第 29 卷 第 2 期
Vol. 29 No. 2

控 制 与 决 策
Control and Decision

2014 年 2 月
Feb. 2014

文章编号: 1001-0920 (2014) 02-0315-05 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2012.1399

基于相对核和精确度的灰数排序方法

闫书丽[1,2], 刘思峰[1], 朱建军[1], 方志耕[1], 吴利丰[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 河南科技大学 数学与统计学院，河南 洛阳 471003)

摘 要: 研究区间灰数的排序方法, 分析已有排序方法的特点和优劣. 为了更好地切合实际问题, 考虑到灰数的取值论域, 基于信息保留原则建立了普通区间灰数到标准灰数的投影法则; 依据投影得到的标准灰数提出了相对核和精确度的概念, 在此基础上给出了灰数的排序方法, 克服了已有排序方法的不足, 且使相同灰数的排序区分度在不同的应用背景下有不同的体现, 有助于决策者进行分析. 最后, 通过算例验证了所提出方法的可行性和优越性.

关键词: 灰数；投影；相对核；精确度

中图分类号: N945 **文献标志码:** A

The ranking method of grey numbers based on relative kernel and degree of accuracy

YAN Shu-li[1,2], *LIU Si-feng*[1], *ZHU Jian-jun*[1], *FANG Zhi-geng*[1], *WU Li-feng*[1]

(1. College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China；2. School of Mathematics and Statistics, He’nan University of Science and Technology, Luoyang 471003，China．Correspondent：YAN Shu-li，E-mail：yshuli@126.com)

Abstract: The ranking method of interval grey numbers is researched. Firstly, the merits and demerits of the existing methods are analyzed. Then, in order to suit the actual application, based on grey numbers’ universe of discourse and the principle of information persisting, the projection rule from ordinary interval grey numbers to standard grey numbers in universe of discourse [0,1] is designed. Moreover, the concepts of relative kernel and degree of accuracy are proposed aiming at the standard grey number. Based on these concepts, the ranking method of grey numbers is presented, which overcomes the shortages of existing ones. The discriminations among the same grey numbers in different application background are different, which are conductive to analyze for decision makers. Finally, examples show the feasibility and superiority of the proposed method.

Key words: grey numbers；projection；relative kernel；degree of accuracy

0 引 言

现实决策信息往往是复杂、不确定的, 不确定信息的表征形式 (区间数、模糊数) 得到了学者们的广泛关注, 研究重点大都集中在区间数 (模糊数) 间的大小比较以及区间数与模糊数之间的区别等[1-4]. 自灰色系统理论被提出以来[5], 灰色系统有了长足的发展[6-8], 灰数尤其是区间灰数的运算、排序是灰色系统的理论基础, 一直备受学者们的重视[9-12], 在灰色多属性决策中处于极其重要的地位[13-16]. 从现有研究来看, 很多文献借鉴区间数的方法来研究灰数, 而区间灰数与区间数存在着本质的差异: 区间数是不确定信息的取值范围, 整个区间上信息取值机会均等; 区间灰数是某信息覆盖集合 (区间) 上不知道确切取值、只知道大概取值范围的实数, 信息覆盖集合依赖于信息的获得, 通过信息补充, 真值在整个信息覆盖集合 (区间) 上的取值分布会越来越明确, 不单是服从均匀分布. 由此, 现有的研究方法和结果存在不足之处. 关于区间灰数的排序问题, 文献 [10] 提供了标准区间灰数间的比较和运算法则, 但仅是对几种特殊的情况给予了比较, 不具有一般推广性; 文献 [11] 研究的仅是区

收稿日期: 2012-09-17；**修回日期:** 2013-01-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71171112, 71171113, 70701017, 71271226)；国家社科重大基金项目(10zd&014); 国家社科重点基金项目(12AZD102)；南京航空航天大学引进人才科研启动基金项目；中央高校基本科研业务费专项资金项目.

作者简介: 闫书丽(1982−), 女, 讲师, 博士生, 从事决策分析、灰色系统理论的研究；刘思峰(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济学等研究.

间数间的比较, 很多学者直接借用此方法对区间灰数进行排序, 背离了区间灰数的本质意义; 文献 [12] 提出了区间灰数分布已知的排序方法, 而通常现实决策中灰数的分布很难确定, 这样的前提假设具有一定的局限性. 文献 [17] 提出了标准灰数、灰数的核和灰度的概念, 建立了区间灰数的运算公理、运算法则和新的灰代数系统. 本文在区间灰数信息分布缺乏的情况下, 提出了普通区间灰数与论域为 [0,1] 的标准灰数的转换规则; 以核和灰度的概念为基础, 提出了相对核和精确度的概念, 进而提出了区间灰数的排序方法.

1 基本概念和定义

灰数是信息不完全的数, 是以数字形式表现的灰元, 在应用中, 灰数是指在某一个区间或某个一般的数集内取值的不确定数. 既有下界 $\underline{a}$ 又有上界 $\bar{a}$ 的灰数称为区间灰数, 记为 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$. 在某一区间内取有限个值或可数个值的灰数称为离散灰数, 取值连续地充满某一区间的灰数称为连续灰数. 下面给出在区间内连续取值的区间灰数的有关概念.

定义 1[6] 设灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \ \bar{a}], \underline{a} < \bar{a}$, 在缺乏灰数 $\otimes$ 取值分布信息的情况下, 设 $\otimes$ 为连续灰数, 则称

$$\hat{\otimes} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a}) \tag{1}$$

为灰数 $\otimes$ 的核.

定义 2[6] 设灰数 $\otimes$ 产生的背景或论域为 $\varOmega$, $\mu(\otimes)$ 为灰数 $\otimes$ 取数域的测度, 则称

$$g^0(\otimes) = \frac{\mu(\otimes)}{\mu(\varOmega)} \tag{2}$$

为灰数 $\otimes$ 的灰度, 简记为 g°.

在实数域上给出的灰数, 通常以灰区间长度作为测度.

定义 3[6] 设 $\hat{\otimes}$ 为灰数 $\otimes$ 的核, g° 为灰数 $\otimes$ 的灰度, 称 $\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$ 为灰数的简化形式.

定义 4[6] 设 $\varOmega$ 为灰数 $\otimes$ 的论域, 当 $\mu(\varOmega) = 1$ 时, 对应的灰数称为标准灰数; 标准灰数的简化形式称为灰数的标准形式.

2 现有排序方法的问题分析

关于区间灰数的排序, 很多研究都是采用区间数的排序方法[11]和区间灰数的排序方法[12]. 下面对文献 [11] 和文献 [12] 中关于区间灰数的排序方法进行分析.

文献 [11] 中区间数比较的可能度方法:

1) 当 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \min\left\{\max\left(\frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_1 + b_2 - a_2}, 0\right), 1\right\} = 0;$$

2) 当 $a_2 < b_2 < a_1 < b_1$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \min\left\{\max\left(\frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_1 + b_2 - a_2}, 0\right), 1\right\} = 1;$$

3) 当 $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \min\left\{\max\left(\frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_1 + b_2 - a_2}, 0\right), 1\right\} = \frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_2 + b_2 - a_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{b_2 - a_1}{b_1 - a_2}} < \frac{1}{2};$$

4) 当 $a_2 < a_1 < b_2 < b_1$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \min\left\{\max\left(\frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_1 + b_2 - a_2}, 0\right), 1\right\} = \frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_2 + b_2 - a_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{b_2 - a_1}{b_1 - a_2}} > \frac{1}{2};$$

5) 当 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \min\left\{\max\left(\frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_1 + b_2 - a_2}, 0\right), 1\right\} = \frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_2 + b_2 - a_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{b_2 - a_1}{b_1 - a_2}};$$

6) 当 $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \min\left\{\max\left(\frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_1 + b_2 - a_2}, 0\right), 1\right\} = \frac{b_1 - a_2}{b_1 - a_2 + b_2 - a_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{b_2 - a_1}{b_1 - a_2}}.$$

在 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ 和 $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$ 两种情况下, $b_2 - a_1$ 与 $b_1 - a_2$ 的大小不确定, 即 $P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2)$ 与 $1/2$ 的大小不确定; 当 $b_2 - a_1 = b_1 - a_2$ 时, $P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = 1/2$, 此时 $\bar{\otimes}_1$ 与 $\bar{\otimes}_2$ 的大小无法确定.

文献 [12] 在考虑概率分布的基础上, 提出了灰数排序的可能度方法, 当灰数在区间上的取值分布未知时, 按照均匀分布来处理.

1) 当 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = 0;$$

2) 当 $a_2 < b_2 < a_1 < b_1$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = 1;$$

3) 当 $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \frac{(b_1 - a_2)^2}{2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} < \frac{1}{2};$$

4) 当 $a_2 < a_1 < b_2 < b_1$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = 1 - \frac{(b_2 - a_1)^2}{2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} > \frac{1}{2};$$

5) 当 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \frac{2b_1 - b_2 - a_2}{2(b_1 - a_1)} =$$
$$1 - \frac{(b_2 - a_1) + (a_2 - a_1)}{2(b_1 - a_1)} =$$
$$\frac{1}{2} - \frac{(b_2 - b_1) - (a_1 - a_2)}{2(b_1 - a_1)};$$

6) 当 $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$ 时, 有

$$P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = \frac{a_1 + b_1 - 2a_2}{2(b_2 - a_2)} =$$
$$1 - \frac{(b_2 - a_1) + (b_2 - b_1)}{2(b_2 - a_2)} =$$
$$\frac{1}{2} - \frac{(b_2 - b_1) - (a_1 - a_2)}{2(b_2 - a_2)}.$$

在 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ 和 $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$ 两种情况下, $b_2 - b_1$ 与 $a_1 - a_2$ 的大小不确定, 即 $P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2)$ 与 $1/2$ 的比较也不确定; 当 $b_2 - b_1 = a_1 - a_2$ 时, $P(\bar{\otimes}_1 > \bar{\otimes}_2) = 1/2$, 此时 $\bar{\otimes}_1$ 与 $\bar{\otimes}_2$ 的大小无法确定.

由以上分析可知, 当 $b_1 - b_2 = a_2 - a_1$ 时, 文献 [11] 和文献 [12] 提出的区间灰数的比较方法都存在无法区分的缺陷.

3　基于相对核和精确度的区间灰数排序方法

根据区间灰数的信息覆盖特征, 基于核和灰度的概念, 提出一种新的区间灰数的排序方法. 根据灰数灰度的思想, 将普通区间灰数转化为标准灰数后再进行排序.

3.1　普通区间灰数到标准灰数的投影法则

将标准灰数的论域限定为区间 [0,1], 下面给出普通区间灰数到标准灰数的投影法则可使一般论域 Ω 上的区间灰数投影到 [0,1] 上, 并确保信息不会丢失.

定义 5　设 $R(\otimes)$ 是论域为 $\Omega = [\underline{e}, \bar{e}]\,(-\infty \leqslant \underline{e},\ \bar{e} \leqslant \infty)$ 上的区间灰数集, $\bar{R}(\bar{\otimes})$ 是论域为 $D = [0,1]$ 上的区间灰数集, 映射 $f: R(\otimes) \to \bar{R}(\bar{\otimes})$ 将 $\otimes \in [a,b] \in R(\otimes)$ 对应为 $D = [0,1]$ 上的 $\bar{\otimes} \in \bar{R}(\bar{\otimes})$, 记

$$\bar{\otimes} = f(\otimes) \in \left[\frac{a - \underline{e}}{\mu(\Omega)}, \frac{b - \underline{e}}{\mu(\Omega)}\right] \subset [0,1] \tag{3}$$

为 $\otimes$ 的标准灰数. 映射关系如图 1 所示.

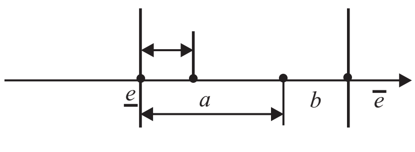

图 1　映射关系图

此映射将普通区间灰数的上下界在论域中的位置按比例表示出来, 使得生成的标准灰数上下界在 0 与 1 之间, 不仅有效地消除了量纲, 而且保留了原有的信息.

本文中的排序方法是针对论域为 $D = [0,1]$ 上的标准灰数提出的, 普通区间灰数需根据式 (3) 转换为标准灰数后再进行运算.

3.2　相对核的定义及排序分析

区间灰数间的比较由两个因素决定: 一个是区间灰数的核, 另一个是区间灰数的灰度. 核对区间灰数的排序起着核心作用, 核越大, 区间灰数的排序越靠前; 灰度越大, 区间灰数的不确定性程度越大, 对区间灰数的排序位置影响越大. 因此, 区间灰数的比较不仅要考虑核的大小, 还需考虑区间灰数的灰度所产生的影响. 下面给出标准灰数的相对核的概念.

定义 6　设某灰数 $\bar{\otimes} \in \bar{R}(\bar{\otimes}) \subset [0,1]$, $\hat{\bar{\otimes}}$ 为灰数 $\bar{\otimes}$ 的核, $g^{\circ}(\bar{\otimes})$ 为 $\bar{\otimes}$ 的灰度, 称

$$\delta(\bar{\otimes}) = \frac{\hat{\bar{\otimes}}}{1 + g^{\circ}(\bar{\otimes})} \tag{4}$$

为 $\bar{\otimes}$ 的相对核.

当 $\bar{\otimes}$ 为实数时, 相对核即实数本身.

根据标准灰数取值的上下界情况, 将标准灰数 $\bar{\otimes}_1 = [a_1, b_1] \in [0,1]$ 与 $\bar{\otimes}_2 = [a_2, b_2] \in [0,1]$ 的比较分为以下 6 种情况 (图 2) 进行分析: 其中图 2(a) 和 2(c) 为区间互不交叉的情况, 图 2(b) 和 2(d) 为区间相互交叉的情况, 图 2(e) 和 2(f) 为区间相互包含的情况.

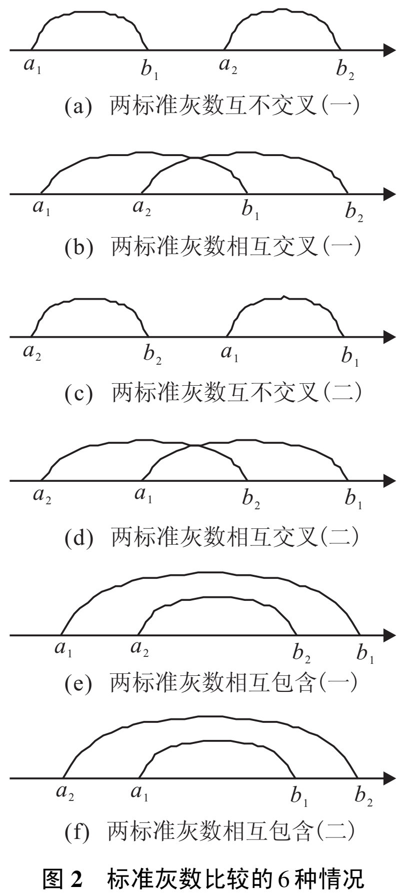

图 2　标准灰数比较的 6 种情况

直观上, 标准灰数在互不交叉情况下的大小是显然的, 而在相互交叉、相互包含的情况下具有一定的

不确定性, 不同情况下标准灰数的相对核的大小如下.

定理 1 1) 当 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2, a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ 时, 有 $\delta(\bar{\otimes}_1) < \delta(\bar{\otimes}_2)$;

2) 当 $a_2 < b_2 < a_1 < b_1, a_2 < a_1 < b_2 < b_1$ 时, 有 $\delta(\bar{\otimes}_1) > \delta(\bar{\otimes}_2)$;

3) 当 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$, 且 $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ 时, 有 $\delta(\bar{\otimes}_1) < \delta(\bar{\otimes}_2)$;

4) 当 $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$, 且 $a_1 + b_1 > a_2 + b_2$ 时, 有 $\delta(\bar{\otimes}_1) > \delta(\bar{\otimes}_2)$.

证明

$$\delta(\bar{\otimes}_1) = \frac{a_1 + b_1}{2(1 + b_1 - a_1)} = \frac{a_1 + b_1}{2(1 + b_1 + a_1 - 2a_1)},$$

$$\delta(\bar{\otimes}_2) = \frac{a_2 + b_2}{2(1 + b_2 - a_2)} = \frac{a_2 + b_2}{2(1 + b_2 + a_2 - 2a_2)}.$$

由 $\delta(\bar{\otimes}_1) > 0, \delta(\bar{\otimes}_2) > 0$, 有

$$\frac{1}{\delta(\bar{\otimes}_1)} = \frac{2(1 + b_1 + a_1 - 2a_1)}{a_1 + b_1} = 2\Big(1 + \frac{1 - 2a_1}{a_1 + b_1}\Big),$$

$$\frac{1}{\delta(\bar{\otimes}_2)} = \frac{2(1 + b_2 + a_2 - 2a_2)}{a_2 + b_2} = 2\Big(1 + \frac{1 - 2a_2}{a_2 + b_2}\Big).$$

1) 当 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2, a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ 时, $a_1 + b_1 < a_2 + b_2, 1 - 2a_1 > 1 - 2a_2$, 有 $\dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_1)} > \dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_2)}$, 即 $\delta(\bar{\otimes}_1) < \delta(\bar{\otimes}_2)$.

2) 当 $a_2 < b_2 < a_1 < b_1, a_2 < a_1 < b_2 < b_1$ 时, $a_2 + b_2 < a_1 + b_1, 1 - 2a_2 > 1 - 2a_1$, 有 $\dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_1)} < \dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_2)}$, 即 $\delta(\bar{\otimes}_1) > \delta(\bar{\otimes}_2)$.

3) 当 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ 时, $1 - 2a_1 > 1 - 2a_2, a_1 + b_1 < a_2 + b_2$, 有 $\dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_1)} > \dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_2)}$, 即 $\delta(\bar{\otimes}_1) < \delta(\bar{\otimes}_2)$.

同理, 当 $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$ 时, $1 - 2a_1 < 1 - 2a_2, a_1 + b_1 > a_2 + b_2$, 有 $\dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_1)} < \dfrac{1}{\delta(\bar{\otimes}_2)}$, 即 $\delta(\bar{\otimes}_1) > \delta(\bar{\otimes}_2)$. □

当 $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$, 且 $a_1 + b_1 > a_2 + b_2$ 时, $\delta(\bar{\otimes}_1)$ 与 $\delta(\bar{\otimes}_2)$ 的大小无法判别, 甚至出现相等的情况.

当 $a_2 < a_1 < b_1 < b_2$, 且 $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ 时, $\delta(\bar{\otimes}_1)$ 与 $\delta(\bar{\otimes}_2)$ 的大小无法判别, 也会出现相等的情况.

若按照 $\delta(\bar{\otimes}_1)$ 与 $\delta(\bar{\otimes}_2)$ 的大小对标准灰数 $\bar{\otimes}_1$ 与 $\bar{\otimes}_2$ 进行比较, 则在 $\delta(\bar{\otimes}_1) = \delta(\bar{\otimes}_2)$ 时无法区分. 下面引入另外一个比较指标: 精确度函数的概念.

定义 7 设某灰数 $\bar{\otimes} \in \bar{R}(\bar{\otimes}) \subset [0, 1]$, $g^\circ(\bar{\otimes})$ 为 $\bar{\otimes}$ 的灰度, 称

$$p(\bar{\otimes}) = 1 - g^0(\bar{\otimes}) \tag{5}$$

为 $\bar{\otimes}$ 的精确度.

标准灰数的灰度越大, 精确度越小, 真值在区间内取值的确定性程度越小; 相反, 灰度越小, 精确度越大, 真值在区间内取值的确定性程度越大. 基于此思想, 在标准灰数的相对核相等的情况下, 若定义精确度较大, 则相对核出现可能性较大的灰数为大; 若精确度较小, 则相对核出现可能性较小的灰数为小. 通过两个指标 (相对核和精确度) 对标准灰数进行比较.

基于上述分析, 提出区间灰数的一种新的排序方法.

3.3 基于相对核和精确度的灰数排序方法

定义 8 设区间灰数 $\otimes_1$、$\otimes_2 \in R(\otimes)$, 对应的标准灰数为 $\bar{\otimes}_1$ 和 $\bar{\otimes}_2$, $\delta(\bar{\otimes}_1)$、$\delta(\bar{\otimes}_2)$ 分别为 $\bar{\otimes}_1$、$\bar{\otimes}_2$ 的相对核, $p(\bar{\otimes}_1)$、$p(\bar{\otimes}_2)$ 分别为 $\bar{\otimes}_1$、$\bar{\otimes}_2$ 的精确度.

1) 若 $\delta(\bar{\otimes}_1) < \delta(\bar{\otimes}_2)$, 则 $\bar{\otimes}_1 \prec \bar{\otimes}_2$, 即 $\otimes_1 \prec \otimes_2$.

2) 若 $\delta(\bar{\otimes}_1) > \delta(\bar{\otimes}_2)$, 则 $\bar{\otimes}_1 \succ \bar{\otimes}_2$, 即 $\otimes_1 \succ \otimes_2$.

3) 若 $\delta(\bar{\otimes}_1) = \delta(\bar{\otimes}_2)$, 则:

① 若 $p(\bar{\otimes}_1) = p(\bar{\otimes}_2)$, 则 $\bar{\otimes}_1 = \bar{\otimes}_2$, 即 $\otimes_1 = \otimes_2 (\hat{\otimes}_1 = \hat{\otimes}_2, g^0(\otimes_1) = g^0(\otimes_2))$;

② 若 $p(\bar{\otimes}_1) < p(\bar{\otimes}_2)$, 则 $\bar{\otimes}_1 \prec \bar{\otimes}_2$, 即 $\otimes_1 \prec \otimes_2$;

③ 若 $p(\bar{\otimes}_1) > p(\bar{\otimes}_2)$, 则 $\bar{\otimes}_1 \succ \bar{\otimes}_2$, 即 $\otimes_1 \succ \otimes_2$.

当区间灰数退化为实数时, 转化为实数之间的大小比较.

4 算例分析

下面分别以两区间灰数在不同应用背景中的比较和两区间灰数相对核相等时的比较为例说明本文方法的有效性、优越性.

例 1 设两个区间灰数 $\otimes_1 \in [160, 200]$ 和 $\otimes_2 \in [175, 185]$, $\otimes_1$ 和 $\otimes_2$ 数值覆盖集合中信息取值分布未知, 比较 $\otimes_1$ 和 $\otimes_2$.

根据文献 [11] 和文献 [12] 中分别提出的可能度比较方法, 均求得 $P(\otimes_1 > \otimes_2) = 1/2$, 此时, 两个灰数的大小无法比较.

在实际应用中若结合两个灰数产生的背景或论域来讨论, 则会使灰数的意义更加清晰. 假设其表达的是两名中国成年健康男子的身高 (单位: cm), 论域一般取为 $[160, 200]$, 则 $\otimes_1$ 的不确定性程度很大, 提供的信息意义很小. 采用本文提出的排序方法, 首先根据两个灰数产生的论域对两个灰数进行规范化, 得到 $\bar{\otimes}_1 \in [0, 1]$, $\bar{\otimes}_2 \in [0.375, 0.625]$, 相对核分别为 $\delta(\bar{\otimes}_1) = 0.5/2 = 0.25$, $\delta(\bar{\otimes}_2) = 0.5/1.25 = 0.4$, 则有 $\delta(\bar{\otimes}_1) < \delta(\bar{\otimes}_2)$, 即 $\otimes_1 \prec \otimes_2$.

假设两个区间灰数表达的是两个人的血压 (收缩压, 单位: mmHg), 论域为 $[0, 200]$, 此时 $\otimes_1$ 的不确定性程度很小, 能够为医生提供十分有用的信息. 在此情形下采用本文排序方法, 根据论域对两个灰数进行规范化, 得到标准灰数 $\bar{\otimes}_1 \in [0.8, 1]$, $\bar{\otimes}_2 \in [0.875, 0.925]$, 其相对核分别为 $\delta(\bar{\otimes}_1) = 0.9/1.2 = 0.75$, $\delta(\bar{\otimes}_2) = 0.9/1.05 = 0.857$, 同样有 $\delta(\bar{\otimes}_1) < \delta(\bar{\otimes}_2)$, 即

$\otimes_1 \prec \otimes_2$.

在两个区间灰数的背景意义为两名中国成年健康男子的身高时, $\Delta\delta = \delta(\bar{\otimes}_2) - \delta(\bar{\otimes}_1) = 0.25$; 而背景意义为两个人的血压时, $\Delta\delta = \delta(\bar{\otimes}_2) - \delta(\bar{\otimes}_1) = 0.107$. 通过以上分析得知, 虽然根据不同的实际背景得到两个区间灰数的排序相同, 但不同背景意义下两个区间灰数间的大小区分度不同, 这在决策分析的应用中是十分重要的.

例 2 设论域 $\Omega = [0, 10]$, $\otimes_1 \in [1, 7]$, $\otimes_2 \in [2, 4]$, 比较 $\otimes_1, \otimes_2$.

首先将区间灰数转化为标准灰数 $\bar{\otimes}_1 \in [0.1, 0.7]$, $\bar{\otimes}_2 \in [0.2, 0.4]$, 求各个标准灰数的相对核 $\delta(\bar{\otimes}_1) = 0.4/(1 + 0.6) = 0.25$, $\delta(\bar{\otimes}_2) = 0.3/(1 + 0.2) = 0.25$.

此时 $\delta(\bar{\otimes}_1) = \delta(\bar{\otimes}_2)$, 可进一步比较其精确度. $p(\bar{\otimes}_1) = 1 - 0.6 = 0.4$, $p(\bar{\otimes}_2) = 1 - 0.2 = 0.8$, 即 $p(\bar{\otimes}_1) < p(\bar{\otimes}_2)$, 则有 $\otimes_1 \prec \otimes_2$.

5 结 论

本文提出了普通区间灰数转换论域为 [0, 1] 上的标准灰数的运算法则; 基于核和灰度的概念提出了相对核和精确度的概念, 根据相对核和精确度两个指标, 提出了标准灰数的排序方法; 普通区间灰数根据取值论域转化为标准灰数后进行排序. 此方法解决了以往排序方法在某些情况下无法比较的缺陷, 结合了灰数产生的背景或论域, 使得灰数的意义更加清晰. 相比较而言, 本文的排序方法不仅算法简单, 更易操作, 而且在实际应用背景中更加适用. 本文仅讨论了灰数在区间内取值分布未知的情况, 区间内取值分布已知 (区间内信息覆盖逐渐明朗化) 情况下以及离散灰数形式下的排序方法是下一步要研究的方向.

参考文献(References)

[1] Song P, Liang J Y, Qian Y H. A two-grade approach to ranking interval data[J]. Knowledge-based Systems, 2012, 27(3): 234-244.

[2] Senguta A, Pal T K. On comparing interval numers[J]. European J of Operation Research, 2000, 127(1): 28-43.

[3] Saeidifar A. Application of weighting functions to the ranking of fuzzy numbers[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(5): 2246-2258.

[4] Sevastianov P. Numerical methods for interval and fuzzy number comparison based on the probabilistic approach and Dempster-Shafer theory[J]. Information Science, 2007, 177(21): 4645-4661.

[5] Deng J L. Control problems of grey systems[J]. Systems & Control Letters, 1982, 1(5): 288-294.

[6] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 5 版. 北京: 科学出版社, 2010: 5-30.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 5-30.)

[7] Yang Y J, Robert J. Grey sets and greyness[J]. Information Science, 2012, 185(1): 249-264.

[8] Shih C S, Hsu Y T, Yeh J, et al. Grey number prediction using the grey modification model with progression technique[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(3): 1314-1321.

[9] Jiang C, Han X, Liu G R. A nonlinear interval number programming method for uncertain optimization problems[J]. European J of Operational Research, 2008, 188(1): 1-13.

[10] 方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及其 GM(1,1) 模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57-61.
(Fang Z G, Liu S F, Lu F, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1, 1) model[J]. Engineering Science, 2005, 7(2): 57-61.)

[11] Xu Z S. Dependent uncertain ordered weighted aggregation operators[J]. Information Fusion, 2008, 9(2): 310-316.

[12] 谢乃明, 刘思峰. 考虑概率分布的灰数排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(4): 169-175.
(Xie N M, Liu S F. On comparing grey numbers with their probability distribution[J]. Systems Engineering-Theory& Practice, 2009, 29(4): 169-175.)

[13] Xu Z S. On method for uncertain multiple attribute decision making problems with uncertain multiplicative preference information on alternatives[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2005, 4(1):131-139.

[14] Yue Z L. An extended TOPSIS for determining weights of decision makers with interval numbers[J]. Knowledge-based Systems, 2011, 24(1): 146-153.

[15] 王正新, 党耀国, 宋传平. 基于区间数的多目标灰色局势决策模型[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 388-392.
(Wang Z X, Dang Y G, Song C P. Multi-objective decision model of grey situation based on interval number[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 388 -392.)

[16] Tsaur R C. Decision risk analysis for an interval TOPSIS method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(8): 4295-4304.

[17] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313-316.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the “Kernel” and the degree of greyness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 313-316.)

(责任编辑: 孙艺红)