文章编号: 1001-0920 (2013) 10-1547-03

基于 MINC 方法的脉冲随机混合系统镇定与鲁棒稳定性分析

李洪奎, 武玉强
(曲阜师范大学 自动化研究所，曲阜 273165)

摘 要: 直接利用 fmincon 函数 (MINC) 研究一类在切换时刻具有脉冲行为的 Markov 切换随机系统. 首先给出系统依概率稳定的充分条件, 设计了系统的鲁棒镇定控制器, 并进行了稳定性分析; 然后给出了相应的状态反馈增益矩阵和脉冲增益矩阵的求解方法; 最后, 通过一个数值算例表明所设计方法的有效性. 通过研究可知, 许多控制系统的分析和综合问题均可以转化为 MINC 进行求解.

关键词: 脉冲系统；MINC 方法；Markov 切换；依概率稳定；鲁棒稳定性
中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Stabilization and robust stability for impulsive stochastic systems based on MINC

LI Hong-kui, *WU Yu-qiang*
(Institute of Automation，Qufu Normal University，Qufu 273165，China．Correspondent：LI Hong-kui，E-mail: lhk8068@163.com)

Abstract: The paper studies a class of Markovian switching stochastic systems which exist impulses at the switching instants using the fmincon function(MINC). Firstly, sufficient conditions for stability in probability of the overall system are given. Furthermore, the stability and robust stabilizing controller are analyzed and designed, and the state feedback gain matrix and the impulsive control gain matrix of the system are obtained. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the proposed approach. Through this study, it can be shown that many analysis and synthesis problems of the control systems can be dealt with by using MINC.

Key words: impulsive system；fmincon function；Markovian switching；stable in probability；robust stability

0 引 言

脉冲系统在实际应用中趋于广泛, 特别是在研究或数值模拟生物和物理现象时尤为突出, 随机系统在控制和通信科学等领域也广泛应用. 若将脉冲作为扰动, 则脉冲随机微分系统可以看作是一类复杂随机微分系统; 若将随机噪声作为扰动, 则脉冲随机微分系统可以看作是带有随机噪声干扰的脉冲微分系统, 所以脉冲随机微分系统的研究与脉冲微分系统和随机微分系统的研究有紧密的联系. 随机现象与脉冲现象和时滞作为自然界中经常出现的现象会在同一个系统中共存, 形成脉冲随机系统. 因此, 对脉冲随机系统的研究已成为控制领域的一个热点, 对其稳定性分析也一直是学者们关注的焦点. 近年来, 脉冲随机系统稳定性的研究取得了突破性的进展, 并取得了一系列丰富的结果[1-12]. Markov 切换随机系统是由若干个具有 Wiener 过程扰动的子系统和一个由 Markov 过程决策的切换律组成的一类特殊随机系统, 对于 Markov 切换系统的研究几乎涉及了控制领域的各个方面[13]. Markov 切换系统的理论体系在不断走向完善和成熟的同时也不断得到延伸和拓展, 很多新的问题亟待解决. Lyapunov 函数方法是目前研究 Markov 切换系统的主流方法. Feng 等[14]采用 Lyapunov 函数方法针对 Markov 切换系统讨论了系统均方指数稳定的充分必要条件, 研究了 Markov 切换系统随机渐近稳定性、均方指数稳定性和随机稳定三者之间的关系, 指出三者是等价的, 且系统的均方渐近稳定、均方指数稳定的随机稳定条件均包含该系统依概率稳定. 利用基于 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式 (LMI) 的方法,

收稿日期: 2012-06-26；**修回日期:** 2013-01-10.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60974127, 61273091, 61273123)；山东省自然科学青年基金项目(ZR2010EQ014).
作者简介: 李洪奎(1978−), 男, 博士生, 从事非线性系统控制的研究；武玉强(1962−), 男, 教授, 博士生导师, 从事变结构控制、非线性系统控制等研究.

Yue 等[15]考察了一类 Markov 切换线性随机时滞系统的鲁棒稳定性问题.

文献 [13] 运用 LMI 法系统地研究了一类在切换时刻具有脉冲行为的 Markov 切换随机系统的稳定性和鲁棒稳定性问题, 但是 LMI 方法要求一般的正矩阵. 根据二次型与标准二次型的关系和正定矩阵的定义、性质, 本文提出基于 Matlab 优化工具箱中 fmincon 函数的 MINC 方法, 解决了在切换时刻具有脉冲行为的 Markov 切换随机系统的稳定性和鲁棒稳定性问题. 首先给出了系统依概率稳定的充分条件; 然后研究系统的镇定问题和鲁棒稳定性问题, 同时给出了相应的状态反馈增益矩阵和脉冲增益矩阵的求解方法. 经典的 LMI 算法只能应用于线性矩阵, MINC 方法也可以应用于非线性矩阵, 并且能够直接求出最优可行解, 计算量小, 计算简单. 通过本文研究可知, 许多控制系统的分析和综合问题都可以转化为 MINC 方法进行求解.

本文符号定义如下: A^{T} 为矩阵 A 的转置矩阵, $A>0(A<0)$ 为正定 (负定) 矩阵; $\lambda(\cdot)$ 和 $\overline{\lambda}(\cdot)$ 分别为矩阵 $(\cdot)$ 的特征值和最大特征值; $\sigma(\cdot)$ 和 $\overline{\sigma}(\cdot)$ 分别为矩阵 $(\cdot)$ 的奇异值和最大奇异值; $\boldsymbol{R}$ 为实数集; $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维欧氏空间; $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 为所有 $n\times m$ 实矩阵组成的集合; $\mathrm{diag}(\cdot)$ 为对角阵; $\boldsymbol{W}^{n\times m}=\{M\in\boldsymbol{R}^{n\times m}\mid M$ 的所有奇异值均小于 $1\}$; $C^{2,1}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}_+\times S;\boldsymbol{R}_+)$ 为所有定义在 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}_+\times S$ 上关于 x 连续二阶可微、关于 t 一阶可微的所有非负函数 $V(x(t),i)$ 的全体; $(\varOmega,\boldsymbol{F},\{F_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 为带 σ 流的完备概率空间.

1 准备知识

在完备概率空间 $(\varOmega,\boldsymbol{F},\{F_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 中定义取值于有限状态空间 $\overline{N}=\{1,2,\cdots,N\}$ 的连续时间 Markov 过程 $\{r(t),t\geqslant 0\}$, 其转移概率为

$$P\{r(t+\Delta t)=j|r(t)=i\}=\begin{cases}\gamma_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\ i\neq j;\\ 1+\gamma_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\ i=j.\end{cases}$$

其中: $\Delta t>0$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}o(\Delta t)/\Delta t=0$; γ_{ij} 为从状态 i 转移到状态 j 的转移速率, 且满足

$$\gamma_{ij}\geqslant 0,\ i\neq j,\ \gamma_{ii}=-\sum_{i\neq j}\gamma_{ij}.$$

考虑下列具有随机扰动的 Ito 型 Markov 切换系统

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x(t)=[A_{r(t)}x(t)+B_{r(t)}u(t)]\mathrm{d}t+C_{r(t)}x(t)\mathrm{d}\omega(t),\\&\qquad\qquad r(t^+)=r(t);\\&x(t^+)=E_{r^+(t),r(t)}x(t^-)+F_{r^+(t),r(t)}u(t^-),\ r(t^+)\neq r(t);\\&x(t_0^+)=x_0.\end{aligned}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 为状态向量, $u(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 为可控输入, $x(t^+):=\lim\limits_{h\to 0^+}x(t+h)$, $x(t^-):=\lim\limits_{h\to 0^+}x(t-h)$, $x(t^-)=x(t)$, $\omega(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 为定义在完备概率空间 $(\varOmega,\boldsymbol{F},\{F_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 上的 m 维标准 Wiener 过程, $r(t)=i$ 表示子系统 $\{A_i,B_i,C_i\}$ 被激活, $r(t)=i$, $r(t^+)=j$ 表示在时刻 t 系统从第 i 个子系统切换到第 j 个子系统. 在切换时刻 t, 存在式 (1) 中的第 2 个方程所描述的脉冲, 当 $E_{i,j}=I_n$, $F_{i,i}=0(i\in 1,2,\cdots,N)$ 时表示在同一个子系统之间切换是平稳的, 没有出现脉冲[13]. 当 $r(t)=i$, $r(t^+)=j$ 时, $A_{r(t)}$, $B_{r(t)}$, $C_{r(t)}$, $E_{r(t^+),r(t)}$, $F_{r(t^+),r(t)}$ 分别记为定常矩阵 $A_i,B_i,C_i,E_{j,i},F_{j,i}$.

系统 (1) 相应的自治系统、不确定系统和受控的不确定系统分别为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=A_i(t)\mathrm{d}t+C_ix(t)\mathrm{d}\omega(t),\ r(t^+)=r(t);\\ x(t^+)=E_{j,i}x(t^-),\ r(t^+)\neq r(t);\\ x(t_0^+)=x_0.\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=(A_i+\Delta A_i)x(t)\mathrm{d}t+C_ix(t)\mathrm{d}\omega(t),\\ \qquad r(t^+)=r(t);\\ x(t^+)=(E_{j,i}+\Delta E_{j,i})x(t^-),\ r(t^+)\neq r(t);\\ x(t_0^+)=x_0.\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=[(A_i+\Delta A_i)x(t)+B_iu(t)]\mathrm{d}t+\\ \qquad C_ix(t)\mathrm{d}\omega(t),\ r(t^+)=r(t);\\ x(t^+)=(E_{j,i}+\Delta E_{j,i})x(t^-)+F_{j,i}u(t^-),\\ \qquad r(t^+)\neq r(t);\\ x(t_0^+)=x_0.\end{cases}\tag{4}$$

其中不确定参数阵结构如下:

$$[\Delta A_i,\Delta E_{j,i}]=H_iG_i[D_i,W_{j,i}],\tag{5}$$

$H_i,D_i,W_{j,i}$ 为具有适当维数的已知定常矩阵, G_i 为满足 $G_i^{\mathrm{T}}G_i\leqslant I$ 的未知矩阵, $i,j=1,2,\cdots,N$.

注 1 总是假设系统 (1) 的解存在, $w(t)$ 与 $r(t)$ 互相独立, 保证系统在每个有界时间区间内切换有限次. 为了研究方便, 本文假设 $m=n$. 当 $m\neq n$ 时, 作分块研究即可.

为了设计系统的控制器, 给出如下定义和引理.

定义 1[16] 称系统 (2) 的解是依概率稳定的, 如果对于 $\forall s\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, 有 $\lim\limits_{x_0\to 0}P\{\sup\limits_{t>s}\|x^{s,x_0}(t)\|>\varepsilon\}=0$. $x^{s,x_0}(t)$ 为在时刻 s 从点 x_0 出发的系统状态的样本路径.

根据文献 [17] 中的定理 2 可以得到如下引理 1.

引理 1 任意实对称矩阵

$$S=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}\\S_{12}^{\mathrm{T}}&S_{22}&0\\S_{13}^{\mathrm{T}}&0&S_{33}\end{bmatrix}<0,$$

当且仅当

1) $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22} \end{bmatrix} < 0,\ S_{22} < 0,\ S_{33} < 0;$

2) $(-S_{11} + S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}})^{-1/2}S_{13}S_{33}^{-1/2} \in \boldsymbol{W}^{r\times(n-r-s)}$.

引理 2[18]　对于任意适当维数矩阵 X, Y, 有

$$XY^{\mathrm{T}} + YX^{\mathrm{T}} \leqslant \chi XX^{\mathrm{T}} + \chi^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y,\ \forall \chi > 0.$$

对于系统 (2), 选择具有下列形式的 Lyapunov 函数:

$$V(x(t), i) = x^{\mathrm{T}}(t)P_i x(t). \tag{6}$$

其中: $V(x(t), i) \in C^{2,1}(R^n \times R_+ \times S; R_+)$; $P_i(1 \leqslant i \leqslant N)$ 为正定阵. 且有

$$LV(x(t), i) :=$$

$$V_x(x(t), i)(A_i x(t)) + \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}V_x(x(t), j) +$$

$$\mathrm{tr}((C_i x(t))^{\mathrm{T}}V_{xx}(x(t), i)C_i x(t))/2,$$

$$V_x(x(t), i) =$$

$$\Big(\frac{\partial V(x(t), i)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x(t), i)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V(x(t), i)}{\partial x_n}\Big),$$

$$V_{xx}(x(t), i) = \Big(\frac{\partial^2 V(x(t), i)}{\partial x_l \partial x_k}\Big)_{n\times n},$$

$$l, k = 1, 2, \cdots, n.$$

引理 3[13]　系统 (2) 依概率稳定, 若存在切换型 Lyapunov 函数 (6) 满足:

1) $LV(x(t), i) \leqslant 0,\ r(t^+) = r(t)$;

2) $EV(x(t^+), j) \leqslant EV(x(t), i),\ r(t^+) \neq r(t)$.

2　主要结论

2.1　稳定性分析

首先给出自治系统 (2) 依概率稳定的充分条件.

定理 1　考虑系统 (2), 如果存在正数 $\lambda_{i1} \geqslant \lambda_{i2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{in} > 0$, $P_i = \mathrm{diag}(\lambda_{iw})$, $w = 1, 2, \cdots, n$, $i, j = 1, 2, \cdots, N$, 使得

$$\frac{\mathrm{tr}\varTheta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varTheta_i^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varTheta_i|^2\Big)} > 1, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{tr}\varXi_{ij}}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varXi_{ij}^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varXi_{ij}|^2\Big)} > 1 \tag{8}$$

成立, 则系统 (2) 依概率稳定. 其中

$$\varTheta_i = -A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iA_i - \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i + I,$$

$$\varXi_{ij} = -P_j - I + P_jE_{j,i}^{\mathrm{T}}P_iE_{j,i}P_j.$$

证明　对于系统 (2), 选择 Lyapunov 函数 (6), 记

$$W_i = \varTheta_i^{-\frac{1}{2}},$$

$$\varTheta_i = -A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iA_i - \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i + I.$$

如果式 (7) 成立, 则有

$$\overline{\sigma}^2(W_i) = \overline{\lambda}(W_i^{\mathrm{T}}W_i) = \overline{\lambda}(\varTheta_i^{-1}) \leqslant$$

$$\Big(\frac{\mathrm{tr}\varTheta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varTheta_i^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varTheta_i|^2\Big)}\Big)^{-1} < 1.$$

由引理 1 可知

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - I & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

由 Schur 补引理可知

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j & C_i^{\mathrm{T}} \\ C_i & -P_i^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

再次运用 Schur 补引理, 得到

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j + C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i < 0.$$

如果式 (8) 成立, 则类似地有 $E_{j,i}^{\mathrm{T}}P_jE_{j,i} - P_i \leqslant 0$, 因此, 当 $r(t^+) = r(t)$ 时, 有

$$LV(x(t), i) =$$

$$x^{\mathrm{T}}(t)\Big(A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j + C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i\Big)x(t) < 0;$$

当 $r(t^+) \neq r(t)$ 时, 有

$$EV(x(t^+), i) - EV(x(t), i) =$$

$$E\{x^{\mathrm{T}}(t)(E_{j,i}^{\mathrm{T}}P_jE_{j,i} - P_i)x(t)\} \leqslant 0.$$

根据引理 3 可知系统 (2) 依概率稳定. □

定理 2　考虑系统 (3), 如果存在正数 μ_j, υ_j, $\lambda_{i1} \geqslant \lambda_{i2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{in} > 0$, $P_i = \mathrm{diag}(\lambda_{iw})$, $w = 1, 2, \cdots, n$, $i, j = 1, 2, \cdots, N$, 使得

$$\frac{\mathrm{tr}\varTheta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varTheta_i^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varTheta_i|^2\Big)} > 1, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{tr}\varXi_{ij}}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varXi_{ij}^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varXi_{ij}|^2\Big)} > 1 \tag{10}$$

成立, 则系统 (3) 依概率稳定. 其中

$$\varTheta_i = -A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iA_i - \mu_i(P_iH_iH_i^{\mathrm{T}}P_i + D_i^{\mathrm{T}}D_i) -$$

$$\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i + I,$$

$$\varXi_{ij} = -P_j - I + (P_jE_{j,i}^{\mathrm{T}} + \upsilon_i(P_iH_iH_i^{\mathrm{T}}P_i + D_i^{\mathrm{T}}D_i))\times$$

$$P_i(\upsilon_i(P_iH_i^{\mathrm{T}}H_iP_i + D_iD_i^{\mathrm{T}}) + E_{j,i}P_j).$$

证明　对于系统 (3), 选择 Lyapunov 函数, 令

$$a_i = A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - I,$$

$$\widehat{a}_i = (A_i + \Delta A_i)^{\mathrm{T}}P_i + P_i(A_i + \Delta A_i) + \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - I,$$

$$M_i = \begin{bmatrix} a_i & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

由引理 2 可知

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_i & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix} =$$

$$M_i + \begin{bmatrix} P_iH_iG_iD_i + (P_iH_iG_iD_i)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$M_i + \begin{bmatrix} P_iH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\Big(\begin{bmatrix} P_iH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big)^{\mathrm{T}} \leqslant$$

$$M_i + \mu_i \begin{bmatrix} P_iH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_iH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} +$$

$$\mu_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} G_i^{\mathrm{T}} G_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leqslant$$

$$M_i + \mu_i \begin{bmatrix} P_iH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_iH_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} +$$

$$\mu_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_i + \mu_i(P_iH_iH_i^{\mathrm{T}}P_i + D_i^{\mathrm{T}}D_i) & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}. \tag{11}$$

记

$$W_i = \varTheta_i^{-\frac{1}{2}},$$

$$\varTheta_i = -A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iA_i - \mu_i(P_iH_iH_i^{\mathrm{T}}P_i + D_i^{\mathrm{T}}D_i) - \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i + I.$$

如果式 (9) 成立, 则有

$$\overline{\sigma}^2(W_i) = \overline{\lambda}(W_i^{\mathrm{T}}W_i) = \overline{\lambda}(\varTheta_i^{-1}) \leqslant$$

$$\Big(\frac{\mathrm{tr}\varTheta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varTheta_i^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varTheta_i|^2\Big)}\Big)^{-1} < 1.$$

由引理 1 和式 (11) 可知

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_i - I & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix} < 0.$$

与定理 1 的证明类似, 如果式 (9) 和 (10) 成立, 则定理 2 成立. □

下面考虑系统 (1) 的镇定问题. 仿照定理 1 的证明过程易得到如下结论.

定理 3 考虑系统 (1), 如果存在正数 ρ, δ_j, $\lambda_{i1} \geqslant \lambda_{i2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{in} > 0$, $P_i = \mathrm{diag}(\lambda_{iw})$, $w = 1, 2, \cdots, n$, $i, j = 1, 2, \cdots, N$, 使得

$$\frac{\mathrm{tr}\varTheta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varTheta_i^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varTheta_i|^2\Big)} > 1, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{tr}\varXi_{ij}}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varXi_{ij}^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varXi_{ij}|^2\Big)} > 1 \tag{13}$$

成立, 则存在切换反馈控制器

$$\begin{cases} u(t) = K_ix(t),\ r(t^+) = r(t); \\ u(t^-) = L_{ji}x(t^-),\ r(t^+) \neq r(t) \end{cases}$$

确保闭环系统依概率稳定, 且相应的切换反馈增益矩阵与脉冲控制增益分别为

$$K_i = \rho B_i^{\mathrm{T}}P_i,\ L_j = \delta_jP_j^{-1},$$

$$\delta_j > 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, N.$$

其中

$$\varTheta_i = -A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iA_i - 2\rho P_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i - C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i - \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j + I,$$

$$\varXi_{ij} = -P_j - I + (P_jE_{j,i}^{\mathrm{T}} + \delta_jF_{j,i}^{\mathrm{T}})P_i(\delta_jF_{j,i} + E_{j,i}P_j).$$

2.2 鲁棒稳定性分析

定理 4 考虑系统 (4), 如果存在正数 $\rho, \delta_j, \mu_j, \upsilon_j$, $\lambda_{i1} \geqslant \lambda_{i2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{in} > 0$, $P_i = \mathrm{diag}(\lambda_{iw})$, $w = 1, 2, \cdots, n$, $i, j = 1, 2, \cdots, N$, 使得

$$\frac{\mathrm{tr}\varTheta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varTheta_i^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varTheta_i|^2\Big)} > 1, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{tr}\varXi_{ij}}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{tr}\varXi_{ij}^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}\varXi_{ij}|^2\Big)} > 1 \tag{15}$$

成立, 则存在切换反馈控制器

$$\begin{cases} u(t) = K_ix(t),\ r(t^+) = r(t); \\ u(t^-) = L_{ji}x(t^-),\ r(t^+) \neq r(t) \end{cases}$$

确保闭环系统依概率稳定, 且相应的切换反馈增益矩阵与脉冲控制增益分别为

$$K_i = \rho B_i^{\mathrm{T}}P_i,\ L_j = \delta_jP_j^{-1}.$$

其中

$$\varTheta_i = -A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iA_i - \mu_i(P_iH_iH_i^{\mathrm{T}}P_i + D_i^{\mathrm{T}}D_i) - 2\rho P_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i - \sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j - C_i^{\mathrm{T}}P_iC_i + I,$$

$$\varXi_{ij} = - P_j - I + (P_jE_{j,i}^{\mathrm{T}} + \upsilon_i(P_iH_iH_i^{\mathrm{T}}P_i + D_i^{\mathrm{T}}D_i) + \delta_jF_{j,i}^{\mathrm{T}})P_i(\delta_jF_{j,i} + \upsilon_i(P_iH_i^{\mathrm{T}}H_iP_i + D_iD_i^{\mathrm{T}}) + E_{j,i}P_j).$$

证明　对于系统 (4), 选择 Lyapunov 函数 (6), 令

$$a_i = A_i^{\mathrm{T}} P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} P_j + 2\rho P_i B_i B_i^{\mathrm{T}} P_i - I,$$

$$\widehat{a}_i = (A_i + \Delta A_i)^{\mathrm{T}} P_i + P_i (A_i + \Delta A_i) + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} P_j + 2\rho P_i B_i B_i^{\mathrm{T}} P_i - I,$$

$$M_i = \begin{bmatrix} a_i & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}.$$

由引理 2 可知

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_i & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix} =$$

$$M_i + \begin{bmatrix} P_i H_i G_i D_i + (P_i H_i G_i D_i)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$M_i + \begin{bmatrix} P_i H_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} P_i H_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{T}} \leqslant$$

$$M_i + \mu_i \begin{bmatrix} P_i H_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i H_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \mu_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} G_i^{\mathrm{T}} G_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leqslant$$

$$M_i + \mu_i \begin{bmatrix} P_i H_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i H_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \mu_i \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_i + \mu_i (P_i H_i H_i^{\mathrm{T}} P_i + D_i^{\mathrm{T}} D_i) & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix}. \tag{16}$$

记

$$W_i = \Theta_i^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Theta_i = -A_i^{\mathrm{T}} P_i - P_i A_i - \mu_i (P_i H_i H_i^{\mathrm{T}} P_i + D_i^{\mathrm{T}} D_i) - \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} P_j - 2\rho P_i B_i B_i^{\mathrm{T}} P_i - C_i^{\mathrm{T}} P_i C_i + I.$$

如果式 (17) 成立, 则有

$$\overline{\sigma}^2 (W_i^{\mathrm{T}} W_i) = \overline{\lambda}(\Theta_i^{-1}) \leqslant \left(\frac{\mathrm{tr}\,\Theta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n} \Big(\mathrm{tr}\,\Theta_i^2 - \frac{1}{n} |\mathrm{tr}\,\Theta_i|^2 \Big)} \right)^{-1} < 1.$$

由引理 1 和式 (16) 可知

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_i - I & C_i^{\mathrm{T}} & I \\ C_i & -P_i^{-1} & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix} < 0.$$

与定理 1 和定理 3 的证明类似, 如果式 (17) 和 (18) 成立, 则定理 4 成立. □

定理 4 给出了系统 (4) 依概率稳定的充分条件, 如果令

$$f_i = \frac{\mathrm{tr}\,\Theta_i}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n} \Big(\mathrm{tr}\,\Theta_i^2 - \frac{1}{n} |\mathrm{tr}\,\Theta_i|^2 \Big)} > 1, \tag{17}$$

$$f_{ij} = \frac{\mathrm{tr}\,\Xi_{ij}}{n} - \sqrt{\frac{n-1}{n} \Big(\mathrm{tr}\,\Xi_{ij}^2 - \frac{1}{n} |\mathrm{tr}\,\Xi_{ij}|^2 \Big)} > 1, \tag{18}$$

则正数 $\lambda_{i1} \geqslant \lambda_{i2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{in} > 0 (i = 1, 2, \cdots, N)$ 可由下述优化问题

$$\min \Big(\sum_{i=1}^{N} (f_i - 1)^2 + \sum_{i,j=1}^{N} (f_{ij} - 1)^2 \Big) \tag{19}$$

求解. 式 (19) 可以利用 Matlab 优化工具箱中 fmincon 函数方便求解, 称该方法为 MINC 方法.

注 2　LMI 方法必须构造线性矩阵, MINC 方法也可以应用于非线性矩阵, 应用范围更广, 更方便灵活.

注 3　因为 MINC 方法只需计算对角正定矩阵, 计算中所求变量减少了 $n^2 - n$ 个, 所以 MINC 方法比 LMI 计算量要小得多.

3　数值算例

考虑三维二模态具有 Markov 切换的脉冲随机微分系统

$$\mathrm{d}x(t) = [(A_i + \Delta A_i) x(t) + B_i u(t)] \mathrm{d}t + C_i x(t) \mathrm{d}\omega(t), \quad r(t^+) = r(t);$$

$$x(t^+) = (E_{j,i} + \Delta E_{j,i}) x(t^-) + F_{j,i} u(t^-), \quad r(t^+) \neq r(t);$$

$$x(t_0^+) = x_0, \ [\Delta A_i, \Delta E_{j,i}] = H_i G_i [D_i, W_{j,i}].$$

其中 Markov 过程由算子 $\Pi = (\gamma_{ij}) (i, j \in 1, 2)$ 给出, 有

$$A_1 = \begin{bmatrix} -9.3 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 1 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ F_{21} = \begin{bmatrix} -0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = I_3, \ C_1 = C_2 = 2I_3, \ H_1 = H_2 = 0.1I_3,$$

$$D_1 = D_2 = I_3,\ F_{12} = I_3,\ \Pi = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$E_{12} = 2I_3,\ E_{21} = I_3,\ W_{12} = 0.3I_3,\ \upsilon_1 = \upsilon_2 = 0.1,$$

$$W_{21} = -0.3I_3,\ \rho = 1,\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.5.$$

首先选取 $X_0 = [0.000\,01,\ 0.000\,001,\ 0.1,\ 0.000\,1,\ 0.000\,001,\ 0.000\,1]$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 10$, 由定理4并应用Matlab优化工具箱中fmincon函数计算可得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4.850\,1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.431\,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.660\,7 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 79.747\,2 & 0 & 0 \\ 0 & 79.747\,2 & 0 \\ 0 & & 63.338\,8 \end{bmatrix}.$$

相应的状态反馈增益矩阵与脉冲控制增益为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 4.850\,1 & 0 & 0 \\ 0 & -2.431\,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.660\,7 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 71.772\,5 & 0 & 0 \\ 0 & 87.721\,9 & 0 \\ 0 & 0 & 63.338\,8 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2.061\,8 & 0 & 0 \\ 0 & 4.113\,5 & 0 \\ 0 & 0 & 15.135\,5 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.125\,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125\,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.157\,9 \end{bmatrix}.$$

再取 $X_0 = [0.01,\ 0.01,\ 0.01,\ 0.01,\ 0.000\,001,\ 0.000\,1]$, $\delta_1 = \delta_2 = 10$, 可以得到

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10.580\,7 & 0 & 0 \\ 0 & 10.580\,7 & 0 \\ 0 & & 10.290\,8 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 116.017\,5 & 0 & 0 \\ 0 & 68.729\,2 & 0 \\ 0 & 0 & 47.877\,9 \end{bmatrix}.$$

相应的状态反馈增益矩阵和脉冲控制增益为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 10.580\,7 & 0 & 0 \\ 0 & -10.580\,7 & 0 \\ 0 & 0 & 10.290\,8 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 104.415\,8 & 0 & 0 \\ 0 & 75.602\,1 & 0 \\ 0 & 0 & 47.877\,9 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.945\,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.945\,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.971\,7 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.086\,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.145\,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.208\,9 \end{bmatrix}.$$

综上, 整个不确定脉冲混合系统在定义1的意义下是依概率稳定的, 从而控制方法是有效的.

注4 由以上分析可见, 能够通过选取不同的初始值 X_0 和 δ 求得合适的状态反馈增益矩阵和脉冲控制增益.

4 结 论

本文结合二次型与标准二次型的关系、正(负)定矩阵的定义和性质, 提出了基于Matlab优化工具箱中fmincon函数的MINC方法, 并将一类在切换时刻具有脉冲行为的Markov切换随机系统的镇定和鲁棒稳定性问题转化为多目标最优化问题. 首先给出系统依概率稳定的充分条件; 然后研究系统的稳定化问题和鲁棒稳定性问题, 并给出了相应的状态反馈增益矩阵和脉冲增益矩阵的求解方法. 本文提出的MINC方法只要求对角正定矩阵, 不要求矩阵一定线性, 且能够直接求出最优可行解, 因此与LMI方法相比, 计算量更小, 更简单, 并且许多控制系统的分析和综合问题均可以转化为MINC方法来求解.

参考文献(References)

[1] Cheng P, Deng F Q. Global exponential stability of impulsive stochastic functional differential systems[J]. Statistics and Probability Letters, 2010, 80(23/24): 1854-1862.

[2] Zhang H, Guan Z H, Feng G. Reliable dissipative control for stochastic impulsive systems[J]. Automatica, 2008, 44(4): 1004-1010.

[3] Wu F K, Hu S G, Huang C M. Robustness of general decay stability of nonlinear neutral stochastic functional differential equations with infinite delay[J]. Systems Control Letters, 2010, 59(3/4): 195-202.

[4] Peng S, Jia B. Some criteria on pth moment stability of impulsive stochastic functional differential equations[J]. Siatishcs and Probability Letters, 2010, 80(13/14): 1085-1092.

[5] Liu B, Marquez H J. Uniform stability of discrete delay systems and synchronization of discrete delay dynamical networks via razumikhin technique[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2008, 55(9): 2795-2805.

[6] Liu J, Liu X Z, Xie W C. Impulsive stabilization of stochastic functional differential equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24(3): 264-269.

[7] Xu L G, Xu D Y. Mean square exponential stability of impulsive control stochastic systems with time-varying delay[J]. Physics Letters A, 2009, 373(3): 328-333.

[8] Rakkiyappan R, Balasubramaniam P, Cao J D. Global exponential stability results for neutral-type impulsive neural networks[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(1): 122-130.

[9] Samidurai R, Anthoni S, Balachandran K. Global exponential stability of neutral-type impulsive neural networks with discrete and distributed delays[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2010, 4(1): 103-112.

[10] Bao J H, Hou Z T, Wang F X. Exponential stability in mean square of impulsive stochastic difference equations with continuous time[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(5): 749-753.

[11] Sakthivel R, Luo J. Asymptotic stability of nonlinear impulsive stochastic differential equations[J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(9): 1219-1223.

[12] Yang Z G, Xu D Y, Li X. Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays [J]. Physics Letters A, 2006, 359(2): 129-137.

[13] 杨莹, 李俊民, 刘晓芬. 脉冲随机混合系统的稳定性与鲁棒稳定性分析[J]. 控制与决策, 2008, 23(5): 555-559.
(Yang Y, Li J M, Liu X F. Analysis of stability systems with impulsive and robust stability for stochastic hybrid effects[J]. Control and Decision, 2008, 23(5): 555-559.)

[14] Feng X B, Loparo K A, Ji Y D, et al. Stochastic stability properties of jump linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(1): 38-53.

[15] Yue D, Fang J A, Won S, Delay-dependent robust stability of stochastic uncertain systems with time-delay and Markovian jump parameters[J]. Circuits Systems Signal Processing, 2003, 22(4): 351-365.

[16] Hasminskii R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. Groningen: Sijthoff and Noordhoff, 1980.

[17] Liu X H. A criterion for the positive definiteness of a block-matrix and its application[J]. Mathematical Theory and Applications, 2001, 21(3): 122-128.

[18] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(3): 356-361.

(上接第1546页)

[4] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.

[5] Zhang T P, Ge S S. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown deadzone in pure-feedback form[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1895-1903.

[6] Zhang T P, Zhu Q, Yang Y Q. Adaptive neural control of non-affine pure-feedback nonlinear systems with input nonlinearity and perturbed uncertainties[J]. Int J of Systems Science, 2012, 43(4): 691-706.

[7] Zhang T P, Zhu Q Q, Zhu Q. Adaptive NN dynamic surface control of strict feedback nonlinear systems[C]. Proc of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation. Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2010: 2124-2129.

[8] Jiang Z P, Hill D J. A robust adaptive backstepping scheme for nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(9): 1705-1711.

[9] Jiang Z P, Laurent P. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties[J]. Automatica, 1998, 34(7): 825-840.

[10] Jiang Z P. A combined backstepping and small-gain approach to adaptive output feedback control[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1131-1139.

[11] Tong S C, He X L, Li Y M, et al. Adaptive fuzzy backstepping robust control for uncertain nonlinear systems based on small-gain approach[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(6): 771-796.

[12] 佟绍成,李永明. 一类具有未建模动态的非线性系统模糊自适应鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 417-422.
(Tong S C, Li Y M. Fuzzy adaptive robust control for a class of nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 417-422.)

[13] Tong S C, Li Y M. Fuzzy adaptive robust backstepping stabilization for SISO nonlinear systems with unknown virtual control direction[J]. Information Sciences, 2010, 180(23): 4619-4640.

[14] 张天平, 鲁瑶. 带有未建模动态的非线性系统的自适应动态面控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(3): 335-342.
(Zhang T P, Lu Y. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unmodeled dynamics[J]. Control and Decision, 2012, 27(3): 335-342.)

[15] Zhang X Y, Lin Y. Adaptive tracking control for a class of pure-feedback nonlinear systems including actuator hysteresis and dynamic uncertainties[J]. IET Control Theory, 2011, 5(16): 1868-1880.

[16] Lin W, Qian C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: A non-smooth feedback framework[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(5): 757-774.