

基于极大后验估计的自适应容积卡尔曼滤波器

丁家琳, 肖建

(西南交通大学 电气工程学院, 成都 610031)

摘要: 针对标准的容积卡尔曼滤波器(CKF)设计需要精确已知噪声先验统计知识的问题, 提出一种自适应CKF算法. 该算法在滤波过程中, 利用Sage-Husa极大后验估值器对噪声的统计特性进行在线估计和修正, 有效地提高了CKF的估计精度和数值稳定性. 在某些情况下, 噪声协方差估计会出现异常现象使得滤波发散, 进而提出了相应的改进方法. 仿真结果表明了自适应CKF算法的可行性和有效性, 且明显改善标准CKF算法的滤波效果.

关键词: 容积卡尔曼滤波; 极大后验估计; 噪声统计估值器; 自适应容积卡尔曼滤波器

中图分类号: TP202

文献标志码: A

Design of adaptive cubature Kalman filter based on maximum a posteriori estimation

DING Jia-lin, XIAO Jian

(School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China. Correspondent: DING Jia-lin, E-mail: dingjialing2008@163.com)

Abstract: Focusing on the problem that the design of normal cubature Kalman filter(CKF) requires the precise statistical characters of the noise, an adaptive CKF is proposed. This algorithm can estimate and correct the statistical characters of the noise on-line by using Sage-Husa maximum a posteriori(MAP) estimator in the filtering process therefore, and then can effectively improve the estimation accuracy and stability of the CKF. Considered in some cases, the noise covariance estimation will be abnormal and makes the filtering divergent, thus the corresponding remedy is proposed. The simulation results show that the adaptive CKF algorithm is feasible and effective, and it could obviously improve the filtering effect of normal CKF algorithm.

Key words: cubature Kalman filter; maximum a posterior estimation; noise statistics estimators; adaptive cubature Kalman filter

0 引言

非线性滤波问题普遍存在于卫星导航、目标跟踪、信号处理等领域, 但对于非线性系统而言, 要得到精确的最优解较为困难, 因此人们提出了许多次优的近似非线性滤波算法^[1-3]. 其中, 应用最广泛的是扩展卡尔曼滤波(EKF)算法^[3]. 对于强非线性系统, EKF会造成较大的线性化误差, 使得滤波精度下降, 甚至滤波发散^[4]. 此外, 在对模型进行线性化处理时需要计算非线性模型的雅可比矩阵, 不仅局限了系统的模型还增加了计算难度. 采用UT变换的无迹卡尔曼滤波(UKF)算法, 以确定性采样策略逼近非线性系统状态的后验分布^[5], 其计算至少能精确到二阶泰勒精度, 因此滤波精度高于EKF算法. 但UKF算法的滤波

性能易受参数影响, 当状态维数较高时, 可能出现滤波性能不佳甚至发散的现象^[6-7]. 近期, Arasaratnam等^[7]提出了一种新的非线性高斯滤波算法——容积卡尔曼滤波(CKF)算法. CKF算法采用一组等权值的容积点逼近最优状态的后验分布, 因此其数值稳定性不受状态维数的影响. 此外, CKF算法与UKF算法有相似的计算复杂度, 但CKF算法能更精确地保存一阶矩和二阶矩信息, 所以有更高的滤波精度^[8].

标准的CKF算法设计需要精确已知系统噪声的先验统计特性^[7], 然而在实际情况中, 它们往往是未知或不准确的. 如果将不准确的噪声统计特性应用到CKF算法的设计中, 则会造成较大的状态估计误差, 甚至使得滤波发散. 为了保证滤波器的精确性和

收稿日期: 2012-11-27; 修回日期: 2013-04-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51177137, 61134001).

作者简介: 丁家琳(1986—), 女, 博士生, 从事非线性滤波算法在电机状态估计应用中的研究; 肖建(1950—), 男, 教授, 博士生导师, 从事交流传动系统、模糊控制、计算机控制等研究.

稳定性, 需要使CKF算法对噪声统计的变化具有自适应能力. 近年来, Sage-Husa的次优无偏极大后验(MAP)估值器^[9]作为一种常用和成熟的处理噪声统计特性的方法, 已得到广泛应用. 鉴于此, 本文基于MAP估值器, 提出一种自适应CKF(ACKF)算法. 该算法利用Sage-Husa的MAP估值器对未知或不准确的噪声统计进行实时估计, 并将其递推形式与CKF算法相结合, 不断对噪声统计进行修正, 以减小状态估计误差, 增强滤波器的鲁棒性. 此外, 在研究中发现, 当系统阶次较高时, 噪声统计的二阶矩估计容易失去半正定性和正定性, 使得滤波器发散. 此时, 采取相应的改进方法保证噪声协方差估计的半正定性和正定性, 从而抑制滤波器可能出现的发散现象. 不同情况下的仿真结果表明, 所提出的自适应CKF算法能明显改善标准CKF算法的滤波精度和稳定性.

1 问题描述

考虑如下非线性离散动态系统:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + v_{k-1}, \quad (1)$$

$$z_k = h(x_k, u_k) + w_k. \quad (2)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量; $u_k \in \mathbf{R}^m$ 为已知的控制输入; $z_k \in \mathbf{R}^p$ 为系统的观测向量; 函数 $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $h: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$ 分别为已知的非线性函数; $v_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $w_k \in \mathbf{R}^p$ 为带时变均值和协方差且线性无关的高斯白噪声, 且有

$$\begin{aligned} E[v_k] &= q_k, \quad \text{cov}[v_k, v_j^T] = Q_k \delta_{kj}, \\ E[w_k] &= r_k, \quad \text{cov}[w_k, w_j^T] = R_k \delta_{kj}, \\ \text{cov}[v_k, w_j^T] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

δ_{kj} 为 Kronecher- δ 函数. 初始状态 x_0 服从高斯分布 $N(\hat{x}_0, P_0)$, 且与 v_k 和 w_k 相互独立.

在标准的CKF算法中, 需假定噪声的均值为零且噪声统计特性精确已知^[7]. 但是, 在实际情况中 v_k 和 w_k 的统计特性往往是未知和时变的, 所以要解决的问题是, 根据观测信息 $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ 设计能够对噪声的统计特性进行在线估计的ACKF.

2 自适应容积卡尔曼滤波算法

为了解决上述问题, 本文采用MAP估值器^[9]在滤波过程中对噪声统计特性进行在线估计和修正, 从而实现ACKF算法.

2.1 噪声估计方法

当系统(1)和(2)中的噪声统计特性为常值时, 有 $q_k = q$, $Q_k = Q$, $r_k = r$, $R_k = R$. 对于模型中未知的噪声, 文献[9-10]由Sage-Husa极大后验估计算法得到了相应的常值噪声统计估值器

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\hat{x}_{j|j} - f(\hat{x}_{j-1|j-1})], \quad (4)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[\hat{x}_{j|j} - f(\hat{x}_{j-1|j-1}) - q][\hat{x}_{j|j} - f(\hat{x}_{j-1|j-1}) - q]^T\}, \quad (5)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [z_j - h(\hat{x}_{j|j-1})], \quad (6)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \{[z_j - h(\hat{x}_{j|j-1}) - r][z_j - h(\hat{x}_{j|j-1}) - r]^T\}. \quad (7)$$

在CKF算法中, $f(\hat{x}_{j-1|j-1})$ 表示 $j-1$ 时刻的状态估计值 $\hat{x}_{j-1|j-1}$ 由非线性函数 $f(\cdot)$ 传播后得到的后验均值, 因此可表示为^[9]

$$f(\hat{x}_{j-1|j-1}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L f(\chi_{j-1|j-1}^{(i)}, u_{j-1}). \quad (8)$$

同理, 对于 $h(\hat{x}_{j|j-1})$, 有

$$h(\hat{x}_{j|j-1}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(\chi_{j|j-1}^{(i)}, u_j). \quad (9)$$

其中: $\chi_{j-1|j-1}^{(i)}$ 为根据 $j-1$ 时刻的状态估计 $\hat{x}_{j-1|j-1}$ 和误差协方差阵 $P_{j-1|j-1}$ 得到的容积点, $\chi_{j|j-1}^{(i)}$ 为根据 j 时刻的预测状态 $\hat{x}_{j|j-1}$ 和预测误差协方差阵 $P_{j|j-1}$ 得到的容积点.

考虑到估值器的无偏性, 给出非线性系统中的次优无偏极大后验噪声统计估值器的递推形式^[11-12]

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k} \left[(k-1)\hat{q}_{k-1} + \hat{x}_{k|k} - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L f(\chi_{k-1|k-1}^{(i)}, u_{k-1}) \right], \quad (10)$$

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \left[(k-1)\hat{Q}_{k-1} + W_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T W_k^T + P_{k|k} - \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \chi_{k|k-1}^{*(i)} \chi_{k|k-1}^{*(i)T} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T \right) \right], \quad (11)$$

$$\hat{r}_k = \frac{1}{k} \left[(k-1)\hat{r}_{k-1} + z_k - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(\chi_{k|k-1}^{(i)}, u_k) \right], \quad (12)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \left[(k-1)\hat{R}_{k-1} + \varepsilon_k \varepsilon_k^T - \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Z_{k|k-1}^{(i)} Z_{k|k-1}^{(i)T} - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T \right) \right], \quad (13)$$

其中 $\varepsilon_k = z_k - \hat{z}_{k|k-1}$.

2.2 ACKF 算法

将Sage-Husa噪声统计无偏估值器嵌入到标准的CKF算法中^[7]即可得到ACKF算法, 算法具体流程如下.

Step 1: 初始化. 令

$$\hat{x}_0 = E(x_0), \quad (14)$$

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T], \quad (15)$$

$$\hat{Q}_0 = Q_0, \hat{q}_0 = q_0, \hat{R}_0 = R_0, \hat{r}_0 = r_0. \quad (16)$$

Step 2: 预测更新. 由 $k-1$ 时刻的状态估计 $\hat{x}_{k-1|k-1}$ 和误差协方差 $P_{k-1|k-1}$, 根据球面径向规则, 按下式计算容积点:

$$P_{k-1|k-1} = S_{k-1|k-1} S_{k-1|k-1}^T; \quad (17)$$

$$\chi_{k-1|k-1}^{(i)} = S_{k-1|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-1|k-1}, \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, L.$$

其中: $L = 2n$, $\xi_i = \sqrt{L/2}[1]_i$, $[1] \in \mathbf{R}^n$ 且

$$[1]_i \in \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \dots, \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \dots, \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{array} \right].$$

容积点通过非线性状态函数(1)传播为 $\chi_{k|k-1}^{*(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, L$), 再由 $\chi_{k|k-1}^{*(i)}$ 得到一步状态预测 $\hat{x}_{k|k-1}$ 和误差协方差阵 $P_{k|k-1}$, 分别为

$$\chi_{k|k-1}^{*(i)} = f(\chi_{k-1|k-1}^{(i)}, u_{k-1}) + \hat{q}_{k-1}, \quad (19)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \chi_{k|k-1}^{*(i)} =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L f(\chi_{k-1|k-1}^{(i)}, u_{k-1}) + \hat{q}_{k-1}, \quad (20)$$

$$P_{k|k-1} =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\chi_{k|k-1}^{*(i)} - \hat{x}_{k|k-1})(\chi_{k|k-1}^{*(i)} - \hat{x}_{k|k-1})^T + \hat{Q}_{k-1} =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \chi_{k|k-1}^{*(i)} \chi_{k|k-1}^{*(i)T} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T + \hat{Q}_{k-1}. \quad (21)$$

Step 3: 量测更新. 由得到的 $\hat{x}_{k|k-1}$ 和 $P_{k|k-1}$ 按照 Step 1 的计算方式得到容积点 $\chi_{k|k-1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, L$), 同理, 容积点通过非线性函数(2)传播为 $Z_{k|k-1}^{(i)}$, 再由 $Z_{k|k-1}^{(i)}$ 估计观测期望值 $\hat{z}_{k|k-1}$ 、误差协方差阵 $P_{zz,k|k-1}$ 和交叉协方差阵 $P_{xz,k|k-1}$, 分别为

$$P_{k|k-1} = S_{k|k-1} S_{k|k-1}^T, \quad (22)$$

$$\chi_{k|k-1}^{(i)} = S_{k|k-1} \xi_i + \hat{x}_{k|k-1};$$

$$Z_{k|k-1}^{(i)} = h(\chi_{k|k-1}^{(i)}, u_k) + \hat{r}_k; \quad (23)$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Z_{k|k-1}^{(i)} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(\chi_{k|k-1}^{(i)}, u_k) + \hat{r}_k; \quad (24)$$

$$P_{zz,k|k-1} =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (Z_{k|k-1}^{(i)} - \hat{z}_{k|k-1})(Z_{k|k-1}^{(i)} - \hat{z}_{k|k-1})^T + \hat{R}_k =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Z_{k|k-1}^{(i)} Z_{k|k-1}^{(i)T} - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T + \hat{R}_k; \quad (25)$$

$$P_{xz,k|k-1} =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\chi_{k|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1})(Z_{k|k-1}^{(i)} - \hat{z}_{k|k-1})^T =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \chi_{k|k-1}^{(i)} Z_{k|k-1}^{(i)T} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T. \quad (26)$$

Step 4: 状态更新. 估计卡尔曼增益, 更新状态和误差协方差阵, 有

$$W_k = P_{xz,k|k-1} (P_{zz,k|k-1})^{-1}, \quad (27)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + W_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}), \quad (28)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k P_{zz,k|k-1} W_k^T. \quad (29)$$

Step 5: 噪声估计. 根据式(10)~(13)对噪声的统计特性进行递推估计. 注意到, 由于从极大后验估计原理得到的噪声统计特性递推公式是非独立的, 一般情况下噪声 v_k 和 w_k 不能同时进行估计, 否则会导致滤波发散^[13].

2.3 ACKF 算法的稳定性分析

文献[14]在分析 UKF 算法性能时提出了 UKF 有界收敛的条件, 文献[15-16]将其定理推广到一类高斯滤波器, 包括 EKF 算法、UKF 算法、PF 算法和 CDKF 算法等. 标准的 CKF 算法与 UKF 算法和 CDKF 算法依赖的滤波框架完全相同, 因此其有界收敛定理^[14-16]也同样适用于标准的 CKF 算法^[6]. 具体内容为: 若噪声 v_k 和 w_k 是均值为零且统计特性精确已知的高斯白噪声, 则考虑非线性系统(1)、(2)和标准的 CKF 算法, 相应的状态误差协方差阵^[14,16]可以写为

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \chi_{k|k-1}^{*(i)} \chi_{k|k-1}^{*(i)T} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T + Q_{k-1} =$$

$$\bar{P}_{k|k-1} + \delta P_{k|k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + \Xi_k, \quad (30)$$

$$P_{zz,k|k-1} =$$

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Z_{k|k-1}^{(i)} Z_{k|k-1}^{(i)T} - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T + R_k =$$

$$\bar{P}_{zz,k|k-1} + \delta P_{zz,k|k-1} = G_k P_{k|k-1} G_k^T + \Xi_k, \quad (31)$$

$$P_k = (I - K_k G_k) P_{k|k-1}, \quad (32)$$

$$K_k = P_{k|k-1} G_k^T (G_k P_{k|k-1} G_k^T + \Sigma_k)^{-1}. \quad (33)$$

相应的矩阵定义为

$$A_k = \beta_k F_k, B_k = \alpha_k H_k, C_k = I - K_k \alpha_k H_k;$$

$$G_k = \begin{cases} \alpha_k H_k \gamma_k^T, & n \geq p; \\ \gamma_k^T \alpha_k H_k, & n < p. \end{cases} \quad (34)$$

$$\delta P_{k|k-1} = \bar{P}_{k|k-1} - P_{k|k-1},$$

$$\delta P_{zz,k|k-1} = \bar{P}_{zz,k|k-1} - P_{zz,k|k-1}. \quad (35)$$

$$\Xi_k = \Delta P_{k|k-1} + Q_{k-1} + \delta P_{k|k-1},$$

$$\sum_k = \Delta P_{zz,k|k-1} + R_k + \delta P_{zz,k|k-1}. \quad (36)$$

其中: $F_k = \partial f / \partial x|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}}$, $H_k = \partial h / \partial x|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}}$, α_k 、 β_k 和 γ_k 为未知的时变参数, $\bar{P}_{k|k-1}$ 和 $\bar{P}_{zz,k|k-1}$ 为真实误差协方差阵^[14,16].

引理 1^[16] 考虑非线性系统(1)、(2)和标准的 CKF 算法, 若对于每个 $k \geq 0$ 均满足以下两个假设:

1) 存在实数 a_{\min} , a_{\max} , b_{\max} , c_{\max} , g_{\min} , $g_{\max} \neq 0$, 使得如下矩阵有界:

$$a_{\min}^2 I \leq A_k A_k^T \leq a_{\max}^2 I, B_k B_k^T \leq b_{\max}^2 I,$$

$$C_k C_k^T \leq c_{\max}^2 I, g_{\min}^2 I \leq G_k G_k^T \leq g_{\max}^2 I, \quad (37)$$

$$(G_k - B_k)(G_k - B_k)^T \leq (g_{\max} - b_{\max})^2 I. \quad (38)$$

2) 存在实数 p_{\min} , p_{\max} , q_{\max} , r_{\max} , Ξ_{\min} , Ξ_{\max} , $\Sigma_{\min} > 0$, 使得如下界限成立:

$$p_{\min} I \leq P_k \leq p_{\max} I, Q_k \leq q_{\max} I,$$

$$R_k \leq r_{\max} I, \Xi_k \leq \Xi_{\max} I, \quad (39)$$

$$\Xi_k > \Xi_{\min} I, \Sigma_k > \Sigma_{\min} I. \quad (40)$$

其中

$$\Sigma_{\min} = \max(\Sigma_1, \Sigma_2),$$

$$\Sigma_1 = a_{\max}^2 (g_{\max} - b_{\max})^2 (p_{\max} + p_{\max}^2 a_{\max}^2 \Xi_{\min}^{-1}),$$

$$\Sigma_2 = b_{\max}^2 (a_{\max}^2 p_{\max} + \Xi_{\max}) - g_{\max}^2 (a_{\min}^2 p_{\min} \Xi_{\min}).$$

则存在常数使得状态估计误差均方有界, 即此时标准的 CKF 算法是稳定收敛的. 显然, 从收敛定理中可以看出, 噪声的统计特性与算法的稳定性有密切的联系.

在文献[14]中, 为了增强滤波算法的稳定性, 引入附加正定矩阵 ΔQ_{k-1} , 有

$$P_{k|k-1} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \chi_{k|k-1}^{*(i)} \chi_{k|k-1}^{*(i)T} - \hat{x}_{k|k-1} \hat{x}_{k|k-1}^T +$$

$$Q_{k-1} + \Delta Q_{k-1}, \quad (41)$$

$$\Xi_k = \Delta P_{k|k-1} + Q_{k-1} + \delta P_{k|k-1} + \Delta Q_{k-1}. \quad (42)$$

同理, 对于正定矩阵 ΔR_k 有

$$P_{zz,k|k-1} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Z_{k|k-1}^{(i)} Z_{k|k-1}^{(i)T} - \hat{z}_{k|k-1} \hat{z}_{k|k-1}^T +$$

$$R_k + \Delta R_k, \quad (43)$$

$$\Sigma_k = \Delta P_{zz,k|k-1} + R_k + \delta P_{zz,k|k-1} + \Delta R_k. \quad (44)$$

以上分析表明了 ΔQ_{k-1} 对算法的稳定性和滤波精度的影响, 即 ΔQ_{k-1} 越大, 充分条件 $\Xi_k > \Xi_{\min} I$ 越能得到保证, 进而越能增强算法的稳定性, 但会以降低算法的滤波精度为代价. 对于 ΔR_k 也可以同理推导^[16], 因此 ΔQ_{k-1} 与 ΔR_k 需要在保证算法的稳定性和滤波精度之间得到平衡.

定理 1 若引理 1 成立, 即标准的 CKF 算法在精确已知噪声统计特性时稳定收敛, 则噪声统计估值器的应用能保证 ACKF 算法的稳定收敛性, 同时提高滤波精度.

证明 首先考虑噪声均值非零且未知或不准确, 已知噪声 v_k 和 w_k 的真实统计特性为 $N(q_k, Q_k)$ 和 $N(r_k, R_k)$, 设噪声的实际应用均值为 \tilde{q}_k 和 \tilde{r}_k , 相应的噪声协方差阵为

$$\tilde{Q}_k = E[(\omega_k - \tilde{q}_k)(\omega_k - \tilde{q}_k)^T] =$$

$$E\{[\omega_k - (q_k - \Delta q_k)][\omega_k - (q_k - \Delta q_k)]^T\} =$$

$$E[(\omega_k - q_k)(\omega_k - q_k)^T] + (\Delta q_k)^2 = Q_k + (\Delta q_k)^2. \quad (45)$$

同理

$$\tilde{R}_k = E[(v_k - \tilde{r}_k)(v_k - \tilde{r}_k)^T] = R_k + (\Delta r_k)^2. \quad (46)$$

其中: $\Delta q_k = q_k - \tilde{q}_k$, $\Delta r_k = r_k - \tilde{r}_k$. 式(45)和(46)中, $(\Delta q_k)^2$ 和 $(\Delta r_k)^2$ 都是非负定的, 在精确已知噪声统计特性的标准 CKF 算法稳定收敛的情况下, $(\Delta q_k)^2$ 和 $(\Delta r_k)^2$ 不会破坏 CKF 算法的收敛性, 但会降低算法的滤波精度. 而在 ACKF 算法中, 通过采用噪声统计估值器 \hat{q}_k 和 \hat{r}_k , 逐步跟踪上真实的噪声均值 q_k 和 r_k , 使得 $\Delta q_k \rightarrow 0$, $\Delta r_k \rightarrow 0$, 那么在保证算法稳定收敛的情况下也提高了滤波精度.

由式(36)可知, Ξ_k 和 Σ_k 与噪声协方差阵有直接联系. 当噪声 v_k 和 w_k 的协方差阵未知或不准确时, 有界收敛定理中其他充分条件可以得到满足, 但会影响到条件(40). 此时, 将 ΔQ_k 或 ΔR_k 看作真实值与实际应用值的差, 即

$$\Delta Q_{k-1} = \tilde{Q}_{k-1} - Q_{k-1}, \Delta R_k = \tilde{R}_k - R_k. \quad (47)$$

因此式(36)转化为

$$\tilde{\Xi}_k = \Delta P_{k|k-1} + \tilde{Q}_{k-1} + \delta P_{k|k-1} =$$

$$\Delta P_{k|k-1} + Q_{k-1} + \delta P_{k|k-1} + \Delta Q_{k-1}, \quad (48)$$

$$\tilde{\Sigma}_k = \Delta P_{zz,k|k-1} + \tilde{R}_k + \delta P_{zz,k|k-1} =$$

$$\Delta P_{zz,k|k-1} + R_k + \delta P_{zz,k|k-1} + \Delta R_k. \quad (49)$$

若不准确的噪声协方差偏大, 即 ΔQ_k 或 ΔR_k 为正定, 则 $\tilde{\Xi}_k$, $\tilde{\Sigma}_k$ 也增大, 条件(40)仍然成立, 算法的稳定性不会受到影响. 但由式(41)~(43)的分析可知, $\tilde{\Xi}_k$ 和 $\tilde{\Sigma}_k$ 增大会降低算法的滤波精度, 若不准确的噪声协方差阵偏小, 即 ΔQ_k 或 ΔR_k 为负定, 则有可能使 $\tilde{\Xi}_k$

和 $\tilde{\Sigma}_k$ 失去正定性而不能满足式 (40), 从而导致 CKF 滤波算法失去稳定收敛性, 即滤波发散. 所以, 在标准的 CKF 算法中应用不准确的噪声统计特性可能会造成较大的估计误差, 甚至使得滤波发散.

综上, 在 ACKF 算法中, 噪声统计特性估值器 \hat{Q}_k 或 \hat{R}_k 对未知或不准确的噪声协方差阵进行实时估计和修正, 逐步跟踪上 Q_k 和 R_k 的真实值, 即 $|\Delta Q_k| \rightarrow 0$ 或 $|\Delta R_k| \rightarrow 0$. 通过这种方式, 一方面使 $\tilde{\Sigma}_k$ 和 $\tilde{\Sigma}_k$ 逐步满足式 (40), 从而保证算法稳定收敛; 另一方面, 在保证收敛的前提下随着噪声统计估计值对真实值的逼近, 也提高了算法的滤波精度.

2.4 防止 ACKF 发散的改进算法

在仿真研究中发现, 当非线性系统阶数较高时, 噪声的协方差估计 \hat{Q}_k 或 \hat{R}_k 容易失去半正定性或正定性, 使得状态的误差协方差阵失去正定性而阻止了算法继续运行, 从而导致 ACKF 算法容易出现发散现象. 因此要阻止滤波的发散, 需要在噪声统计估计的递推过程中保证 \hat{Q}_k 阵和 \hat{R}_k 阵的半正定性和正定性^[17].

由式 (11) 和 (13) 可知, 噪声协方差阵的无偏估计是由对初始的有偏估计方程进行修正得到的, 因此要保证协方差阵的半正定或正定性, 可采用噪声协方差阵初始的有偏估值器, 即

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k W_j \varepsilon_j \varepsilon_j^T W_j^T, \quad (50)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \varepsilon_j^T. \quad (51)$$

只要取初始条件 \hat{Q}_0 为半正定且 \hat{R}_0 为正定, 即可在递推过程中一直保持 \hat{Q}_k 的半正定性和 \hat{R}_k 的正定性, 其递推公式为

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{Q}_{k-1} + W_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T W_k^T], \quad (52)$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} [(k-1)\hat{R}_{k-1} + \varepsilon_k \varepsilon_k^T]. \quad (53)$$

采用有偏的噪声协方差估值器可以完全阻止滤波器的发散, 但会造成较大的估计误差, 因此在该方法的基础上稍加改进, 其计算公式如下:

$$\hat{Q}_k = \begin{cases} \hat{Q}_k, & \hat{Q}_k \text{ 为半正定;} \\ \frac{1}{k} [(k-1)\hat{Q}_{k-1} + W_k \varepsilon_k \varepsilon_k^T W_k^T], & \\ \hat{Q}_k \text{ 为非半正定.} \end{cases} \quad (54)$$

$$\hat{R}_k = \begin{cases} \hat{R}_k, & \hat{R}_k \text{ 为正定;} \\ \frac{1}{k} [(k-1)\hat{R}_{k-1} + \varepsilon_k \varepsilon_k^T], & \hat{R}_k \text{ 为非正定.} \end{cases} \quad (55)$$

具体含义是指在进行噪声方差估计时, 对 \hat{Q}_k 或 \hat{R}_k 实行监控, 当 \hat{Q}_k 为非半正定或 \hat{R}_k 为非正定时, 利用有偏估计方法中的公式进行相应的修正, 使其保持半正

定性和正定性. 显然, 定理 1 对于改进算法的稳定收敛性分析仍然有效. 本文将在后面的仿真实例中证明该方法的有效性和正确性.

3 仿真分析

为了验证 ACKF 算法的有效性, 通过实例 1 和实例 2, 在两种假设情况下 (系统量测噪声统计特性精确已知而过程噪声的统计特性未知或不准确和系统过程噪声统计特性精确已知而量测噪声统计特性未知或不准确), 采用标准的 CKF 算法和 ACKF 算法对非线性系统的状态进行估计.

实例 1 考虑如下一阶非线性离散动态系统:

$$x_k = 0.5x_{k-1} + \frac{0.2x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 8 \cos(1.2(k-1)) + v_{k-1},$$

$$z_k = \frac{x_k^2}{20} + w_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (56)$$

其中 v_k 和 w_k 为相互独立的高斯白噪声序列. 相应的常值噪声统计特性为

$$q = 1.2, \quad Q = 0.06, \quad r = 1.0, \quad R = 0.01. \quad (57)$$

假设系统状态的理论初始值为

$$x_0 = 2. \quad (58)$$

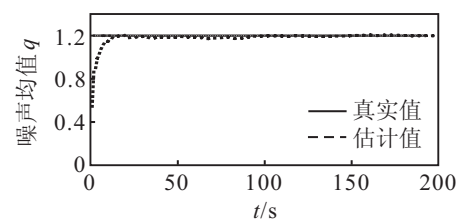
取系统状态估计和误差协方差阵的初始值为

$$\hat{x}_0 = 2.1, \quad P_0 = 0.01, \quad (59)$$

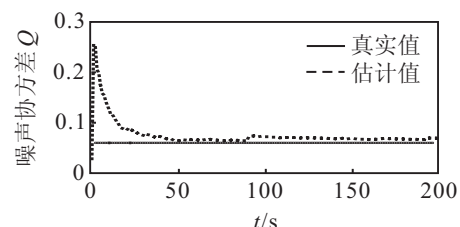
且状态初始值 \hat{x}_0 与 v_k 和 w_k 互不相关. 在仿真实验中, 取仿真步数 $N = 200$.

1) 情况 1. 假设量测噪声的先验统计特性如式 (57) 精确已知, 过程噪声的先验统计特性未知或不准确, 选取其初始均值和协方差分别为 $\hat{q}_0 = 0.4$, $\hat{Q}_0 = 0.1$.

采用本文提出的 ACKF 算法, 即式 (13)~(29) 和标准的 CKF 算法对非线性系统 (56) 进行状态估计. 由 ACKF 算法得到的噪声统计特性估计值如图 1 所示, 标准的 CKF 算法和 ACKF 算法的状态估计误差如图



(a) 过程噪声均值 q



(b) 过程噪声协方差 Q

图 1 过程噪声统计特性估计值

2所示. 由图1可见, 过程噪声统计特性(均值 q 和协方差 Q)的估计值能够在约50s处精确地跟踪上真实值, 从而证明了式(10)和(11)非线性系统过程噪声统计特性估值器的有效性. 由图2可见, 在过程噪声统计特性未知或不准确的情况下, ACKF算法的状态估计误差明显小于标准的CKF, 且误差的波动也明显较小, 表明此时的状态估计值相对稳定. 上述结果表明, 本文提出的ACKF算法是可行的, 且相对于标准的CKF算法有更高的估计精度.

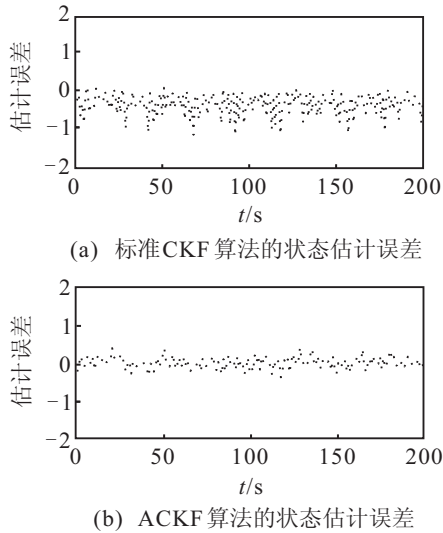


图2 两种算法下状态 x 的估计误差(过程噪声)

2) 情况2. 假设系统过程噪声的先验统计特性如式(57)精确已知, 量测噪声的先验统计特性未知或不准确. 类似于情况1, 选取其初始均值和协方差为 $\hat{r}_0 = 0.2$, $\hat{R}_0 = 0.06$. 采用ACKF算法和标准的CKF算法对非线性系统进行滤波估计, 在ACKF算法过程中得到的量测噪声均值 r 和协方差 R 的估计值如图3所示, 两种算法的状态估计误差如图4所示. 由图3可见, 由噪声统计估值器(12)和(13)给出的量测噪声均值 r 和协方差 R 能够在约10s处收敛于真实

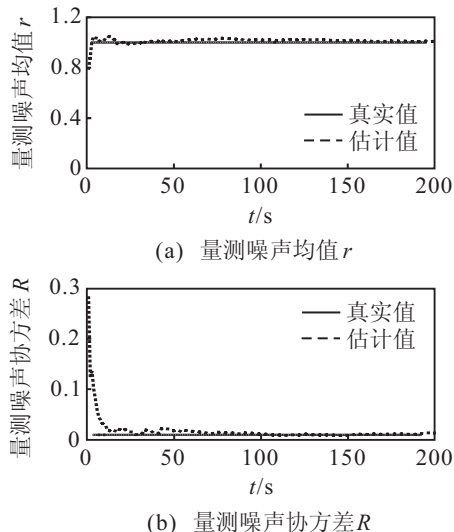


图3 量测噪声统计特性估计值

值, 验证了该估值器是可行且有效的. 由图4可见, 类似于情况1, ACKF算法能克服标准CKF算法因噪声统计特性未知或不准确导致的精度降低等问题, 同时也验证了本文提出的ACKF算法的正确性.

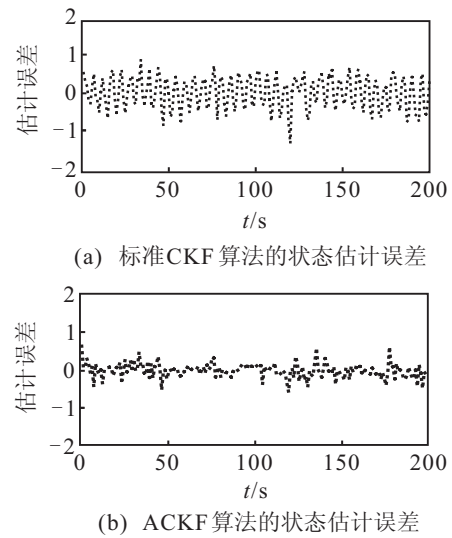


图4 两种算法下状态 x 的估计误差(量测噪声)

在仿真研究中发现, 某些情况下, 特别是在非线性系统阶数较高时, 基于式(10)~(29)的ACKF算法的系统噪声协方差估计容易失去半正定和正定性, 使得状态误差协方差阵失去正定性从而阻止了算法继续运行. 针对这一问题, 本文采用噪声统计特性的有偏估计思想提出了相应的改进方法, 使得ACKF算法具有更广的实用范围.

实例2 非线性离散动态系统模型由以下方程描述:

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos(x_{2,k-1}) \\ x_{1,k-1}x_{3,k-1} \\ 0.4x_{1,k-1}(x_{2,k-1} + x_{3,k-1}) \end{bmatrix} + v_{k-1}, \quad (60)$$

$$z_k = x_{1,k}x_{2,k} + x_{3,k} + w_k, \quad (61)$$

其中 $v_k = [v_{1,k} \ v_{2,k} \ v_{3,k}]^T$ 和 w_k 为相互独立的高斯白噪声序列, 其统计特性满足以下分布:

$$v_{i,k} \sim N(0.1, 0.01), \quad w_k \sim N(0.5, 0.01),$$

$$i = 1, 2, 3. \quad (62)$$

假设系统状态的理论初始值为

$$x_0 = [0.2 \ 0.5 \ 0.2]^T. \quad (63)$$

取系统状态估计和误差协方差阵的初始值为

$$\hat{x}_0 = [0.2 \ 0.5 \ 0.2]^T, \quad P_0 = I, \quad (64)$$

且状态初始值 \hat{x}_0 与 v_k 和 w_k 互不相关. 在仿真实验中, 取仿真步数 $N = 150$.

同实例1, 假设在两种情况下, 分别采用本文提出的ACKF算法和标准CKF算法对系统状态进行估计. 为了能更好地验证ACKF的有效性, 定义均方根误差为

$$RMSE_k = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_k^i - \hat{x}_k^i)^2 \right]^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (65)$$

其中 M 为 Monte Carlo 仿真次数. 通过均方根误差定量比较 ACKF 算法和标准 CKF 算法的性能.

1) 情况1. 若系统量测噪声统计特性如式(62)精确已知, 过程噪声统计特性未知或不准确, 则选取其初始均值和协方差为 $\hat{q}_0 = 1, \hat{Q}_0 = 0.2$.

2) 情况2. 若系统过程噪声统计特性和量测噪声的均值如式(62)精确已知, 量测噪声的协方差 R 的先验知识未知或不准确, 且在滤波过程发生变化, 即

$$R_k = \begin{cases} 0.01, & 0 < k < 40; \\ 0.03, & 40 \leq k < 70; \\ 0.02, & 70 \leq k. \end{cases}$$

则取量测噪声的初始协方差为 $\hat{R}_0 = 0.3$. 分别采用改

进的ACKF算法和标准的CKF算法对系统(60)和(61)进行状态估计, 得到状态分量 $x_{1,k}$ 的估计值如图5所示, 相应的均方根误差曲线如图6所示. 表1为两种算法作100次 Monte Carlo 仿真, 状态估计均方根误差的均值和方差统计数据, 进一步比较了两种算法的滤波性能.

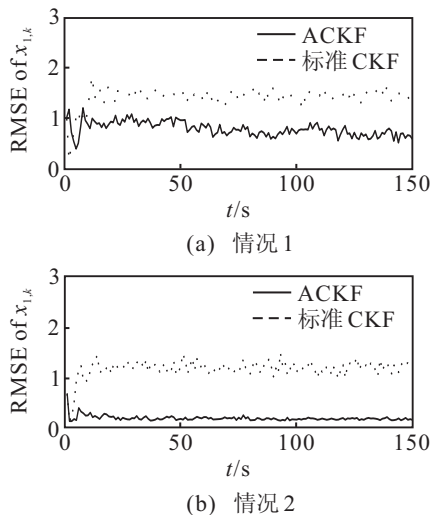


图6 两种算法下状态 $x_{1,k}$ 估计的均方根误差

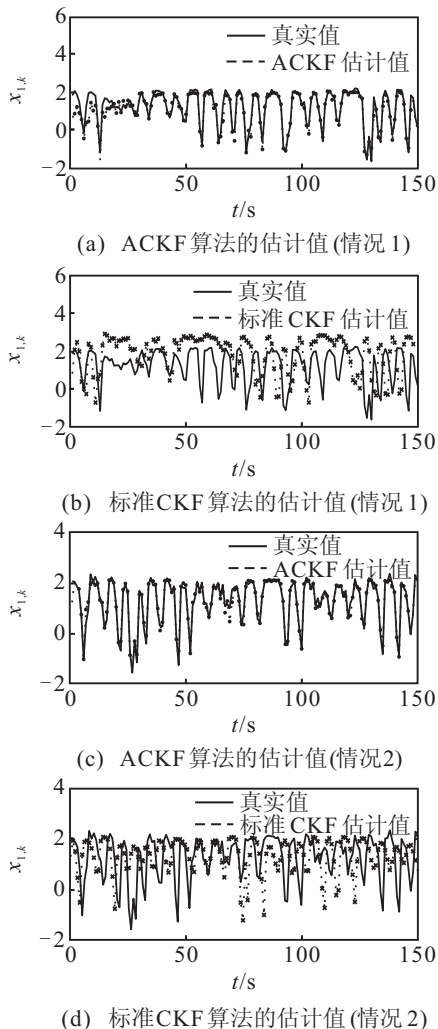


图5 两种算法下状态 $x_{1,k}$ 的估计值

表1 模糊控制规则

算法	均值			方差			
	$(x_{1,k})$	$(x_{2,k})$	$(x_{3,k})$	$(x_{1,k})$	$(x_{2,k})$	$(x_{3,k})$	
情况1	ACKF	0.8101	0.8293	0.7170	0.0163	0.1289	0.0881
	CKF	1.4130	2.4645	2.2051	0.0378	15.2079	11.2565
情况2	ACKF	0.1805	0.1412	0.1349	0.0035	0.0031	0.0021
	CKF	1.1469	2.6271	2.2717	0.0323	36.4138	26.2101

由图5可见: ACKF算法的估计效果明显优于标准CKF算法. 不准确或未知的噪声统计特性使得标准的CKF算法产生较大的估计误差; ACKF算法通过噪声估值器能逐步对噪声统计特性进行修正, 使其在约20s处便能对状态 $x_{1,k}$ 进行准确的估计. 由图5(c)可见, 在40s和70s处, 由于 R 发生了变化, 相应的状态 $x_{1,k}$ 的估计值也有较大的误差, 但随着噪声估值器对 R 的修正, 状态估计值能快速地跟踪上真实值并且稳定. 由图6可见, ACKF算法对真实状态的近似相对稳定, 误差也更小. 由表1可见, ACKF算法的状态估计均方根误差均值和方差明显比标准CKF算法小, 这表明改进算法能明显提高状态估计的精度和数值稳定性. 仿真结果与之前分析保持一致, 从而表明了基于改进方法的ACKF算法是可行而且有效的.

4 结论

在噪声统计特性未知或不准确情况下, 标准的CKF算法可能会导致较大的估计误差, 甚至使得滤波发散. 鉴于此, 本文提出了基于噪声统计特性估值器的ACKF算法. 基本思想是在进行滤波的同时, 由

Sage-Husa 噪声估值器对不准确或未知的先验噪声统计特性进行修正, 从而提高 CKF 滤波器的状态估计精度和稳定性. 考虑到在某些情况下, 特别是在非线性系统阶数较高时, 噪声的协方差估计可能会出现异常现象使得滤波发散, 进一步提出了相应的改进方法. 通过仿真实例表明, 所提出的 ACKF 算法能准确、稳定地对非线性系统状态进行估计, 且效果明显优于标准的 CKF 算法.

参考文献(References)

- [1] Alspach D L, Sorenson H W. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17(4): 439-447.
- [2] Mansouri M, Dumont B, Destain M F. Modeling and prediction of nonlinear environmental system using Bayesian methods[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2013, 92: 16-31.
- [3] Julier S J, Uhlmann J K. A new approach for filtering nonlinear system[C]. Proc of the 1995 American Control Conf. Seattle: IEEE, 1995: 1628-1632.
- [4] Athans M, Wisher R P, Bertolini A. Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noise measurements[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1968, 13(5): 504-515.
- [5] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of IEEE, 2004, 92(3): 401-422.
- [6] 王小旭, 潘泉, 黄鹤, 等. 非线性系统确定采样型滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 801-812.
(Wang X X, Pan Q, Huang H, et al. Overview of deterministic sampling filtering algorithms for nonlinear system[J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 801-812.)
- [7] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [8] Dai H D, Dai S W, Cong Y C, et al. Performance comparison of EKF/UKF/CKF for the tracking of ballistic target[J]. Telkomnika Indonesian J of Electrical Engineering, 2012, 10(7): 1692-1699.
- [9] Sage A, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics[C]. Proc of Joint Automatic Control Conf. Boulder, 1969: 760-769.
- [10] Myers K A, Tapley B D. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1976, 21(4): 520-523.
- [11] 赵琳, 王小旭, 薛红香, 等. 带噪声统计估计器的 Unscented 卡尔曼滤波器设计[J]. 控制与决策, 2009, 24(10): 1483-1488.
(Zhao L, Wang X X, Xue H X, et al. Design of Unscented Kalman filter with noise statistic estimator[J]. Control and Decision, 2009, 24(10): 1483-1488.)
- [12] 赵琳, 王小旭, 孙明, 等. 基于极大后验估计和指数加权的自适应 UKF 滤波算法[J]. 自动化学报, 2010, 36(7): 1007-1019.
(Zhao L, Wang X X, Sun M, et al. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posterior estimation and exponential weighting[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(7): 1007-1019.)
- [13] Sage A, Husa G W. Algorithms for sequential adaptive estimation of prior statistics[C]. Proc of the 8th on Adaptive Processes Decision and Control. Symposium: IEEE, 1969, 8: 61.
- [14] Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering[J]. Automatica, 2006, 42(2): 261-270.
- [15] Wu Y X, Hu D W, Hu X P. Comments on "performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering"[J]. Automatica, 2007, 43(3): 567-568.
- [16] Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Author's reply to "comments on 'performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering'"[J]. Automatica, 2007, 43(3): 569-570.
- [17] 张汉国, 张洪钺. 阻止自适应 Kalman 滤波发散的补救方法[J]. 控制与决策, 1991, 6(1): 53-56.
(Zhang H G, Zhang H Y. Rescue method for preventing the divergence of adaptive Kalman filtering[J]. Control and Decision, 1991, 6(1): 53-56.)

(责任编辑: 郑晓蕾)