文章编号: 1001-0920 (2014) 02-0221-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2012.1550

一般广义时变系统的容许性和二次容许性

王 刚[1], 苏晓明[2], 孟 飞[2]

(1. 南京理工大学 泰州科技学院，江苏 泰州 225300；2. 沈阳工业大学 理学院，沈阳 110870)

摘 要: 针对一般广义时变系统, 采用广义 Lyapunov 不等式和受限等价变换的分析方法, 提出了一般广义时变系统容许性和二次容许性的概念, 建立了一般广义时变系统的 Lyapunov 不等式. 将一般广义时变系统容许性问题转化为求解 Lyapunov 不等式问题, 获得了该类系统容许和二次容许的充要条件, 所得结论是广义系统容许性研究成果向一般广义时变系统的自然推广. 最后, 通过数值算例验证了所得结论的有效性.

关键词: 一般广义时变系统；广义 Lyapunov 不等式；容许性；Lyapunov 方程；二次容许性

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Admissibility and quadratic admissibility for time-varying general singular system

WANG Gang[1], *SU Xiao-ming*[2], *MENG Fei*[2]

(1. Taizhou Institute of Science & Technology，Nanjing University of Science & Technology，Taizhou 225300, China；2. School of Science，Shenyang University of Technology，Shenyang 110870，China．Correspondent：WANG Gang，E-mail：68694098@qq.com)

Abstract: Considering the time-varying general singular system, by using the analysis method of singular Lyapunov inequality and restrained equal transformation，the concept of admissibility and quadratic admissibility for the time-varying general singular system is proposed, a Lyapunov inequality for time-varying general singular system is established, the problem of admissibility for time-varying general singular system is transformed into solving the Lyapunov inequality problem. The necessary and sufficient conditions of admissibility and quadratic admissibility are obtained for the system. The conclusions of admissibility research achievements are natural extend from singular system to the time-varying general singular system. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the obtained conclusions.

Key words: time-varying general singular system；singular Lyapunov inequality；admissibility；Lyapunov equation; quadratic admissibility

0 引 言

广义系统[1]的研究是从20世纪70年代[2]开始的, 迄今已有近40年的历史, 其基本理论体系已经建立. 近年来, 随着对广义系统研究的不断深入, 取得了一系列的丰硕成果[3-5], 广义系统理论已发展成为现代控制理论的一个独立研究领域. 这些研究成果主要集中在广义定常系统[6]和广义周期时变系统[7-8]上, 而对于广义时变系统的研究成果[9-10]较少. 这是因为广义时变系统较之广义周期系统更具复杂性, 主要区别体现在广义周期系统系数矩阵为周期函数矩阵, 而广义时变系统的系数矩阵为非周期时变矩阵, 这给研究带来很大不便, 因此获得的研究成果很少. 苏晓明等[11]通过建立 Lyapunov 方程和 Riccati 方程研究了时变广义系统的稳定性问题. 张雪峰等[12]研究了时变广义系统的能控性和能观性问题.

迄今为止, 尚未发现关于一般广义时变系统容许性和二次容许性的研究成果. 本文针对一般广义时变系统容许性和二次容许性问题进行研究, 提出了一般广义时变系统容许性和二次容许性的概念, 并利用线性矩阵不等式和广义 Lyapunov 不等式的分析方法, 得到了该类系统容许和二次容许的充要条件.

1 问题描述及引理

给定一般广义时变系统

收稿日期: 2012-10-17；**修回日期:** 2012-11-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074005).

作者简介: 王刚(1980−), 男, 讲师, 硕士, 从事广义系统稳定性、电力传动的研究；苏晓明(1964−), 男, 教授, 博士, 从事广义时变系统的鲁棒控制、H_∞ 控制等研究.

$$E(t)\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),$$
$$y(t)=C(t)x(t). \tag{1}$$

其中: $x(t)\in R^n$ 为系统状态变量; $u(t)\in R^m$ 为系统控制输入; $E(t)\in R^{n\times n}$, $A(t)\in R^{n\times n}$, $B(t)\in R^{n\times m}$, $C(t)\in R^{n\times n}$ 为解析的函数矩阵; $\mathrm{rank}(E(t))=q<n$.

定义 1 对于系统 (1), 如果存在常数 s, 使得

$$\det(sE(t)-A(t))\neq 0,\ \forall t,$$

则称系统 (1) 是一致正则的.

引理 1[13] 线性时变系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

是渐近稳定的充分必要条件为对于给定的矩阵 $Q(t)>0$, Lyapunov 方程

$$\dot{P}(t)+P(t)A(t)+A^{\mathrm{T}}(t)P(t)=-Q(t)$$

有惟一的正定解.

引理 2[14] 若系统 (1) 是解析可解的, 则一定存在解析的可逆矩阵 $P(t)\in R^{n\times n}$, $Q(t)\in R^{n\times n}$, 通过下述变换将系统 (1) 化为规范标准型 (SCF), 即

$$P(t)E(t)Q(t)=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & N(t)\end{bmatrix},$$
$$P(t)A(t)Q(t)=\begin{bmatrix} A_1(t) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\ P(t)B(t)=\begin{bmatrix} B_1(t)\\ B_2(t)\end{bmatrix},$$
$$C(t)Q(t)=[\,C_1(t)\ \ C_2(t)\,],\ Q^{-1}(t)x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix},$$
$$y_1(t)=C_1(t)x_1(t),\ y_2(t)=C_2(t)x_2(t).$$

其中: $N(t)$ 为幂零矩阵, 各块均具有适当阶数.

由引理 2 可以得出, 系统 (1) 无脉冲的充分必要条件是 $N(t)=0$.

引理 3 给定一个对称矩阵 $\varOmega$, 设 M_1 和 M_2 是适当维数的矩阵, 则对于任意

$$\varOmega+M_1F(t)M_2+{M_2}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t){M_1}^{\mathrm{T}}<0,$$
$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$$

的充分必要条件是存在常数 $\varepsilon>0$, 使得

$$\varOmega+\varepsilon M_1{M_1}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\varepsilon}{M_2}^{\mathrm{T}}M_2<0.$$

定义 2 系统 (1) 称为渐近稳定的, 如果它的子系统 $\dot{x}_1(t)=A_1(t)x_1(t)+B_1(t)u(t)$ 是渐近稳定的.

2 主要结果

2.1 系统的容许性

定义 3 如果系统 (1) 是一致正则、渐近稳定、无脉冲的, 则称系统 (1) 是容许的.

定理 1 假设一般广义时变系统 (1) 是解析可解的, 则系统 (1) 容许的充要条件是如下 Lyapunov 不等式有解:

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\\ E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)<0,\\ E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\ \dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0\end{cases} \tag{2}$$

证明 1) 必要性. 因为系统 (1) 是解析可解的, 并且系统 (1) 是容许的, 所以一定存在可逆矩阵 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 满足

$$P(t)E(t)Q(t)=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$
$$P(t)A(t)Q(t)=\begin{bmatrix} A_1(t) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(t)=V(E(t)x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)V(t)x(t)\geqslant 0,$$
$$\dot{V}(t)=$$
$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)V(t)x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)V(t)\dot{x}(t)+$$
$$x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)x(t)=$$
$$x^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)V(t)x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\dot{x}(t)+$$
$$x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)x(t)=$$
$$x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+$$
$$E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t))x(t)<0,$$
$$A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+$$
$$E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)<0,$$
$$E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\ \dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0,$$
$$Q^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}(t)P^{-\mathrm{T}}(t)V(t)Q(t)=$$
$$\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t)\\ V_3(t) & V_4(t)\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} V_1^{\mathrm{T}}(t) & V_3^{\mathrm{T}}(t)\\ V_2^{\mathrm{T}}(t) & V_4^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0,$$
$$V_1(t)=V_1^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0,\ V_2(t)=0.$$

令

$$A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+$$
$$E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)=-W(t),$$
$$W(t)>0.$$

设 $[P(t)\dot{E}(t)Q(t)=\begin{bmatrix} \dot{E}_1(t) & \dot{E}_2(t)\\ \dot{E}_3(t) & \dot{E}_4(t)\end{bmatrix}$, 有

$$Q(t)^{\mathrm{T}}\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)P(t)^{\mathrm{T}}P(t)^{-\mathrm{T}}V(t)Q(t)=$$
$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1^{\mathrm{T}}(t) & \dot{E}_3^{\mathrm{T}}(t)\\ \dot{E}_2^{\mathrm{T}}(t) & \dot{E}_4^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(t) & 0\\ V_3(t) & V_4(t)\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1^{\mathrm{T}}(t)V_1(t)+\dot{E}_3^{\mathrm{T}}(t)V_3(t) & \dot{E}_3^{\mathrm{T}}(t)V_4(t)\\ \dot{E}_2^{\mathrm{T}}(t)V_1(t)+\dot{E}_4^{\mathrm{T}}(t)V_3(t) & \dot{E}_4^{\mathrm{T}}(t)V_4(t)\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} M_1(t) & M_2(t) \\ M_3(t) & M_4(t) \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

则 $M_1(t) \geqslant 0$, $M_4(t) \geqslant 0$. 对 $W(t)$ 作如下分块:

$$W(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) & W_2(t) \\ W_2^{\rm T}(t) & W_3(t) \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix} A_1^{\rm T}(t) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) & 0 \\ V_3(t) & V_4(t) \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} V_1^{\rm T}(t) & V_3^{\rm T}(t) \\ 0 & V_4^{\rm T}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot V_1(t) & 0 \\ \dot V_3(t) & \dot V_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1(t) & M_2(t) \\ M_3(t) & M_4(t) \end{bmatrix} =$$
$$-\begin{bmatrix} W_1(t) & W_2(t) \\ W_2^{\rm T}(t) & W_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{\rm T}(t)V_1(t) & 0 \\ V_3(t) & V_4(t) \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} V_1^{\rm T}(t)A_1(t) & {V_3}^{\rm T}(t) \\ 0 & V_4^{\rm T}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot V_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} M_1(t) & M_2(t) \\ M_3(t) & M_4(t) \end{bmatrix} =$$
$$-\begin{bmatrix} W_1(t) & W_2(t) \\ W_2^{\rm T}(t) & W_3(t) \end{bmatrix} V_1^{\rm T}(t)A_1(t)+$$

$$A_1^{\rm T}(t)V_1(t) + \dot V_1(t) = -W_1(t) - M_1(t), \tag{3}$$

$$V_3^{\rm T}(t) + M_2(t) = -W_2(t), \tag{4}$$

$$V_3(t) + M_3(t) = -{W_2}^{\rm T}(t), \tag{5}$$

$$V_4(t) + V_4^{\rm T}(t) + M_4(t) = -W_3(t). \tag{6}$$

因为系统 (1) 渐近稳定, 所以 $A_1(t)$ 渐近稳定. 由引理 1 可得 $V_1^{\rm T}(t)A_1(t) + A_1^{\rm T}(t)V_1(t) + \dot V_1(t) = -W_1(t) - M_1(t)$ 有解, 又因为式 (4) ∼ (6) 成立, 所以

$$A^{\rm T}(t)V(t) + V^{\rm T}(t)A(t)+$$
$$E^{\rm T}(t)\dot V(t) + \dot E^{\rm T}(t)V(t) = -W(t)$$

有解, 且满足 $E^{\rm T}(t)V(t) = V^{\rm T}(t)E(t) \geqslant 0, \dot E^{\rm T}(t)V(t) \geqslant 0$. 因此广义 Lyapunov 不等式 (2) 有解.

2) 充分性. 系统 (1) 是解析可解的, 所以系数矩阵 $E(t)$、$A(t)$ 可化为引理 2 中的形式; 设 $N(t)$ 的幂零指数为 h, 即 $N^{h-1}(t) \neq 0, N^h(t) = 0$. 对 $V(t)$ 进行如下分块:

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t) \\ V_3(t) & V_4(t) \end{bmatrix},$$

将系统 (1) 的分解式和 $V(t)$ 分块代入广义 Lyapunov 不等式 (2), 可得

$$\begin{bmatrix} A_1^{\rm T}(t) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) & V_2(t) \\ V_3(t) & V_4(t) \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} V_1^{\rm T}(t) & V_3^{\rm T}(t) \\ V_2^{\rm T}(t) & V_4^{\rm T}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N^{\rm T}(t) \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} \dot V_1(t) & \dot V_2(t) \\ \dot V_3(t) & \dot V_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1(t) & M_2(t) \\ M_3(t) & M_4(t) \end{bmatrix} < 0,$$

则

$$A_1^{\rm T}(t)V_1(t) + V_1^{\rm T}(t)A_1(t) + \dot V_1(t) + M_1(t) < 0,$$
$$V_4(t) + V_4^{\rm T}(t) + N^{\rm T}(t)\dot V_4(t) + M_4(t) < 0.$$

所以

$$A_1^{\rm T}(t)V_1(t) + V_1^{\rm T}(t)A_1(t) + \dot V_1(t) < 0, \tag{7}$$

$$V_4(t) + V_4^{\rm T}(t) + N^{\rm T}(t)\dot V_4(t) < 0. \tag{8}$$

由式 (7) 可知, 系统 (1) 渐近稳定.

下面证明系统 (1) 是无脉冲的.

假设 $N(t) \neq 0$, 一定存在 $x(t) \neq 0$, 使 $N(t)x(t) \neq 0$. 用 $N(t)x(t)^{\rm T}$ 和 $N(t)x(t)$ 分别乘不等式 (8) 的两边, 可得

$$x^{\rm T}(t)N^{\rm T}(t)(V_4(t) + V_4^{\rm T}(t)+$$
$$N^{\rm T}(t)\dot V_4(t))N(t)x(t) < 0. \tag{9}$$

令 $x(t) = N^{h-1}(t)x_0(t) \neq 0$, 有

$$x_0^{\rm T}(t)(N^{\rm T}(t))^{h-1}(N^{\rm T}(t)V_4(t)N(t)+$$
$$N^{\rm T}(t)V_4^{\rm T}(t)N(t)+$$
$$N^{\rm T}(t)N^{\rm T}(t)\dot V_4(t)N(t))N^{h-1}(t)x_0(t) =$$
$$x_0^{\rm T}(t)(N^{\rm T}(t))^hV_4(t)N^h(t)x_0(t)+$$
$$x_0^{\rm T}(t)(N^{\rm T}(t))^hV_4^{\rm T}(t)N^h(t)x_0(t)+$$
$$x_0^{\rm T}(t)(N^{\rm T}(t))^{h+1}\dot V_4(t)N^h(t)x_0(t) = 0.$$

这与式 (9) 矛盾, 所以 $N(t) = 0$, 因此系统 (1) 是无脉冲的. 当系统 (1) 无脉冲时, 有

$$\det(s(t)E(t) - A(t)) =$$
$$d(t)\det\begin{bmatrix} s(t)I - A_1(t) & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} =$$
$$(-1)^{n-q}d(t)\det(s(t)I - A_1(t)),$$

其中 $d(t) = [\det(P(t)Q(t))]^{-1} \neq 0$. 系统 (1) 渐近稳定, 因此 $\det(s(t)I - A_1(t)) \neq 0$, 系统 (1) 是正则的. □

2.2 系统的二次容许性

对于系统 (1), 如果存在状态反馈控制器

$$u(t) = K(t)x(t),$$

则在该反馈作用下, 相应的闭环系统为

$$E(t)\dot x(t) = (A(t) + B(t)K(t))x(t),$$
$$y(t) = C(t)x(t). \tag{10}$$

定义 4 对于系统 (1), 如果存在状态反馈 $u(t) = K(t)x(t)$, 使得闭环系统 (10) 是容许的, 则称系统 (1) 是二次容许的.

由定义 4 和定理 1 可得, 系统 (1) 二次允许意味着存在矩阵 $V(t)$, 使得

$$\begin{cases} (A(t)+B(t)K(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\\ B(t)K(t))+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)<0,\\ E^{\mathrm{T}}(t)V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E(t)\geqslant 0,\\ \dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)\geqslant 0. \end{cases} \tag{11}$$

定理 2 一般广义时变系统二次容许的充要条件是存在矩阵 $X(t),Y(t)$ 和常数 $\varepsilon>0$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} X(t)A^{\mathrm{T}}(t)+A(t)X^{\mathrm{T}}(t)+\\ X(t)E^{\mathrm{T}}(t)\dot{X}^{-\mathrm{T}}(t)X^{\mathrm{T}}(t)+\\ X(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)+\varepsilon B(t)B^{\mathrm{T}}(t)\end{matrix} & Y(t)\\ Y^{\mathrm{T}}(t) & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0, \tag{12}$$

$$\begin{cases} E(t)X^{\mathrm{T}}(t)=X(t)E^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0,\\ X(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0. \end{cases} \tag{13}$$

若 $X(t)$、$Y(t)$ 使得式 (12) 和 (13) 成立, 则可得到一个状态反馈 $u(t)=K(t)x(t)$, 其中 $K(t)=Y^{\mathrm{T}}(t)X^{-\mathrm{T}}(t)$.

证明 1) 必要性. 一般广义时变系统二次允许是存在矩阵 $V(t)$, 使式 (11) 成立. 由引理 3 和式 (11) 可得式 (12) 等价于存在矩阵 $V(t)$ 和常数 $\varepsilon>0$ 满足如下不等式:

$$A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)+\\ \dot{E}^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\varepsilon V^{\mathrm{T}}(t)B(t)B^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\\ \frac{1}{\varepsilon}K^{\mathrm{T}}(t)K(t)<0. \tag{14}$$

由于矩阵 $V(t)$ 可逆, 用 $V(t)^{\mathrm{T}}$ 和 $V(t)^{-1}$ 分别乘式 (14) 和 (13) 的两边, 可得

$$\begin{cases} V^{-\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)+A(t)V^{-1}(t)+\varepsilon B(t)B^{\mathrm{T}}(t)+\\ V^{-\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)\dot{V}(t)V^{-1}(t)+V^{-\mathrm{T}}(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)+\\ \frac{1}{\varepsilon}V^{-\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}(t)K(t)V^{-1}(t)<0,\\ V^{-\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}(t)=E(t)V^{-1}(t)\geqslant 0,\\ V^{-\mathrm{T}}(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0. \end{cases} \tag{15}$$

令 $X(t)=V^{-\mathrm{T}}(t)$, 有 $\dot{V}(t)=\dot{X}^{-\mathrm{T}}(t)$. 再令 $Y(t)=X(t)K^{\mathrm{T}}(t)$, 代入式 (15) 整理可得

$$X(t)A^{\mathrm{T}}(t)+A(t)X^{\mathrm{T}}(t)+\\ X(t)E^{\mathrm{T}}(t)\dot{X}^{-\mathrm{T}}(t)X^{\mathrm{T}}(t)+X(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)+\\ \varepsilon B(t)B^{\mathrm{T}}(t)+\frac{1}{\varepsilon}Y(t)Y^{\mathrm{T}}(t)<0, \tag{16}$$

$$\begin{cases} E(t)X^{\mathrm{T}}(t)=X(t)E^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0,\\ X(t)\dot{E}^{\mathrm{T}}(t)\geqslant 0. \end{cases} \tag{17}$$

最后, 应用 Schur 补定理可得式 (12) 和 (13) 成立.

2) 充分性. 如果式 (12) 和 (13) 成立, 则由 Schur 补定理可得式 (16) 和 (17) 成立; 然后代入 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的等价代换, 再用 $V(t)^{\mathrm{T}}$ 和 $V(t)$ 分别乘各式的两边, 即可得式 (14) 和 (13) 成立; 再由引理 3 和二次容许性的定义即可证得系统 (1) 是二次允许的. □

3 算例分析

例 1 对于系统 (1), 系数矩阵 $E(t),A(t)$ 的表达式如下:

$$E(t)=\begin{bmatrix} t&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix},\ A(t)=\begin{bmatrix} -2t&0&0&0\\ t&-2t&0&0\\ 0&0&t&0\\ 0&0&0&t \end{bmatrix}.$$

因为 $\det(A(t))=4t^4\neq 0$, 所以

$$\det(\lambda I-A_1(t))=(\lambda+2)(\lambda+2t),\\ N(t)=0,$$

系统是容许的. 计算广义 Lyapunov 不等式 (2), 当取

$$V(t)=\begin{bmatrix} t&0&0&0\\ 0&t&0&0\\ 0&0&-t&0\\ 0&0&0&-t \end{bmatrix}$$

时满足广义 Lyapunov 不等式 (2).

例 2 对于系统 (1), 系数矩阵 $E(t)$、$A(t)$、$B(t)$ 的表达式分别为

$$E(t)=\begin{bmatrix} t&0\\ 0&0 \end{bmatrix},\ A(t)=\begin{bmatrix} \dfrac{t+1}{4}&0\\ 0&-1 \end{bmatrix},$$

$$B(t)=\begin{bmatrix} -t&0\\ 0&0 \end{bmatrix},\ t>1.$$

由于 $\det(\lambda I-A_1(t))=\Big(\lambda-\dfrac{t+1}{4t}\Big)$, 原系统不稳定. 下面构造一个状态反馈控制器 $u(t)=K(t)x(t)$ 使得系统二次容许.

由定理 2, 设

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1&x_2\\ x_3&x_4 \end{bmatrix},\ Y(t)=\begin{bmatrix} y_1&y_2\\ y_3&y_4 \end{bmatrix},$$

由式 (15) 可得

$$\begin{bmatrix} x_1&x_2\\ x_3&x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{t}{2}&0\\ 0&-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{t}{2}&0\\ 0&-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1&x_3\\ x_2&x_4 \end{bmatrix}+\\ \begin{bmatrix} x_1&x_2\\ x_3&x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t&0\\ 0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1&\dot{x}_3\\ \dot{x}_2&\dot{x}_4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_1&x_3\\ x_2&x_4 \end{bmatrix}+\\ \begin{bmatrix} x_1&x_2\\ x_3&x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0\\ 0&0 \end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix} 0&0\\ 0&t^2 \end{bmatrix}+\\ \frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} {y_1}^2+{y_2}^2&y_1y_3+y_2y_4\\ y_1y_3+y_2y_4&{y_3}^2+{y_4}^2 \end{bmatrix}<0. \tag{18}$$

将 $X(t)$ 代入式 (17)中, 得 $x_3=0$; 将 $x_3=0$ 这一条件代入式 (18), 取

$$X(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}&0\\ 0&t \end{bmatrix},\ Y(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}&0\\ 0&\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} \end{bmatrix},$$

然后再代入式 (18) 并化简, 可求得 ε 的取值范围

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{4}}[7t-3-\sqrt{(3t-3)(11t-3)}]}{4t^2}<\varepsilon<\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{4}}[7t-3+\sqrt{(3t-3)(11t-3)}]}{4t^2},$$

$$K(t)=Y^{\mathrm{T}}(t)X^{-\mathrm{T}}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\frac{t}{4}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}}{t}\end{bmatrix}.$$

令

$$G(t)=A(t)+B(t)K(t)=\begin{bmatrix}(t+1)/4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-3t)/4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

因为 $\det(G(t))=(3t-1)/4\neq 0$, 所以闭环系统正则; 因为

$$\det(\lambda I-G_1(t))=\Big(\lambda+\frac{3t-1}{4t}\Big)(\lambda+1),$$

所以闭环系统稳定; 因为 $N(t)=0$, 所以闭环系统无脉冲. 因此, 能够找到一个状态反馈控制器使原系统是二次允许的.

4 结　论

本文针对一般广义时变系统, 提出了系统容许和二次容许的概念, 并给出了相应的判定条件, 同时给出了使系统二次容许的控制器的设计方法. 本文提出的设计方法直接基于系数矩阵进行设计, 方法比较简单. 所得结论为进一步研究一般广义时变系统的鲁棒性问题奠定了基础.

参考文献(References)

[1] Duan G R. Analysis and design of descriptor linear systems[M]. New York: Springer Verlag, 2010.

[2] Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical systems[J]. Int J of Control, 1974, 20(2): 191-202.

[3] Jeung E T, Park H B. H_∞ output feedback controller design for linear system with time varying delayed state[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(7): 971-974.

[4] Campell S L, Petzold L. Canonical forms and solvable singular system of differential align[J]. SIAM JAlg, Discrete Math, 1983, 4(4): 517-521.

[5] Takaba K, Morihira N, Katayama T. H_∞ control for descriptor systems-a J spectral factorization approach[C]. The 33rd IEEE Conf on Decision and Control. Lake Buena Vista, 1994: 2251-2256.

[6] Zhao Zhihua, Zhang Qingling, Liu Xiaodong. H_∞ control and parametric controllers for descriptor systems[C]. Proc of the American Control Conf. Anchorage, 2002: 4908-4913.

[7] 苏晓明, 吕明珠. 广义不确定周期时变系统的鲁棒稳定性分析[J]. 自动化学报, 2006, 32(4): 481-488.
(Su X M, Lv M Z. Analysis of robust stability for linear time-varying uncertain periodically descriptor systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(4): 481-488.)

[8] 苏晓明, 王刚, 吕明珠. 广义不确定周期时变系统的鲁棒镇定控制[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2006, 27(7): 716-719.
(Su X M, Wang G, Lv M Z. Robust stabilization for generalized periodically time-varying uncertain descriptor systems[J]. J of Northeastern University: Natural Science, 2006, 27(7): 716-719.)

[9] 胡刚, 孙继涛. 时变广义系统稳定性分析[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2003, 31(4): 481-485.
(Hu G, Su J T. Stability analysis for singular systems with time-varying[J]. J of Tongji University: Natural Science, 2003, 31(4): 481-485.)

[10] 艾玲. 线性时变广义系统的脉冲控制[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2004, 91(4): 119-121.
(Ai L. Impulse controllability of linear time-varying singular systems[J]. J of Harbin University of Science and Technology, 2004, 91(4): 119-121.)

[11] 苏晓明, 张庆灵. 时变广义系统的稳定性[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2001, 22(5): 572-575.
(Su X M, Zhang Q L. Stability for time-varying singular systems[J]. J of Northeastern University: Natural Science, 2001, 22(5): 572-575.)

[12] 张雪峰, 张庆灵. 线性时变广义系统的能控性与能观性问题[J]. 自动化学报, 2009, 35(9): 1249-1253.
(Zhang X F, Zhang Q L. On controllability and observability of linear time-varying singular systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(9): 1249-1253.)

[13] Bittanti S. 30 years of periodic control-form analysis to design[C]. Proc of the 3rd Asian Control Conf. Shanghai, 2000: 1253-1258.

[14] 杨成梧, 邹云. 带缓变参数的广义系统的弱稳定性[J]. 控制理论与应用, 1990, 17(1): 18-26.
(Yang C W, Zou Y. On the stability of singular systems with slowly varying parameters[J]. Control Theory & Applications, 1990, 17(1): 18-26.)

(责任编辑: 孙艺红)