

文章编号: 1001-0920(2013)11-1650-05

基于时变 Sigmoid 函数的鲁棒 PSO 算法

李军军^{a,b}, 黄有方^a, 杨斌^a, 吴华锋^b

(上海海事大学 a. 科学研究院, b. 商船学院, 上海 201306)

摘要: 在样本规模有限的情况下, 为了提高算法的鲁棒优化性能, 提出一种基于时变(随迭代次数变化) Sigmoid 函数的鲁棒粒子群优化算法. 采用拟蒙特卡罗积分方法近似估计有效目标函数, 以时变 Sigmoid 函数为基础, 设计各代各样本规模的选取概率. 迭代前期, 样本规模期望值较小, 加快了算法探索速度; 迭代后期, 样本规模期望值较大, 提高了算法的开发精度. 标准测试函数仿真结果显示, 所提出方法具有较优的鲁棒优化性能.

关键词: 粒子群优化; 鲁棒最优解; 时变; Sigmoid 函数

中图分类号: TP18

文献标志码: A

Robust particle swarm optimization algorithm based on time-varying Sigmoid function

LI Jun-jun^{a,b}, HUANG You-fang^a, YANG Bin^a, WU Hua-feng^b

(a. Scientific Research Academy, b. Merchant Marine College, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China.

Correspondent: LI Jun-jun, E-mail: jsliljj@163.com)

Abstract: To enhance the searching capability with the limited sample scale, a sort of robust particle swarm optimization algorithm based on time-varying Sigmoid function is proposed. Quasi-Monte Carlo method is used to approximate the effective objective function. The selecting probability of different sample size in different iteration is designed based on the time-varying Sigmoid function, which is changed in the iteration process. In the prophase of the algorithm, the expected value of sample size is small, and then the exploration speed is accelerated. In the anaphase of the algorithm, the expected value of sample size is large, and then the exploitation precision is improved. The simulation results of standard test functions show that this method possesses better robust optimization capability.

Key words: particle swarm optimizer; robust optimal solution; time-varying; Sigmoid function

0 引言

粒子群优化(PSO)算法由 Kennedy 等^[1-2]于 1995 年提出, 是一种新的进化计算技术. PSO 算法简单, 容易实现, 同时有深刻的智能背景, 自提出以来, 在国内外得到众多学者的广泛关注和研究^[3].

在实际环境存在噪声干扰时, 鲁棒最优解^[4-7]具有重要的现实意义, 也是进化算法(EA)、PSO 算法等智能优化方法研究的一个重要方面. 针对采用随机抽样(RS)的传统蒙特卡罗积分估计有效目标函数(EOF)^[7]精度不高的问题, 文献[7]引入 SQRT 序列等 3 种低偏差序列^[8-10], 提出使用拟蒙特卡罗(Q-MC)方法估计 EOF, 以提高近似 EOF 的精度, 进而达到提高

进化算法搜索鲁棒最优解的性能. 然而, 低偏差序列抽样与随机抽样存在同样的问题: 智能优化方法计算适应度的计算量较大, 从而增加了计算时间. 如何在保持算法搜索性能的同时减少计算量, 或在有限的样本规模情况下提高算法的搜索性能, 是值得研究的关键问题.

本文在鲁棒 PSO 算法中采用 Q-MC 积分方法, 以随迭代次数变化的 Sigmoid 函数为基础, 设计各代各样本规模的选取概率. 在算法迭代前期, 小样本规模的选取概率较大, 大样本规模的选取概率较小; 迭代后期反之. 同时, 使算法前期样本规模期望值较小, 后期样本规模期望值较大. 对样本规模期望值进行了分

收稿日期: 2012-07-09; 修回日期: 2012-10-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51279099); 上海市科学技术委员会基金项目(12ZR1412500); 上海市教委科研创新基金重点项目(13ZZ124); 上海市教育委员会和上海市教育发展基金会“曙光计划”基金项目(12SG40); 交通运输部应用基础研究项目(2013329810300).

作者简介: 李军军(1981—), 男, 讲师, 博士后, 从事智能优化方法的研究; 黄有方(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事物流管理与工程等研究.

析计算, 并通过 5 个标准测试函数实验验证了所提出鲁棒优化方法的有效性.

1 拟蒙特卡罗方法

鲁棒优化问题 (ROP) 一般描述^[7]为

$$\min f(X'); \text{ s.t. } X' = X + \delta, X', X \in \Omega. \quad (1)$$

其中: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为决策向量, Ω 为可行解空间, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ 为干扰向量, n 为决策变量的维数.

本文采用 Q-MC 方法^[7]近似估计有效目标函数 EOF, 有

$$\hat{f}^{\text{exp}}(X) = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} f(X_i). \quad (2)$$

其中: N_s 为 B_δ 中抽样的样本规模; $X_i \in B_\delta$ 为样本, $i = 1, 2, \dots, N_s$, $B_\delta = \{Z|z_i \in [x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]\}$ 为 X 的一个 δ -超邻域, δ 为邻域半径, 即干扰向量, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$; $f(X_i)$ 为样本 X_i 对应的适应度函数值. 同时参考文献 [7], 取 SQRT 序列代替传统蒙特卡罗方法中的随机抽样方法.

2 基于时变 Sigmoid 函数的鲁棒 PSO 算法

在不确定决策变量的超邻域 B_δ 中抽样时, 若样本规模 N_s 大, 则计算结果的可靠性高; 反之则可靠性差. 但若在整个 PSO 算法迭代过程中 N_s 都取得较大, 则计算量会很大. 为了降低计算量, 同时维持计算性能, 本文基于时变 (随迭代次数变化) Sigmoid 函数选取样本数.

2.1 基本思想

PSO 算法在迭代前期主要对搜索空间进行探索, 期望尽快达到较优区域; 在迭代后期主要对较优区域进行开发, 期望尽快找到最优解或近优解. 因此, 迭代前期, 样本规模取得小些可加快探索进程, 迭代后期, 样本规模应当大些, 以提高算法的开发精度, 提高计算结果可靠性.

按此思路, 本文在算法迭代前期, 令样本规模小的概率大, 规模大的概率小; 迭代后期, 令样本规模小的概率小, 规模大的概率大. 这样, 随着迭代次数的增加, 样本规模期望值逐渐增大. 另外, 在迭代前期存在部分高可靠性的解, 避免算法探索进程过于盲目; 在迭代后期保留部分不可靠解, 利于算法跳出局部极值.

考虑到 Sigmoid 函数 $g(x) = 1/[1 + \exp(-x)]$ 是单调递增的, 且在线性与非线性之间呈现良好的平滑过渡性, 本文以 Sigmoid 函数为基础, 设计各代样本规模的选取概率.

2.2 样本规模选取概率

令可能选取的最大样本规模为 N , $S_N = \{1, 2, \dots, N\}$; 最大迭代次数为 T , $S_T = \{1, 2, \dots, T\}$. 以

Sigmoid 函数为基础, 设计概率密度函数

$$\varphi(n, t) = \frac{B(t)}{1 + \exp[-A(t)(n - (N + 1)/2)]}. \quad (3)$$

其中: $n \in S_N$, $t \in S_T$, $\varphi(n, t)$ 为第 t 代样本规模取 n 的概率; $B(t) > 0$; $A(t)$ 以 Sigmoid 函数为基础设计, 有

$$A(t) = D \left(\frac{1}{1 + \exp[-C(t - (T + 1)/2)]} - 0.5 \right), \quad (4)$$

C 和 D 均为可调参数, $C > 0$, $D > 0$. 这样, 当 $1 < n_1 < n_2 < N$, $1 < t_1 < (T + 1)/2 < t_2 < T$ 时, $A(t_1) < 0$, $A(t_2) < 0$, 且有

$$\varphi(n_1, t_1) > \varphi(n_2, t_1), \quad (5)$$

$$\varphi(n_1, t_2) < \varphi(n_2, t_2). \quad (6)$$

与第 2.1 节的要求一致, 概率密度函数 (3) 是一种随迭代次数变化而变化的 Sigmoid 函数, 各迭代次数也是各迭代时刻, 因此, 本文将该样本规模设置方法称为基于时变 Sigmoid 函数的样本规模选取方法, 按此方法抽样的鲁棒 PSO 算法称为基于时变 Sigmoid 函数的鲁棒 PSO 算法. 另外, 每一代 S_N 中各元素被选为样本规模的概率之和应为 1, 即

$$\sum_{n \in S_N} \varphi(n, t) = 1. \quad (7)$$

2.3 样本规模期望值

为了了解算法的计算复杂度, 需要确定迭代计算中样本规模的期望值, 第 t 代粒子计算时的样本规模期望值为

$$E(t) = \sum_{n \in S_N} n\varphi(n, t) = \sum_{n \in S_N} \frac{nB(t)}{1 + \exp\{-A(t)[n - (N + 1)/2]\}}. \quad (8)$$

当 $N = 20$, $T = 20$, $C = 1$, $D = 1$ 时, $\varphi(n, t)$ 随 n 的变化情况如图 1 所示. 由图 1 可见, 迭代前期样本规模小的概率大, 规模大的概率小; 迭代后期样本规模小的概率小, 规模大的概率大, 与第 2.1 节的描述吻合.

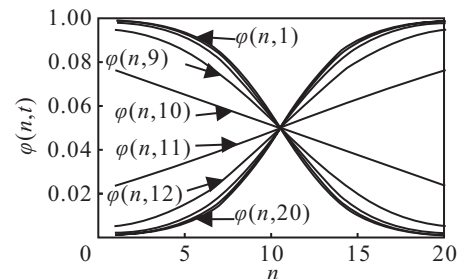


图 1 $\varphi(n, t)$ 的变化情况

$E(t)$ 随 t 变化的变化趋势如图 2 所示. 由图 2 可见, 迭代前期, 样本规模期望值较小; 随着迭代代数的增加, 样本规模期望值越来越大. 另外, 从算法第 1 ~ T 代整体看, 粒子计算时的样本规模平均期望值为

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T} \sum_{t \in S_T} \left\{ \sum_{n \in S_N} \frac{nB(t)}{1 + \exp\{-A(t)[n - (N + 1)/2]\}} \right\}. \quad (9)$$

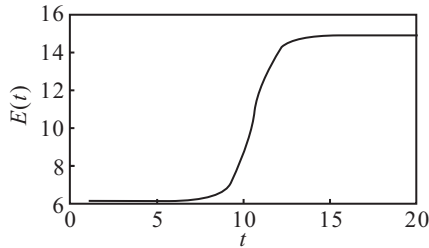


图 2 $E(t)$ 的变化情况

定理 1 基于时变 Sigmoid 函数的样本规模选取方法中 $B(t) = 2/N$, $\bar{E}(t) = (N + 1)/2$.

证明 由式 (3) 可得

$$\begin{aligned} \varphi(N + 1 - n, t) &= \frac{B(t)}{1 + \exp[-A(t)(N + 1 - n - (N + 1)/2)]} = \\ &= \frac{B(t)}{1 + \exp[-A(t)((N + 1)/2 - n)]}, \end{aligned} \quad (10)$$

因此有

$$\begin{aligned} \varphi(n, t) + \varphi(N + 1 - n, t) &= \frac{B(t)}{1 + \exp[-A(t)(n - (N + 1)/2)]} + \\ &= \frac{B(t)}{1 + \exp[-A(t)((N + 1)/2 - n)]} = B(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{n \in S_N} \varphi(n, t) = NB(t)/2. \quad (12)$$

由式 (7) 可得

$$B(t) = 2/N, \quad (13)$$

由式 (4) 可得

$$\begin{aligned} A(T + 1 - t) &= D\left(\frac{1}{1 + \exp[-C(T + 1 - t - (T + 1)/2)]} - 0.5\right) = \\ &= D\left(\frac{1}{1 + \exp[-C((T + 1)/2 - t)]} - 0.5\right), \end{aligned} \quad (14)$$

则有 $A(T + 1 - t) + A(t) = 0$, 即

$$A(T + 1 - t) = -A(t). \quad (15)$$

由式 (8) 可得

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{2}{N} \sum_{n \in S_N} \frac{n}{1 + \exp[-A(t)(n - (N + 1)/2)]} = \\ &= \frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{1 + \exp[-A(t)(1 - (N + 1)/2)]} + \right. \\ &\quad \frac{2}{1 + \exp[-A(t)(2 - (N + 1)/2)]} + \cdots + \\ &\quad \left. \frac{N}{1 + \exp[-A(t)(N - (N + 1)/2)]} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{1 + \exp[A(t)(N - 1)/2]} + \right. \\ &\quad \frac{2}{1 + \exp[A(t)(N - 3)/2]} + \\ &\quad \left. \cdots + \frac{N}{1 + \exp[A(t)(1 - N)/2]} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

相应地, 有

$$\begin{aligned} E(T + 1 - t) &= \frac{2}{N} \sum_{n \in S_N} \frac{n}{1 + \exp[-A(T + 1 - t)(n - (N + 1)/2)]}. \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (15) 可得

$$\begin{aligned} E(T + 1 - t) &= \frac{2}{N} \sum_{n \in S_N} \frac{n}{1 + \exp[A(t)(n - (N + 1)/2)]} = \\ &= \frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{1 + \exp[A(t)(1 - (N + 1)/2)]} + \right. \\ &\quad \frac{2}{1 + \exp[A(t)(2 - (N + 1)/2)]} + \\ &\quad \left. \cdots + \frac{N}{1 + \exp[A(t)(N - (N + 1)/2)]} \right\} = \\ &= \frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{1 + \exp[A(t)(1 - N)/2]} + \right. \\ &\quad \frac{2}{1 + \exp[A(t)(3 - N)/2]} + \\ &\quad \left. \cdots + \frac{2}{1 + \exp[A(t)(N - 1)/2]} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

根据式 (16) 和 (18) 可得

$$\begin{aligned} E(t) + E(T + 1 - t) &= \frac{2}{N} \left\{ \frac{N + 1}{1 + \exp[A(t)(1 - N)/2]} + \right. \\ &\quad \frac{N + 1}{1 + \exp[A(t)(3 - N)/2]} + \cdots + \\ &\quad \left. \frac{N + 1}{1 + \exp[A(t)(N - 1)/2]} \right\} = \\ &= \frac{2(N + 1)}{N} \left\{ \frac{1}{1 + \exp[A(t)(1 - N)/2]} + \right. \\ &\quad \frac{1}{1 + \exp[A(t)(3 - N)/2]} + \\ &\quad \left. \cdots + \frac{1}{1 + \exp[A(t)(N - 1)/2]} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

因为

$$\frac{1}{1 + \exp[A(t)(n - N)/2]} + \frac{1}{1 + \exp[A(t)(N - n)/2]} = 1, \quad (20)$$

有

$$E(t) + E(T + 1 - t) = \frac{2(N + 1)}{N} \cdot \frac{N}{2} = N + 1, \quad (21)$$

所以

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{T} \sum_{t \in S_T} E(t) = \frac{1}{T} (N + 1) \frac{T}{2} = \frac{N + 1}{2}. \quad (22)$$

由此定理 1 成立, 可见 $B(t)$ 和 $\bar{E}(t)$ 仅与 N 有关,

与 t, C, D 无关. □

由于式 (7) 的限制, 可先设置参数 T, N, C, D ; 然后在每一代, 由式 (4) 求出 $A(t)$, 由式 (14) 求出 $B(t)$.

3 算例分析

为了验证本文提出的鲁棒优化方法的有效性, 采用 5 个标准测试函数进行测试^[7], $RTP_1 \sim RTP_5$ 的目标函数均为

$$\min f(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

其中 5 个测试函数的 $g(x_i)$ 和 x_i 范围如下:

1) RTP_1 为

$$g(x_i) = \begin{cases} 2 - x_i, & 2 < x_i < 8; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$x_i \in [0, 10].$$

2) RTP_2 为

$$g(x_i) = \begin{cases} -0.5 \exp \frac{-0.5(x_i - 0.4)^2}{0.05^2}, & 0 \leq x_i < 0.4696, \\ -0.6 \exp \frac{-0.5(x_i - 0.5)^2}{0.02^2}, & 0.4696 \leq x_i < 0.5304, \\ -0.5 \exp \frac{-0.5(x_i - 0.6)^2}{0.05^2}, & 0.5304 \leq x_i < 1. \end{cases}$$

$$x_i \in [0, 10].$$

3) RTP_3 为

$$g(x_i) = 2 \sin[10 \exp(-0.08x_i)x_i] \exp(-0.25x_i),$$

$$x_i \in [0, 10].$$

4) RTP_4 为

$$g(x_i) = \sin \sqrt{|40x_i|} + \frac{20 - |x_i|}{20}, \quad x_i \in [-20, 20].$$

5) RTP_5 为

$$g(x_i) = \sum_{j=0}^{10} \sin(x_i) \sin^{10} \left(\frac{jx_i^2}{\pi} \right), \quad x_i \in [-1.5, 3].$$

按第 2.4 节的方法进行抽样的进化算法和粒子群优化算法分别用 REA_S 和 $RPSO_S$ 表示. 为了使计算量与传统抽样方法一致, $\bar{E}(t)$ 与文献 [7] 样本规模保持一致. 当变量维数为 2 时, $\bar{E}(t) = (N + 1)/2 = 16$, 即 $N = 31$; 当变量维数为 10 时, $\bar{E}(t) = (N + 1)/2 = 64$, 即 $N = 127$. $C = 1, D = 1$, 进化代数 T 同文献 [7]. REA_S 的其他参数同文献 [7]; $RPSO_S$ 算法中, $\omega = 0.729, c_1 = c_2 = 1.49445$, 在维数为 2 和 10 的情况下, 取 10% 的干扰. $REA_S, RPSO_S$ 和文献 [7] 方法获得的最优个体真实适应度值 f^{exp} 、最优个体评价误差 $Error(f^{exp})$ (文献 [7] 中 $Error(f^{exp})$ 为进化中各代最优个体误差的平均值, 与本文不同) 见表 1~表 4, 其中文献 [7] 方法的最优结果加粗. 表 1 和表 3 中文献 [7] 结果来自文献 [7], 表 2 和表 4 中文献 [7] 结果由本文仿真求得. 表 1~表 4 中, (2, 10%), (10, 10%) 分别表示 2 维决策变量 10% 干扰、10 维决策变量 10% 干扰.

由表 1 和表 3 可知, REA_S 和 $RPSO_S$ 的最优个体真实适应度值明显优于文献 [7] 方法, $RPSO_S$ 略优于 REA_S . 表 2 和表 4 中 REA_S 和 $RPSO_S$ 的最优个体评价误差相当, 明显小于文献 [7] 方法. 这是由于到最后时代时, 变量维数为 2, 10 的 REA_S 和 $RPSO_S$ 抽样规模期望值分别为 23.32, 95.65 (由式 (7) 计算得到), 明显大于文献 [7] 的固定抽样规模 16 和 64. 可见, 基于时变 Sigmoid 函数的鲁棒优化方法是一种较优的方法, 而粒子群算法略优于进化算法.

表 1 (2, 10%) 时的 f^{exp} 情况

函数	C-MC		Q-MC		REA_S	RPSO_S
	RS	SQRT	SOBOL	Korobov Lattice		
RTP ₁	-0.774 57	-0.815 77	-0.789 42	-0.789 99	-0.820 68	-0.826 97
RTP ₂	-0.391 74	-0.393 48	-0.394 08	-0.392 74	-0.397 65	-0.40087
RTP ₃	-0.055 03	-0.125 47	-0.158 66	-0.149 08	-0.189 04	-0.195 80
RTP ₄	-0.958 27	-1.006 56	-1.015 35	-1.012 12	-1.053 06	-1.06530
RTP ₅	-2.444 62	-2.490 77	-2.483 47	-2.482 39	-2.509 89	-2.515 75

表 2 (2, 10%) 时的 $Error(f^{exp})$ 情况

函数	C-MC		Q-MC		REA_S	RPSO_S
	RS	SQRT	SOBOL	Korobov Lattice		
RTP ₁	0.093 196	0.027 409	0.040 099	0.048 297	0.020 439	0.014 807
RTP ₂	0.046 084	0.012 410	0.003 171	0.002 194	0.001 108	0.001 624
RTP ₃	0.415 848	0.044 059	0.035 286	0.034 786	0.019 776	0.027 657
RTP ₄	0.146 846	0.071 683	0.031 612	0.030 960	0.018 683	0.015 996
RTP ₅	0.118 984	0.033 825	0.016 716	0.017 371	0.009 619	0.010 161

表3 (10, 10%)时的 f^{exp} 情况

函数	C-MC	Q-MC			REA.S	RPSO.S
	RS	SQRT	SOBOL	Korobov Lattice		
RTP ₁	-0.818 86	-0.823 74	-0.825 33	-0.823 78	-0.831 62	-0.837 13
RTP ₂	-0.392 24	-0.392 81	-0.392 75	-0.393 39	-0.397 74	-0.401 06
RTP ₃	-0.120 87	-0.143 72	-0.143 61	-0.140 61	-0.174 97	-0.195 15
RTP ₄	-0.989 32	-1.015 39	-1.020 62	-1.023 34	-1.059 55	-1.069 27
RTP ₅	-2.472 85	-2.482 88	-2.489 41	-2.488 81	-2.507 75	-2.514 60

表4 (10, 10%)时的 Error(f^{exp}) 情况

函数	C-MC	Q-MC			REA.S	RPSO.S
	RS	SQRT	SOBOL	Korobov Lattice		
RTP ₁	0.005 480	0.002 907	0.001 797	0.002 114	0.001 242	0.001 073
RTP ₂	0.017 212	0.002 389	0.000 657	0.000 905	0.000 488	0.000 344
RTP ₃	0.059 740	0.008 931	0.003 009	0.004 847	0.002 370	0.001 861
RTP ₄	0.113 489	0.015 568	0.005 725	0.006 957	0.003 316	0.003 803
RTP ₅	0.041 303	0.007 291	0.003 352	0.003 771	0.003 208	0.002 523

4 结 论

本文针对智能优化方法计算鲁棒最优解存在适应度计算量较大的问题, 基于时变 Sigmoid 函数, 提出一种样本规模选取方法. 该方法能在有限的样本规模情况下, 利用使样本规模期望值在算法前期小、算法后期大的方法, 提高了智能优化方法的搜索性能. 5 个 ROP 测试函数实验表明, 所提出方法能有效提高智能优化方法在求解鲁棒最优解时的搜索性能.

参考文献(References)

- [1] Eberhart R C, Kennedy J. Particles swarm optimization[C]. IEEE Int Conf on Neural Network. Perth: IEEE Press, 1995: 1942-1948.
- [2] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particles swarm theory[C]. Proc of the 6th Int Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya: IEEE Press, 1995: 39-43.
- [3] 谢晓锋, 张文俊, 杨之廉. 微粒群算法综述[J]. 控制与决策, 2003, 18(2): 129-134.
(Xie X F, Zhang W J, Yang Z L. Overview of particle swarm optimization[J]. Control and Decision, 2003, 18(2): 129-134.)
- [4] Yaochu Jin, Jürgen Branke. Evolutionary optimization in uncertain environments-a survey[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2005, 9(3): 303-317.
- [5] Luan Feng, Choi Jong-ho, Jung Hyun-kyo. A particle swarm optimization algorithm with novel expected fitness evaluation for robust optimization problems[J]. IEEE Trans on Magnetics, 2012, 48(2): 331-334.
- [6] Ho S. L., Yang Shi-you. A fast robust optimization methodology based on polynomial chaos and evolutionary algorithm for inverse problems[J]. IEEE Trans on Magnetics, 2012, 48(2): 259-262.
- [7] 朱云飞, 罗彪, 郑金华, 等. 基于拟蒙特卡罗方法的进化算法搜索鲁棒最优解的性能提高研究[J]. 模式识别与人工智能, 2011, 24(2): 201-209.
(Zhu Y F, Luo B, Zheng J H, et al. Research on increasing the performance of evolutionary algorithm in searching robust optimal solutions based on quasi-monte carlo method[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2011, 24(2): 201-209.)
- [8] Fox B L. Algorithm 659: Implementing sobol's quasirandom sequence generator[J]. ACM Trans on Mathematical Software, 1988, 14(1): 88-100.
- [9] Hardeep S Gill, Christiane Lemieux. Searching for extensible Korobov rules[J]. J of Complexity, 2007, 23(4-6): 603-613.
- [10] Hlawka E. Funktionen von beschränkter variation in dertheorie dergleichverteilung[J]. Annalidi Matematica Puraed Applicata, 1961, 54(4): 325-333.