_o(t|t, s)], \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_o(t+1|t, s) &= A_o(t, s)P_o(t|t, s)A_o^T(t, s) + B_o(t, s)Q_o(t, s)B_o^T(t, s), \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{eo}(t+1, s) &= R_o(t+1, s) + C_o(t+1, s) \times P_o(t+1|t, s)C_o^T(t+1, s), \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_o(t+1|t+1, s) &= P_o(t+1|t, s) - [P_o(t+1|t, s) \times C_o^T(t+1, s)]R_{eo}^{-1}(t+1, s)[\star]^T. \quad (23) \end{aligned}$$

由式 (11) 可知, 第 $s (2 < s < s_m - 1)$ 个子系统的状态估计值 $\hat{x}(t+1|t+1, s)$ 包含在 $\hat{x}_o(t+1|t+1, s-1)$, $\hat{x}_o(t+1|t+1, s)$ 和 $\hat{x}_o(t+1|t+1, s+1)$ 中, 分别为 $[\hat{x}_o(t+1|t+1, s-1)]_3$, $[\hat{x}_o(t+1|t+1, s)]_2$ 和 $[\hat{x}_o(t+1|t+1, s+1)]_1$ 三种形式。为了提高估计精度, $x(t+1, s)$ 的综合估计值 $\hat{x}^w(t+1|t+1, s)$ 通过加权方式求得, 权值分别为相应估计值的估计误差协方差阵的逆矩阵, 即

$$\begin{aligned} \hat{x}^w(t+1|t+1, s) &= \{[P_o^{-1}(t+1|t+1, s-1)]_{33} + [P_o^{-1}(t+1|t+1, s)]_{22} + [P_o^{-1}(t+1|t+1, s+1)^{-1}]_{11}\}^{-1} \times \{[P_o^{-1}(t+1|t+1, s-1)]_{33}^{-1} \times [\hat{x}_o(t+1|t+1, s-1)]_3 + [P_o^{-1}(t+1|t+1, s)]_{22}^{-1} [\hat{x}_o(t+1|t+1, s)]_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [P_o^{-1}(t+1|t+1, s+1)^{-1}]_{11} \times \\ & \hat{x}_o(t+1|t+1, s+1)]_1 \}. \end{aligned} \quad (24)$$

在式(24)中, 矩阵 $P_o(t+1|t+1, s)$ 被分成 3×3 的矩阵块, 每个矩阵块的位置用下标表示. 按照同样的方式可以求得第 1 个和最后 1 个子系统的状态估计值. 式(18)~(23)结合(24)即可完成从 $\hat{x}^w(t|t, s)$ 到 $\hat{x}^w(t+1|t+1, s)$ 的分布递推计算. 由以上算法可知, 对第 s 个子系统进行状态估计, 只需要利用第 s 个子系统和相邻两个子系统的输出测量值即可.

3 算法性能及计算复杂度分析

分布式系统的集总式形式为

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)\bar{u}(t), \quad (25)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}(t)\bar{x}(t) + \bar{d}(t). \quad (26)$$

其中

$$\bar{x}(t) = \text{col}(x(t, s)|_{s=1}^{s_m}),$$

$$\bar{u}(t) = \text{col}(u(t, s)|_{s=1}^{s_m}),$$

$$\bar{y}(t) = \text{col}(y(t, s)|_{s=1}^{s_m}),$$

$$\bar{d}(t) = \text{col}(d(t, s)|_{s=1}^{s_m}),$$

$$\bar{C}(t) = \text{diag}(C_T(t, s)|_{s=1}^{s_m}),$$

$$\bar{A}(t) = [A_{ij}(t)]_{s_m \times s_m},$$

$$\bar{B}(t) = [B_{ij}(t)]_{s_m \times s_m}.$$

$$A_{ij}(t) =$$

$$\begin{cases} A_{TT}(i, t), & i = j; \\ B_{TP}(i, t) \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} W_{PP}(k, t) \right) C_{PT}(j, t), & i < j; \\ B_{TM}(i, t) \left(\prod_{k=i-1}^{j+1} W_{MM}(k, t) \right) C_{MT}(j, t), & i > j. \end{cases}$$

$$B_{ij}(t) =$$

$$\begin{cases} B_T(i, t), & i = j; \\ B_{TP}(i, t) \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} W_{PP}(k, t) \right) L_P(j, t), & i < j; \\ B_{TM}(i, t) \left(\prod_{k=i-1}^{j+1} W_{MM}(k, t) \right) L_M(j, t), & i > j. \end{cases}$$

定义如下矩阵:

$$F(t) = \bar{A}(t) - \varphi(t)\bar{K}_f(t+1)E_7\bar{C}(t+1)\bar{A}(t), \quad (27)$$

$$\Psi(t) =$$

$$\begin{aligned} & [\varphi(t)\bar{K}_f(t+1)E_7\bar{C}(t+1)\bar{B}(t) + \bar{B}(t)]\bar{Q}(t)[\star]^T + \\ & [\varphi(t)\bar{K}_f(t+1)E_7]\bar{R}(t+1)[\star]^T, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\bar{K}_f(t) = \text{diag}\{P_o(t|t, s)C_o^T(t, s)R_o^{-1}(t, s)|_{s=2}^{s_m}\}, \quad (29)$$

$$\bar{Q}(t) = \text{diag}\{Q(t, s)|_{s=2}^{s_m}\}, \quad (30)$$

$$\bar{R}(t) = \text{diag}\{R(t, s)|_{s=2}^{s_m}\}. \quad (31)$$

其中

$$\varphi(t) =$$

$$\begin{aligned} & [(E_1P_1(t+1)E_1^T)^{-1} + (E_2P_2(t+1)E_2^T)^{-1} + \\ & E_3P_3(t+1)E_3^T]^{-1} [(E_1P_1(t+1)E_1^T)^{-1}E_4 + \\ & (E_2P_2(t+1)E_2^T)^{-1}E_5 + (E_3P_3(t+1)E_3^T)^{-1}E_6], \end{aligned}$$

$$E_1 =$$

$$\text{diag}(I_n, [0_n \ \sqrt{2}I_n \ 0_n], [0_n \ 0_n \ I_n], \dots, [0_n \ 0_n \ I_n], [0_n \ 0_n \ I_n], I_n),$$

$$E_2 =$$

$$\text{diag}(I_n, [0_n \ \sqrt{2}I_n \ 0_n], [0_n \ I_n \ 0_n], \dots, [0_n \ I_n \ 0_n], [0_n \ \sqrt{2}I_n \ 0_n], I_n),$$

$$E_3 =$$

$$\text{diag}(I_n, [I_n \ 0_n \ 0_n], [I_n \ 0_n \ 0_n], \dots, [I_n \ 0_n \ 0_n], [0_n \ \sqrt{2}I_n \ 0_n], I_n),$$

$$E_4 =$$

$$\text{diag}(I_n, I_n, I_n, [0_n \ 0_n \ I_n], [0_n \ 0_n \ I_n], \dots, [0_n \ 0_n \ I_n]),$$

$$E_5 =$$

$$\text{diag}(I_n, I_n, [0_n \ 0_n \ I_n], [0_n \ 0_n \ I_n], \dots, [0_n \ 0_n \ I_n], I_n),$$

$$E_6 =$$

$$\text{diag}(I_n, [0_n \ 0_n \ I_n], [0_n \ 0_n \ I_n], \dots, [0_n \ 0_n \ I_n], I_n, I_n),$$

$$E_7 =$$

$$\text{col}([I_{3n} \ 0 \ \dots \ 0], [0I_{3n} \ 0 \ \dots \ 0], \dots, [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ I_{3n}]),$$

$$P_1(t) =$$

$$\text{diag}(I_n, P_n(t|t, 2), P_n(t|t, 2), P_n(t|t, 3), \dots, P_n(t|t, s_m - 2), I_n),$$

$$P_2(t) =$$

$$\text{diag}(I_n, P_n(t|t, 2), P_n(t|t, 3), P_n(t|t, 4), \dots, P_n(t|t, s_m - 1), I_n),$$

$$P_3(t) =$$

$$\text{diag}(I_n, P_n(t|t, 3), P_n(t|t, 4), \dots,$$

$$P_n(t|t, s_m - 1), P_n(t|t, s_m - 1), I_n).$$

第 2 节给出的分布式算法收敛性的分析结果由以下定理给出.

定理 1 当且仅当以下条件得到满足时, 分布式

状态估计算法收敛:

1) 分布式系统 (1)~(4) 的参数时不变, $\{A_o(t, s), B_o(t, s)Q_o^{1/2}(t, s)\}$ 可镇定, $\{A_o(t, s), C_o(t, s)\}$ 可检测.

2) 矩阵 $F(t)$ 稳定.

证明 定义

$$\begin{aligned} \hat{x}_o(t+1|t+1) &= \text{diag}[\hat{x}_o(t+1|t+1, s)]_{s=2}^{s_m-1}, \\ \hat{x}^w(t|t) &= \text{diag}[\hat{x}^w(t|t, s)]_{s=1}^{s_m}, \end{aligned}$$

则由式 (20) 可得

$$\begin{aligned} \hat{x}_o(t+1|t+1) &= \\ E_7 \bar{A}(t) \hat{x}^w(t|t) &+ \bar{K}_f(t+1) E_7 \times \\ [\bar{y}(t+1) - \bar{C}(t+1) \bar{A}(t) \hat{x}^w(t|t)]. \end{aligned} \quad (32)$$

式 (24) 的集总式形式可以表示为

$$\hat{x}^w(t+1|t+1) = \varphi(t) \hat{x}_o(t+1|t+1). \quad (33)$$

因为 $\varphi(t)E_7 = I$, 所以将式 (32) 代入 (33) 可得

$$\begin{aligned} \hat{x}^w(t+1|t+1) &= \\ \bar{A}(t) \hat{x}^w(t|t) &+ \varphi(t) \bar{K}_f(t+1) E_7 \times \\ [\bar{y}(t+1) - \bar{C}(t+1) \bar{A}(t) \hat{x}^w(t|t)]. \end{aligned} \quad (34)$$

定义 $\tilde{x}(t|t) = \bar{x}(t) - \hat{x}^w(t|t)$, 由式 (25) 和 (34) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1|t+1) &= \\ [\bar{A}(t) - \varphi(t) \bar{K}_f(t+1) E_7 \bar{C}(t+1) \bar{A}(t)] \times \\ \tilde{x}(t|t) &+ \bar{B}(t) \bar{u}(t) - \varphi(t) \bar{K}_f(t+1) E_7 \times \\ [\bar{C}(t+1) \bar{B}(t) \bar{u}(t) &+ d(t+1)]. \end{aligned} \quad (35)$$

定义估计误差的协方差阵为

$$P_l(t) = E\{\tilde{x}(t|t)\tilde{x}^T(t|t)\},$$

由式 (35) 可得

$$\begin{aligned} P_l(t+1) &= \\ [\bar{A}(t) - \varphi(t) \bar{K}_f(t+1) E_7 \bar{C}(t+1) \bar{A}(t)] P_l(t) [\star]^T &+ \\ [\varphi(t) \bar{K}_f(t+1) E_7 \bar{C}(t+1) \bar{B}(t) &+ \bar{B}(t)] Q(t) [\star]^T + \\ [\varphi(t) \bar{K}_f(t+1) E_7 \bar{R}(t+1) &[\star]^T = \\ F(t) P_l(t) F^T(t) &+ \Psi(t). \end{aligned} \quad (36)$$

另外, 由式 (21)~(23) 可得

$$\begin{aligned} P_o(t+1|t, s) &= \\ A_o(t) P_o(t|t-1, s) A_o^T(t) &- A_o(t, s) \times \\ P_o(t|t, s) C_o^T(t, s) [R_o(t, s) &+ C_o(t, s) P_o C_o^T(t, s)]^{-1} \times \\ C_o(t, s) P_o(t|t-1, s) A_o^T(t, s) &+ \\ B_o(t, s) Q_o(t, s) B_o^T(t, s). \end{aligned} \quad (37)$$

式 (37) 为 Riccati 递推式, 当条件 1) 满足时, $P_o(t|t-1, s)$ 收敛到唯一的半正定矩阵, 记为 $P_o(s)$, 此时矩阵 $P_o(t|t, s)$ 同样收敛到一个半正定矩阵, 记为 $P(s)$, 则式 (36) 收敛到一常系数 Lyapunov 递推式. 由 Lyapunov 递推式的性质^[11]可知, 当矩阵 $F(t)$ 稳定时, 矩阵 $P_l(t)$

收敛到一个半正定矩阵 P_l . 所以当条件 1) 和条件 2) 得到满足时, 分布式算法收敛.

另一方面, 当分布式算法收敛时, 要求矩阵序列 $P_o(t|t-1, s)$ 收敛到唯一的半正定矩阵 $P_o(s)$, 则条件 1) 必须得到满足. 除此之外, 还要求 Lyapunov 递推式 (36) 收敛, 则条件 2) 必须得到满足. 所以条件 1) 和条件 2) 也是分布式算法收敛的必要条件. \square

下面分析算法的计算复杂度. 为了叙述简洁, 假设所有子系统状态向量维数相同, 记为 n . 对于集总式 Kalman 滤波, 集总式状态的维数为 $s_m n$, 则其计算复杂度为 $\mathcal{O}((s_m n)^a)$, 其中 $a \in [2, 3]$. 由式 (18)~(24) 可得, 分布式算法的计算复杂度为 $\mathcal{O}(s_m n^a)$. 由此可知, 在子系统个数较多时, 与集总式 Kalman 滤波相比, 本文所提出的分布式滤波算法大幅度降低了计算复杂度.

4 数值仿真

虽然本文所考虑的系统 (1)~(4) 可以是时变和空变系统, 但为了方便, 本节对一个线性定常系统进行仿真, 模型参数如下:

$$A_{TT}(t, s) = \begin{bmatrix} 0.4 & \\ & -0.35 \end{bmatrix}, B_T(t, s) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$C_T(t, s) = [0.3 \quad -0.8], C_{PT}(t, s) = [-0.4 \quad 0.6],$$

$$B_{TM}(t, s) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.5 \end{bmatrix}, B_{TP}(t, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_{MT}(t, s) = [0.5 \quad 0.2], W_{MM}(t, s) = -0.1,$$

$$W_{PP}(t, s) = 0.1, L_P(t, s) = 1, L_M(t, s) = -1.$$

其中: 初始值 $x(0, s)$ 服从标准正态分布, $u(t, s)$ 和 $d(t, s)$ 分别是均值为 0、方差为单位阵的白噪声序列. 本文将新算法和集总式 Kalman 滤波、文献 [1] 算法进行比较, 子系统个数为 $s_m = 300$, 独立实验次数为 Num = 100, 采样时间为 $T = 100$. 将 100 次仿真实验的估计误差方差的平均值作为衡量估计精度的指标, 所有子系统估计误差方差的比较结果如图 2 所示. 由图 2 可见, 本文算法的估计精度高于文献 [1] 算法, 与最优的集总式 Kalman 滤波算法相比, 本文算法估计精度的损失并不是很大.

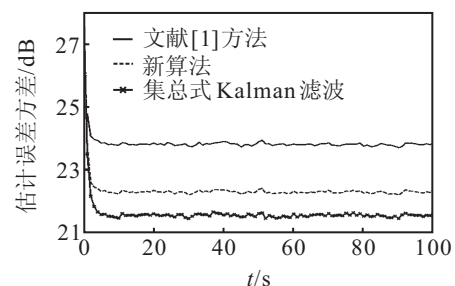


图 2 估计误差比较

为了比较计算复杂度,进行如下实验.子系统个数分别取值为 [50 100 150 200 250 300 350 400],将 3 种算法递推 100 步所消耗的 CPU 时间进行比较,结果如图 3 所示.

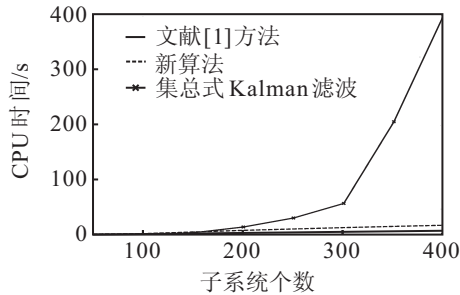


图 3 计算时间比较

由图 3 可见,本文算法和文献 [1] 算法的计算时间均随子系统个数的增加线性增大,集总式 Kalman 滤波的计算时间以子系统个数高次幂的速度增大.当子系统个数较大时,分布式算法的计算时间远小于集总式 Kalman 滤波,这与第 3 节的分析结果相符.

5 结 论

本文针对时变和空变的空连接系统,提出了一种分布式状态估计算法,并分析了算法的收敛性.该算法能够估计子系统状态和子系统连接变量,且由于利用局部测量信息对本地子系统进行状态估计,避免了数据远距离传输带来的通讯压力.仿真实验表明了与最优集总式 Kalman 滤波相比,在牺牲少量滤波精度的情况下,所提出算法大幅降低了计算复杂度,且与文献 [1] 算法相比,在计算精度上也占有一定优势.

参考文献(References)

- [1] 梁化勇,周彤.一类空连接系统的分布式状态估计及其收敛性分析[J].自动化学报,2010,36(5):720-730.
(Liang H Y, Zhou T. Distributed state estimation for spatially interconnected systems and its convergence analysis[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(5): 720-730.)
- [2] Dochain D, Dumont G, Gorinevsky D, et al. Special issue on control of industrial spatially distributed processes[J].

- IEEE Trans on Control System Technology, 2003, 11(5): 609-611.
- [3] Stewart G E, Gorinevsky D, Dumont G A. Feedback controller design for a spatially distributed system: The paper machine problem[J]. IEEE Trans on Control System Technology, 2003, 11(5): 612-628.
- [4] Rice J K, Verhagen M. Distributed control: A sequentially semi-separable approach for spatially heterogeneous linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1270-1283.
- [5] Langbort C, D'Andrea R. Distributed control of spatially reversible interconnected systems with boundary conditions[J]. SIAM J Control Optimization, 2005, 44(1): 1-28.
- [6] D'Andrea R, Dullerud G E. Distributed control design for spatially interconnected systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(9): 1478-1495.
- [7] 张光磊.多维线性系统稳定性及递推鲁棒滤波算法研究[D].北京:清华大学自动化学院,2009.
(Zhang G L. Research on stability and robust filtering for multi-dimensional linear systems[D]. Beijing: Department of Automation, Tsinghua University, 2009.)
- [8] Martensson K, Rantzer A. A scalable modularized synthesis method for distributed Kalman filters[C]. Proc of the 18th IFAC World Congress. Milano, 2011: 9133-9138.
- [9] 王利魁,胡国林,刘娟娟.含有不确定性的 2 维离散线性系统的鲁棒 H_2 滤波设计[J].自动化学报,2012,38(2): 303-307.
(Wang L K, Hu G L, Liu J J. Robust H_2 filtering design for 2-D discrete-time linear system with uncertainties[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(2): 303-307.)
- [10] Du C D, Xie L H, Soh Y C. H_∞ filtering of 2-D discrete systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(6): 1760-1768.
- [11] Kailath T, Sayed A H, Hassibi B. Linear estimation[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2008: 766-768.

(责任编辑:郑晓蕾)